

ТЕРМОДИНАМИЧЕСКИ НЕРАВНОВЕСНАЯ ПУЗЫРЬКОВАЯ СРЕДА

С. М. Шугрин

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 630090 Новосибирск

Разработана модель термодинамически локально-неравновесной двухтемпературной и двухскоростной пузырьковой среды. Формулировка математической модели делается в два этапа. На первом этапе на базе вариационного принципа выводится квазиравновесная модель, на втором в найденные уравнения вводятся локально-неравновесные обменные члены. Из сформулированной таким образом общей модели могут быть получены более простые уравнения с помощью асимптотических и других способов (уравнения теорий длинных или коротких волн и др.).

Получена модель термодинамически локально-неравновесной двухтемпературной и двухскоростной пузырьковой среды. Построение делается в два этапа.

Вначале на базе вариационного принципа находится квазиравновесная модель или, более точно, модель, инвариантная относительно обращения времени. Аналогичные уравнения строились в [1] (см. также [2, 3]). Однако в [1] исходные гипотезы без большой необходимости усложнены, из-за чего итоговая система оказалась громоздкой и труднообозримой. Вероятно, поэтому изложение в [1] неполное: например, отсутствуют уравнения баланса энергии для отдельных компонентов (дефект многих моделей гетерогенных сред) и закон сохранения энергии для системы в целом, без чего трудно корректно ввести члены, описывающие разнообразные локально-неравновесные обменные процессы. На данной стадии развития теории гетерогенных сред целесообразно стремиться к рациональному упрощению гипотез для получения системы с возможно более отчетливой структурой, чтобы проще было анализировать характерные особенности уравнений, облегчить их практическое использование и проверку. (Наиболее простой вариант двухскоростной системы построен в п. 4.)

На втором этапе в найденные уравнения вводятся локально-неравновесные обменные члены. Для этого постулируется соответствующий онсагеров формализм, аналогичный описанному в [4] (см. также [5, 6]). Двухэтапное построение феноменологических моделей — сочетание вариационного принципа с дальнейшим использованием подходящего варианта онсагерева формализма — представляется методологически наиболее оптимальным. Далее из таких сравнительно общих моделей могут получаться более специальные с помощью асимптотических и иных соображений (уравнения теорий длинных или коротких волн и др.).

1. Описание термодинамики. Рассмотрим двухкомпонентную пузырьковую жидкость, включающую:

а) *несущий компонент* с плотностью $\rho_{(1)} = \text{const}$, удельной внутренней энергией $\varepsilon_{(1)}$, удельной энтропией $s_{(1)}$, температурой $T_{(1)}$; при этом дифференциальная форма Гиббса

$$d\varepsilon_{(1)} = T_{(1)} ds_{(1)}; \quad (1.1)$$

б) *пузырьковый компонент*, состоящий из сферических пузырьков радиуса R с объемной плотностью числа пузырьков n ; $\rho_{(2)}$ — плотность газа (пара) в пузырьке, $p_{(2)}$ —

давление, $\varepsilon_{(2)}$ — удельная внутренняя энергия, $s_{(2)}$ — удельная энтропия, $T_{(2)}$ — температура; при этом дифференциальная форма Гиббса для газа

$$d\varepsilon_{(2)} = T_{(2)} ds_{(2)} - p_{(2)} d(1/\rho_{(2)}). \quad (1.2)$$

Объемная концентрация пузырьков $\alpha \equiv ((4/3)\pi R^3)n$. Объемные плотности несущего и пузырькового компонентов соответственно $\rho' \equiv (1-\alpha)\rho_{(1)}$ и $\rho'' \equiv \alpha\rho_{(2)}$. Предполагается, что радиус и концентрация пузырьков малы. Скорости компонентов обозначим через $v_{(i)} = (v_{(i)}^k)$, $k = 1, 2, 3$. Удобно ввести галилеевы 4-мерные векторы скорости $v_{(i)}^\nu \equiv (1, v_{(i)}^k) = (1, v_{(i)}^1, v_{(i)}^2, v_{(i)}^3)$ так, что $v_{(i)}^0 = 1$. Полагаем также $x^\nu \equiv t$. Латинские тензорные индексы принимают значения 1, 2, а греческие 0, 1, 2, 3.

При движении сферического газового пузырька со скоростью $v_{(2)}$ в несжимаемой среде, имеющей скорость $v_{(1)}$, в последней возникает возмущенное течение, кинетическая энергия которого

$$k_{\text{воз}} = \left(\frac{4}{3}\pi R^3\right)\rho_{(1)}\left(\frac{3}{2}\dot{R}^2 + \frac{\omega^2}{4}\right), \quad \omega = v_{(1)} - v_{(2)}, \quad \dot{R} \equiv D_{(2)}R \equiv v_{(2)}^\nu \frac{\partial R}{\partial x^\nu} = \frac{\partial R}{\partial t} + v_{(2)}^k \frac{\partial R}{\partial x^k}.$$

Если пузырьки взаимодействуют между собой слабо (что имеет место при малости R и α), то объемная плотность кинетической энергии возмущенного течения

$$K_{\text{воз}} = k_{\text{воз}}n = \alpha\rho_{(1)}\left(\frac{3}{2}\dot{R}^2 + \frac{\omega^2}{4}\right). \quad (1.3)$$

Наконец, объемная плотность энергии поверхностного натяжения

$$\varepsilon_{\text{пов}} = (4\pi R^2)n\sigma. \quad (1.4)$$

Для простоты предполагается, что $\sigma = \text{const}$.

Из определений вытекает

$$d\alpha = -\frac{1}{\rho_{(1)}}d\rho', \quad 3\frac{dR}{R} = -\frac{1}{\alpha\rho_{(1)}}d\rho' - \frac{dn}{n}, \quad \frac{d\rho_{(2)}}{\rho_{(2)}} = \frac{1}{\alpha\rho_{(1)}}d\rho' + \frac{1}{\alpha\rho_{(2)}}d\rho''.$$

Поэтому $3\dot{R}/R = -(1/\alpha\rho_{(1)})\dot{\rho}' - \dot{n}/n$.

2. Вариационный принцип. Пусть лагранжевы координаты частиц несущего компонента есть $\xi(t, x) = (\xi^a)$, а пузырькового $\eta(t, x) = (\eta^a)$. По определению лагранжевых координат

$$D_{(1)}\xi^a = 0, \quad D_{(2)}\eta^a = 0, \quad D_{(i)} \equiv v_{(i)}^\nu \frac{\partial}{\partial x^\nu}. \quad (2.1)$$

Введем функционал

$$J_1 \equiv \int_{t_0}^{t_1} \int_{R^3} \left\{ \rho' \frac{v_{(1)}^2}{2} + \rho'' \frac{v_{(2)}^2}{2} + K_{\text{воз}} - \rho' \varepsilon_{(1)} - \rho'' \varepsilon_{(2)} - \varepsilon_{\text{пов}} \right\} dx dt.$$

Ищется стационарное положение J_1 при условии, что выполнены равенства (1.1)–(1.4) и следующие законы сохранения:

— массы для несущего компонента

$$\mathbf{M}_{(1)} = 0, \quad \mathbf{M}_{(1)} \equiv \frac{\partial}{\partial x^\nu} [\rho' v_{(1)}^\nu]; \quad (2.2)$$

— массы для пузырькового компонента

$$\mathbf{M}_{(2)} = 0, \quad \mathbf{M}_{(2)} \equiv \frac{\partial}{\partial x^\nu} [\rho'' v_{(2)}^\nu]; \quad (2.3)$$

— энтропии для несущего компонента

$$\mathbf{S}_{(1)} = 0, \quad \mathbf{S}_{(1)} \equiv \frac{\partial}{\partial x^\nu} [\rho' s_{(1)} v_{(1)}^\nu]; \quad (2.4)$$

— энтропии для пузырькового компонента

$$\mathbf{S}_{(2)} = 0, \quad \mathbf{S}_{(2)} \equiv \frac{\partial}{\partial x^\nu} [\rho'' s_{(2)} v_{(2)}^\nu]; \quad (2.5)$$

— числа пузырьков

$$\mathbf{N} = 0, \quad \mathbf{N} \equiv \frac{\partial}{\partial x^\nu} [n v_{(2)}^\nu]. \quad (2.6)$$

Уравнения (2.1) служат для определения $v_{(i)}^k$ через производные от лагранжевых координат [7]. Используя метод Лагранжа, заменяем J_1 на функционал

$$J_2 \equiv \int_{t_0}^{t_1} \int_{R^3} \left\{ \rho' \frac{v_{(1)}^2}{2} + \rho'' \frac{v_{(2)}^2}{2} + K_{\text{воз}} - \rho' \varepsilon_{(1)} - \rho'' \varepsilon_{(2)} - \varepsilon_{\text{пов}} + \right. \\ \left. + \varphi' \mathbf{M}_{(1)} + \varphi'' \mathbf{M}_{(2)} + \psi' \mathbf{S}_{(1)} + \psi'' \mathbf{S}_{(2)} + \omega \mathbf{N} \right\} dx dt.$$

Здесь $\varphi', \varphi'', \psi', \psi'', \omega$ — множители Лагранжа. Поскольку добавление дивергентного слагаемого на вид уравнений Эйлера не влияет, то J_2 можно заменить более удобным для вычислений функционалом

$$J \equiv \int_{t_0}^{t_1} \int_{R^3} L dx dt \\ (L \equiv \rho' \frac{v_{(1)}^2}{2} + \rho'' \frac{v_{(2)}^2}{2} + K_{\text{воз}} - \rho' \varepsilon_{(1)} - \rho'' \varepsilon_{(2)} - \varepsilon_{\text{пов}} - \\ - \rho' D_{(1)} \varphi' - \rho' s_{(1)} D_{(1)} \psi' - \rho'' D_{(2)} \varphi'' - \rho'' s_{(2)} D_{(2)} \psi'' - n D_{(2)} \omega).$$

Лагранжиан L рассматривается как зависящий от $\xi, \eta, \rho', \rho'', s' \equiv \rho' s_{(1)}, s'' \equiv \rho'' s_{(2)}, n, \varphi', \varphi'', \psi', \psi'', \omega$ и их производных. Обозначим $E_{(\xi)a} \equiv \delta L / \delta \xi^a, \bar{E}_{(\eta)a} \equiv \delta L / \delta \eta^a, E_{\rho'} \equiv \delta L / \delta \rho', E_{s'} \equiv \delta L / \delta s', \dots$, где $\delta L / \delta \xi^a, \dots$ — вариационные производные.

По теореме Нётер инвариантность L относительно пространственных сдвигов влечет закон сохранения полного импульса $J = 0$ [8], где

$$J^j = \{ \xi_j^a E_{(\xi)a} + \rho_j' E_{\rho'} + s_j' E_{s'} + \varphi_j' E_{\varphi'} + \psi_j' E_{\psi'} \} + \\ + \{ \eta_j^a E_{(\eta)a} + \rho_j'' E_{\rho''} + s_j'' E_{s''} + n_j E_n + \varphi_j'' E_{\varphi''} + \psi_j'' E_{\psi''} + \omega_j E_\omega \}. \quad (2.7)$$

Здесь $\xi_j^a \equiv \partial \xi^a / \partial x^j$ и т. д. После вычислений находим (с учетом получающихся из уравнений Эйлера соотношений для множителей Лагранжа)

$$J^j = 0, \quad J^j \equiv \frac{\partial}{\partial x^\nu} \left\{ \rho' v_{(1)}^\nu v_{(1)}^j + \rho'' v_{(2)}^\nu v_{(2)}^j + \frac{\alpha}{2} \rho_{(1)} w^\nu w^j + P \delta_j^\nu \right\}; \quad (2.8)$$

$$P \equiv \left(p_{(2)} - \frac{2\sigma}{R} \right) - \rho_{(1)} \left(K \dot{R} + \frac{3}{2} \dot{R}^2 - \frac{w^2}{4} \right), \quad \dot{R} = D_{(2)} R, \quad \ddot{R} = D_{(2)} \dot{R}, \quad w^\nu \equiv v_{(1)}^\nu - v_{(2)}^\nu. \quad (2.9)$$

Так как по определению $v_{(i)}^0 = 1$, то $w^0 = 0$.

Отделяя в (2.7) члены, относящиеся к несущей среде, получим для нее уравнение баланса импульса, включающее недивергентное слагаемое (фактически это общий способ определения импульса несущей среды):

$$J_{(1)}^j = 0, \quad J_{(1)}^j \equiv \frac{\partial}{\partial x^\nu} \left\{ v_{(1)}^\nu \left[\rho' v_{(1)}^j + \frac{\alpha}{2} \rho_{(1)} w^j \right] \right\} + \frac{\alpha}{2} \rho_{(1)} \left(w \mid \frac{\partial v_{(1)}}{\partial x^j} \right) + (1 - \alpha) \frac{\partial P}{\partial x^j}, \quad (2.10)$$

$(a \mid b) \equiv \sum_i a^i b^i$ — скалярное произведение векторов $a, b \in R^3$.

Аналогично строится уравнение баланса импульса для пузырькового компонента

$$J_{(2)}^j = 0, \quad J_{(2)}^j \equiv \frac{\partial}{\partial x^\nu} \left\{ v_{(2)}^\nu \left[\rho'' v_{(2)}^j - \frac{\alpha}{2} \rho_{(1)} w^j \right] \right\} - \frac{\alpha}{2} \rho_{(1)} \left(w \mid \frac{\partial v_{(1)}}{\partial x^j} \right) + \alpha \frac{\partial P}{\partial x^j}. \quad (2.11)$$

Очевидно, $J_{(1)}^j + J_{(2)}^j = J^j$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Из-за присутствия недивергентного члена совсем не очевидно, какое соотношение может быть корректно названо уравнением баланса импульса компонента. Вышеиспользованный простой, но общий способ, опирающийся на связь определения импульса с инвариантностью по отношению к пространственным сдвигам и на выражение (2.7), вытекающее из теоремы Нётер [8], дает, по-видимому, единственное корректное определение. То же относится и к уравнениям баланса энергии (см. ниже).

Инвариантность относительно временных сдвигов дает закон сохранения полной энергии $\mathbf{E} = 0$, где (ср. с (2.7))

$$-\mathbf{E} = \{ \xi_i^a E_{(\xi)_a} + \dots + \psi_i^j E_{,\psi^j} \} + \{ \eta_i^a E_{(\eta)_a} + \dots + \omega_t E_\omega \}. \quad (2.12)$$

Здесь $\xi_i^a \equiv \partial \xi^a / \partial t$ и т. д. После вычислений получим

$$\mathbf{E} = \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \rho' \varepsilon_{(1)} + \rho'' \varepsilon_{(2)} + \varepsilon_{\text{пов}} + \rho' \frac{v_{(1)}^2}{2} + \rho'' \frac{v_{(2)}^2}{2} + K_{\text{воз}} \right\} + \frac{\partial}{\partial x^k} \left\{ v_{(1)}^k \left[\rho' \left(\varepsilon_{(1)} + \frac{v_{(1)}^2}{2} \right) + (1 - \alpha) P \right] + \right. \\ \left. + \frac{\alpha}{2} \rho_{(1)} (v_{(1)} \mid w) w^k + v_{(2)}^k \left[\rho'' \left(\varepsilon_{(2)} + \frac{v_{(2)}^2}{2} \right) + K_{\text{воз}} + \varepsilon_{\text{пов}} + \alpha P \right] \right\}. \quad (2.13)$$

Отделяя в (2.12) члены, относящиеся к несущему компоненту, найдем для него уравнение баланса энергии в виде

$$\mathbf{E}_{(1)} = 0, \quad (2.14)$$

$$\mathbf{E}_{(1)} \equiv \frac{\partial}{\partial x^\nu} \left\{ v_{(1)}^\nu \left[\rho' \left(\varepsilon_{(1)} + \frac{v_{(1)}^2}{2} \right) + \frac{\alpha}{2} \rho_{(1)} (v_{(1)} \mid w) \right] \right\} - \frac{\alpha}{2} \rho_{(1)} \left(w \mid \frac{\partial v_{(1)}}{\partial t} \right) + v_{(1)}^j (1 - \alpha) \frac{\partial P}{\partial x^j}.$$

3. Итоговая система. Итак, из вариационного принципа с функционалом J следуют уравнения (2.2)–(2.6), (2.8)–(2.11), (2.13), (2.14). Для дальнейшего итоговую систему удобно записать как

$$\mathbf{M} = 0, \quad \mathbf{J}^j = 0, \quad \mathbf{E} = 0; \quad (3.1a)$$

$$\mathbf{M}_{(1)} = 0, \quad \mathbf{J}_{(1)}^j = 0, \quad \mathbf{E}_{(1)} = 0; \quad (3.1б)$$

$$\mathbf{N} = 0; \quad (3.1в)$$

$$R\ddot{R} + \frac{3}{2}\dot{R}^2 - \frac{w^2}{4} = \frac{1}{\rho_{(1)}} \left(p_{(2)} - \frac{2\sigma}{R} - P \right), \quad (3.1г)$$

где $\mathbf{M} = \mathbf{M}_{(1)} + \mathbf{M}_{(2)} \equiv (\partial / \partial x^\nu) \{ \rho' v_{(1)}^\nu + \rho'' v_{(2)}^\nu \}$.

Из уравнений (3.1) следует закон сохранения полной энтропии

$$\mathbf{S} = 0, \quad \mathbf{S} \equiv \mathbf{S}_{(1)} + \mathbf{S}_{(2)} \equiv \frac{\partial}{\partial x^\nu} \{ \rho^j s_{(1)} v_{(1)}^\nu + \rho'' s_{(2)} v_{(2)}^\nu \}. \quad (3.2)$$

Справедливы соотношения

$$\mathbf{E}_{(1)} = \left(\varepsilon_{(1)} - T_{(1)} s_{(1)} - \frac{v_{(1)}^2}{2} \right) \mathbf{M}_{(1)} + v_{(1)}^j \mathbf{J}_{(1)}^j + T_{(1)} \mathbf{S}_{(1)}; \quad (3.3)$$

$$\mathbf{E}_{(2)} = \frac{1}{\rho_{(1)}} P \mathbf{M}_{(1)} + \left(\gamma_{(2)} - \frac{v_{(2)}^2}{2} \right) \mathbf{M}_{(2)} + v_{(2)}^j \mathbf{J}_{(2)}^j + T_{(2)} \mathbf{S}_{(2)} + \zeta \mathbf{N}. \quad (3.4)$$

Здесь $\mathbf{E}_{(2)} \equiv \mathbf{E} - \mathbf{E}_{(1)}$;

$$\gamma_{(2)} \equiv \varepsilon_{(2)} - T_{(2)} s_{(2)} + p_{(2)} / \rho_{(2)}; \quad (3.5)$$

$$\zeta \equiv \frac{1}{n} \left\{ \alpha \left(\Gamma - p_{(2)} - \rho_{(1)} \frac{w^2}{2} \right) + K_{\text{воз}} + \varepsilon_{\text{пов}} \right\}. \quad (3.6)$$

Из (3.3), (3.4) следует фундаментальное равенство

$$\mathbf{E} = \left(\gamma_{(1)} - \frac{v_{(1)}^2}{2} \right) \mathbf{M}_{(1)} + v_{(1)}^j \mathbf{J}_{(1)}^j + T_{(1)} \mathbf{S}_{(1)} + \left(\gamma_{(2)} - \frac{v_{(2)}^2}{2} \right) \mathbf{M}_{(2)} + v_{(2)}^j \mathbf{J}_{(2)}^j + T_{(2)} \mathbf{S}_{(2)} + \zeta \mathbf{N}; \quad (3.7)$$

$$\gamma_{(1)} \equiv \varepsilon_{(1)} - T_{(1)} s_{(1)} + P / \rho_{(1)}. \quad (3.8)$$

Соотношение (3.7) есть одно из представлений второго начала термодинамики для рассматриваемой пузырьковой среды (см. также [8]). При выводе (3.4) уравнение Рэлея (3.1г) предполагалось выполненным тождественно, т. е. рассматривалось как определение P . Обратим внимание, что $\gamma_{(1)}$ и $\gamma_{(2)}$, определяемые выражениями (3.8), (3.5), суть удельные термодинамические потенциалы Гиббса.

Из (3.3), (3.4) следует также второе фундаментальное соотношение, дополнительное к (3.7):

$$\begin{aligned} \mathbf{S} = & -\frac{1}{T_{(2)}} \left\{ \Gamma_{(2)} - \frac{v_{(2)}^2}{2} \right\} \mathbf{M} - \frac{1}{T_{(2)}} v_{(2)}^j \mathbf{J}^j + \frac{1}{T_{(2)}} \mathbf{E} - \left\{ \frac{1}{T_{(1)}} \left(\Gamma_{(1)} - \frac{v_{(1)}^2}{2} \right) - \right. \\ & \left. - \frac{1}{T_{(2)}} \left(\Gamma_{(2)} - \frac{v_{(2)}^2}{2} \right) \right\} \mathbf{M}_{(1)} - \left\{ \frac{1}{T_{(1)}} v_{(1)}^j - \frac{1}{T_{(2)}} v_{(2)}^j \right\} \mathbf{J}_{(1)}^j + \left\{ \frac{1}{T_{(1)}} - \frac{1}{T_{(2)}} \right\} \mathbf{E}_{(1)} - \frac{\zeta}{T_{(2)}} \mathbf{N}. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Здесь

$$\Gamma_{(1)} \equiv \varepsilon_{(1)} - T_{(1)} s_{(1)} + \frac{T_{(1)}}{T_{(2)}} \frac{P}{\rho_{(1)}}, \quad \Gamma_{(2)} \equiv \gamma_{(2)}. \quad (3.10)$$

Из (3.9), в частности, вытекает, что, если справедливы равенства (3.1), то выполняется замыкающий закон сохранения (3.2).

Если $T_{(1)} = T_{(2)}$, то $\Gamma_{(1)} = \gamma_{(1)}$. В общем случае двухтемпературной среды ($T_{(1)} \neq T_{(2)}$) создается важное различие между $\Gamma_{(1)}$ и $\gamma_{(1)}$.

4. Упрощенная система. Если w мало, $w^2/4 \ll (3/2)\dot{R}^2$, то вместо (1.3) можно взять

$$K_{\text{воз}} \equiv \alpha \rho_{(1)} \frac{3}{2} \dot{R}^2. \quad (4.1)$$

В результате приходим к системе

$$\mathbf{M} = 0, \quad \mathbf{J}^j = 0, \quad \mathbf{E} = 0; \quad (4.2a)$$

$$\mathbf{M}_{(1)} = 0, \quad \mathbf{J}_{(1)}^j = 0, \quad \mathbf{E}_{(1)} = 0; \quad (4.26)$$

$$\mathbf{N} = 0; \quad (4.2B)$$

$$R\ddot{R} + \frac{3}{2}\dot{R}^2 = \frac{1}{\rho_{(1)}} \left(p_{(2)} - \frac{2\sigma}{R} - P \right), \quad (4.2Г)$$

где

$$\mathbf{J}^j \equiv \frac{\partial}{\partial x^\nu} \{ \rho' v_{(1)}^\nu v_{(1)}^j + \rho'' v_{(2)}^\nu v_{(2)}^j + P \delta_j^\nu \};$$

$$\mathbf{E} = \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \rho' \varepsilon_{(1)} + \rho'' \varepsilon_{(2)} + \varepsilon_{\text{пов}} + \rho' \frac{v_{(1)}^2}{2} + \rho'' \frac{v_{(2)}^2}{2} + K_{\text{воз}} \right\} + \frac{\partial}{\partial x^k} \left\{ v_{(1)}^k \left[\rho' \left(\varepsilon_{(1)} + \frac{v_{(1)}^2}{2} \right) + \right. \right. \\ \left. \left. + (1 - \alpha)P \right] + v_{(2)}^k \left[\rho'' \left(\varepsilon_{(2)} + \frac{v_{(2)}^2}{2} \right) + K_{\text{воз}} + \varepsilon_{\text{пов}} + \alpha P \right] \right\};$$

$K_{\text{воз}}$ определяется формулой (4.1);

$$J_{(1)}^j \equiv \frac{\partial}{\partial x^\nu} (\rho' v_{(1)}^\nu v_{(1)}^j) + (1 - \alpha) \frac{\partial P}{\partial x^j}; \quad \mathbf{E}_{(1)} \equiv \frac{\partial}{\partial x^\nu} \left\{ v_{(1)}^\nu \rho' \left(\varepsilon_{(1)} + \frac{v_{(1)}^2}{2} \right) \right\} + v_{(1)}^j (1 - \alpha) \frac{\partial P}{\partial x^j}.$$

Из уравнений (4.2) следует замыкающий закон сохранения

$$\mathbf{S} = 0. \quad (4.3)$$

Здесь и далее $\mathbf{M}_{(i)}$, \mathbf{M} , $\mathbf{S}_{(i)}$, \mathbf{S} имеют тот же смысл, что и в п. 3.

Справедливы соотношения, аналогичные (3.3), (3.4):

$$\mathbf{E}_{(1)} = \left(\varepsilon_{(1)} - T_{(1)} s_{(1)} - \frac{v_{(1)}^2}{2} \right) \mathbf{M}_{(1)} + v_{(1)}^j \mathbf{J}_{(1)}^j + T_{(1)} \mathbf{S}_{(1)}; \quad (4.4)$$

$$\mathbf{E}_{(2)} = \frac{1}{\rho_{(1)}} P \mathbf{M}_{(1)} + \left(\gamma_{(2)} - \frac{v_{(2)}^2}{2} \right) \mathbf{M}_{(2)} + v_{(2)}^j \mathbf{J}_{(2)}^j + T_{(2)} \mathbf{S}_{(2)} + \zeta \mathbf{N}, \quad (4.5)$$

где $\gamma_{(2)}$ определяется формулой (3.5); $\mathbf{E}_{(2)} \equiv \mathbf{E} - \mathbf{E}_{(1)}$;

$$\zeta \equiv \frac{1}{n} \{ \alpha(P - p_{(2)}) + K_{\text{воз}} + \varepsilon_{\text{пов}} \} \quad (4.6)$$

(ср. (3.6) и (4.6)); $K_{\text{воз}}$ берется согласно (4.1). Как и в п. 3, предполагается, что уравнение Рэлея (4.2Г) выполнено тождественно. Из (4.4), (4.5) вытекает

$$\mathbf{S} = -\frac{1}{T_{(2)}} \left\{ \Gamma_{(2)} - \frac{v_{(2)}^2}{2} \right\} \mathbf{M} - \left\{ \frac{1}{T_{(2)}} v_{(2)}^j \right\} \mathbf{J}^j + \left\{ \frac{1}{T_{(2)}} \right\} \mathbf{E} - \left\{ \frac{1}{T_{(1)}} \left(\Gamma_{(1)} - \frac{v_{(1)}^2}{2} \right) - \right. \\ \left. - \frac{1}{T_{(2)}} \left(\Gamma_{(2)} - \frac{v_{(2)}^2}{2} \right) \right\} \mathbf{M}_{(1)} - \left\{ \frac{1}{T_{(1)}} v_{(1)}^j - \frac{1}{T_{(2)}} v_{(2)}^j \right\} \mathbf{J}_{(1)}^j + \left\{ \frac{1}{T_{(1)}} - \frac{1}{T_{(2)}} \right\} \mathbf{E}_{(1)} - \frac{\zeta}{T_{(2)}} \mathbf{N}. \quad (4.7)$$

Здесь $\Gamma_{(i)}$ находится из (3.10). Сравнивая (3.9) с (4.7), видим, что эти выражения совпадают с точностью до определения ζ . При совпадении выражений вида (3.9) будем говорить о *структурном изоморфизме* систем. Таким образом, системы (3.1), (3.2) и (4.2), (4.3) структурно-изоморфны с точностью до определения ζ . Структурно-изоморфные системы обладают во многом подобными термодинамическими свойствами (см. также пп. 5–9).

5. Онсагеров формализм. При неравенстве температур и некоторых других характеристик компонентов имеет место локальное термодинамическое неравновесие и происходят локально-неравновесные обменные процессы. В первом приближении их можно

феноменологически описать с помощью онсагера формализма. Центральное место в нем занимают соотношения, аналогичные (4.7). Приведем аксиоматику онсагера формализма для интересующего нас класса обменных процессов подобно тому, как это было сделано в [4] для диффузионных процессов (см. также [5, 6]). Пусть состояние рассматриваемой физической системы в точке (t, x) задается набором параметров $(u_\alpha) \equiv u$, $\alpha = 1, \dots, m$, а динамика «обратимых» процессов описывается дифференциальными уравнениями

$$\mathbf{L}^\beta[u] = 0, \quad \beta = 1, \dots, m. \quad (5.1)$$

«Обратимость» означает, что система (5.1) инвариантна относительно обращения времени, т. е. преобразования $t \rightarrow -t$. Предполагается, что каждое из уравнений (5.1) представляет собой закон сохранения или баланса массы, импульса и энергии (а в общем случае и других важных физических величин, например момента импульса) для системы в целом и ее отдельных компонентов, причем следствием (5.1) является дифференциальный закон сохранения полной энтропии

$$\mathbf{S} = 0. \quad (5.2)$$

Предполагается, что имеет место соотношение, подобное (4.7), а именно

$$q_\beta \mathbf{L}^\beta[u] = \mathbf{S}, \quad (5.3)$$

где q_β зависят от u^α и, возможно, от производных $\partial u \equiv u_\nu^\alpha \equiv \partial u^\alpha / \partial x^\nu$. Величины q_β называются *интегрирующими множителями*.

ЗАМЕЧАНИЕ. В [9] рассматривалась классическая ситуация, где $q_\beta \equiv q$ зависели только от u . В этом случае требовалось, чтобы отображение $u \rightarrow q(u)$ было локально взаимно однозначным, т. е. уравнение $q(u) = q$ локально однозначно разрешимо и локально определено обратное отображение $u(q)$. Если $q = q(u, \partial u)$, то, по-видимому, здесь также будет полезен некоторый аналог условия однозначной разрешимости, но, как его точно сформулировать, пока не ясно.

Предполагается далее, что система законов сохранения и/или балансных уравнений (5.1) является онсагеровой в смысле [4], т. е. набор интегрирующих множителей (q_1, \dots, q_m) может быть записан в виде набора (z_1, \dots, z_k) , где каждое z_i при всех ортогональных преобразованиях пространства R^3 , образующих группу $O(3)$, преобразовывалось бы по тензорному правилу, т. е. представляло бы некоторый $O(3)$ -тензор (скаляр, вектор, ...). Так, для (4.2) набор интегрирующих множителей (см. (4.7)) включает пять $O(3)$ -скаляров: $-(1/T_{(2)})\{\Gamma_{(2)} - v_{(2)}^2/2\}$, $1/T_{(2)}$, $-\{(1/T_{(1)})\Gamma_{(1)} - v_{(1)}^2/2\} - (1/T_{(2)})\{\Gamma_{(2)} - v_{(2)}^2/2\}$, $\{1/T_{(1)} - 1/T_{(2)}\}$, $-\zeta/T_{(2)}$, а также два вектора: $-(1/T_{(2)})v_{(2)}^j$, $-\{(1/T_{(1)})v_{(1)}^j - (1/T_{(2)})v_{(2)}^j\}$.

Введение членов, описывающих в рамках онсагера формализма локально-неравновесные обменные процессы, делается так. Уравнения (5.1) заменяются уравнениями

$$\mathbf{L}^\beta[u] = A^{\beta\gamma} q_\gamma. \quad (5.4)$$

Умножив (5.4) на q_β и учитывая (5.3), вместо (5.2) получим

$$\mathbf{S} = \Theta, \quad \Theta \equiv A^{\beta\gamma} q_\beta q_\gamma \geq 0. \quad (5.5)$$

Матрицу $A \equiv [A^{\beta\gamma}]$ назовем *онсагеровой*. Она должна обладать следующими свойствами:

а) *симметричностью*: $A^{\beta\gamma} = A^{\gamma\beta}$,

б) *диссипативностью*: $A \geq 0$,

в) Θ — *галилеев инвариант*, поскольку нас интересуют уравнения, инвариантные относительно группы Галилея.

Наряду с общими условиями a -в могут возникать дополнительные ограничения на $A^{\beta\gamma}$, вытекающие из специфики рассматриваемой физической системы или из требований простоты. Например, для элементарных обменных процессов матрица A обычно имеет ранг 1 (см. пп. 6–9). Если q_γ — скаляры (галилеевы инварианты), то матрица A может быть взята диагональной и правые части (5.4) соответствуют (при каждом β) особому элементарному процессу. В общем случае это не так.

Возьмем уравнения пп. 3 и 4. Предполагая, что полные массы, импульс и энергия сохраняются, рассмотрим уравнения

$$\mathbf{M} = 0, \quad \mathbf{J}^j = 0, \quad \mathbf{E} = 0; \quad (5.6)$$

$$\mathbf{M}_{(1)} = \mathbf{m}_{(1)}, \quad \mathbf{J}_{(1)}^j = \mathbf{f}_{(1)}^j, \quad \mathbf{E}_{(1)} = \mathbf{h}_{(1)}; \quad (5.7)$$

$$\mathbf{N} = \mathbf{1}, \quad (5.8)$$

где $\mathbf{m}_{(1)}$, $\mathbf{f}_{(1)}^j$, $\mathbf{h}_{(1)}$, $\mathbf{1}$ имеют онсагерову структуру, аналогичную правой части (5.4).

Подобно (5.7) запишем $\mathbf{M}_{(2)} = \mathbf{m}_{(2)}$, где, согласно (5.6), $\mathbf{m}_{(1)} + \mathbf{m}_{(2)} = 0$ (также и для остальных соотношений), т. е. $\mathbf{E}_{(2)} = \mathbf{h}_{(2)}$, $\mathbf{E}_{(2)} \equiv \mathbf{E} - \mathbf{E}_{(1)}$, поэтому $\mathbf{h}_{(1)} + \mathbf{h}_{(2)} = 0$, причем $\mathbf{m}_{(1)}$, $\mathbf{m}_{(2)}$, $\mathbf{h}_{(1)}$, $\mathbf{h}_{(2)}$ имеют онсагерову структуру (5.4), т. е. линейно выражаются через интегрирующие множители q_γ .

Из (5.6)–(5.8) следует

$$\mathbf{S} = \Theta; \quad (5.9)$$

$$\Theta = - \left\{ \frac{1}{T_{(1)}} \left(\Gamma_{(1)} - \frac{v_{(1)}^2}{2} \right) - \frac{1}{T_{(2)}} \left(\Gamma_{(2)} - \frac{v_{(2)}^2}{2} \right) \right\} \mathbf{m}_{(1)} - \\ - \left\{ \frac{v_{(1)}^j}{T_{(1)}} - \frac{v_{(2)}^j}{T_{(2)}} \right\} \mathbf{f}_{(1)}^j + \left\{ \frac{1}{T_{(1)}} - \frac{1}{T_{(2)}} \right\} \mathbf{h}_{(1)} - \frac{\zeta}{T_{(2)}} \mathbf{1}. \quad (5.10)$$

Рассмотрим последовательно различные элементарные процессы.

6. Теплообмен. Возьмем $\mathbf{m}_{(1)} = 0$, $\mathbf{f}_{(1)}^j = 0$, $\mathbf{1} = 0$. В силу условий симметрии a (см. п. 5) имеется единственная возможность $\mathbf{h}_{(1)} \sim \{1/T_{(1)} - 1/T_{(2)}\}$, так что

$$\mathbf{h}_{(1)} \equiv -na\Delta T, \quad \Delta T \equiv T_{(1)} - T_{(2)}. \quad (6.1)$$

Онсагера матрица диагональна и, согласно (5.9), (5.10),

$$\Theta = \frac{na}{T_{(1)}T_{(2)}} (\Delta T)^2, \quad (\Theta \geq 0) \Leftrightarrow a \geq 0. \quad (6.2)$$

7. Трение между компонентами. При выводе выражения (1.3) для $K_{\text{воз}}$ предполагалось, что течение в окрестности пузырька потенциальное. Поэтому вводить трение между компонентами в модели п. 3 физически неестественно. Но можно рассмотреть класс моделей для разных типов локальных течений, и нижеследующее будет справедливо, если структура интегрирующих множителей, т. е. структура (5.9), (5.10), останется прежней.

Линейное трение характеризуется условиями $\mathbf{m}_{(1)} = 0$, $\mathbf{1} = 0$,

$$\mathbf{f}_{(1)}^j \equiv -n\lambda(v_{(1)}^j - v_{(2)}^j) \equiv -n\lambda w^j. \quad (7.1a)$$

Полагая $v \equiv (1-\varkappa)v_{(1)} + \varkappa v_{(2)}$, $\varkappa \equiv \rho''/\rho$, $1-\varkappa = \rho'/\rho$, $\rho \equiv \rho' + \rho''$, $1/T \equiv \varkappa/T_{(1)} + (1-\varkappa)/T_{(2)}$, имеем

$$\left\{ -\frac{v_{(1)}}{T_{(1)}} + \frac{v_{(2)}}{T_{(2)}} \right\} = -\frac{1}{T} w - \left\{ \frac{1}{T_{(1)}} - \frac{1}{T_{(2)}} \right\} v. \quad (7.2)$$

Возьмем

$$\mathbf{h}_{(1)} \equiv -n\lambda(v | w). \quad (7.16)$$

С учетом (7.2) получим

$$\mathbf{f}_{(1)}^j = n\lambda T \left\{ -\frac{v_{(1)}^j}{T_{(1)}} + \frac{v_{(2)}^j}{T_{(2)}} \right\} + n\lambda T v^j \left\{ \frac{1}{T_{(1)}} - \frac{1}{T_{(2)}} \right\},$$

$$\mathbf{h}_{(1)} = n\lambda T v^j \left\{ -\frac{v_{(1)}^j}{T_{(1)}} + \frac{v_{(2)}^j}{T_{(2)}} \right\} + n\lambda T v^2 \left\{ \frac{1}{T_{(1)}} - \frac{1}{T_{(2)}} \right\}.$$

Итак, онсагерова матрица симметрична, имеет ранг 1, но не диагональна. Далее находим

$$\Theta = n\lambda w^2 / T, \quad (\Theta \geq 0) \Rightarrow (\lambda \geq 0). \quad (7.3)$$

В какой мере принятое выражение (7.16) для h определено однозначно? Пусть

$$\mathbf{h}_{(1)} \equiv -n\lambda(v | w) + \mathbf{h}_0. \quad (7.4)$$

Из (7.1a), (7.4) и условия симметрии следует

$$\mathbf{h}_0 = z \left\{ \frac{1}{T_{(1)}} - \frac{1}{T_{(2)}} \right\}; \quad (7.5)$$

$$\Theta = \frac{n\lambda}{T} w^2 + \frac{z}{(T_{(1)}T_{(2)})^2} \Delta T^2. \quad (7.6)$$

Сравнивая (7.4)–(7.6) с (6.1), (6.2), (7.16), (7.3), видим, что выражения (7.1a), (7.4), (7.5) при $z \neq 0$ описывают сразу два элементарных процесса: трение и теплообмен, причем онсагерова матрица имеет ранг 2.

8. Образование новых пузырьков. Если появилось 1 новых пузырьков того же сорта, что и рассматриваемые, т. е. обладающие той же массой, скоростью и т. д., то соответственно масса, импульс и энергия пузырькового компонента увеличиваются, а несущей среды — уменьшаются. Поскольку суммарные масса, импульс и энергия при этом сохраняются, то уравнения (5.6) остаются в силе и, следовательно,

$$\mathbf{m}_{(1)} = -\mu \mathbf{l}, \quad \mu \equiv \frac{4}{3} \pi R^3 \rho_{(2)}; \quad (8.1a)$$

$$\mathbf{f}_{(1)}^j = \mu v_{(2)}^j \mathbf{l}; \quad (8.1b)$$

$$\mathbf{h}_{(1)} = -A \mathbf{l}; \quad (8.1b)$$

$$\mathbf{N} = \mathbf{l}, \quad (8.1r)$$

где для упрощенной модели п. 4 $A = (\varepsilon_2 + v_{(2)}^2/2)\mu + (4/3)\pi R^3 \rho_{(1)}(3/2)R^2 + 4\pi R^2 \sigma$.

В соответствии с (5.4) \mathbf{l} имеет онсагерову структуру ($\mathbf{l} = A^\gamma q_\gamma$), где q_γ — интегрирующие множители. Из (8.1) и условий симметрии онсагеровой матрицы следует

$$\mathbf{l} = -\zeta \Delta K; \quad (8.2)$$

$$\Delta K = \left[\frac{\Delta e}{T_{(1)}} - \Delta s + \frac{1}{T_{(2)}} P \Delta \frac{1}{\rho} \right] - \frac{1}{T_{(1)}} \frac{w^2}{2}, \quad (8.3)$$

где $\Delta e \equiv e_{(1)} - e_{(2)}$; $\Delta s \equiv s_{(1)} - s_{(2)}$; $\Delta(1/\rho) = 1/\rho_{(1)} - 1/\rho_{(2)}$; $e_{(1)} \equiv \varepsilon_{(1)}$; $e_{(2)} \equiv \varepsilon_{(2)} + (K_{\text{воз}} + \varepsilon_{\text{пов}})/\rho''$.

Очевидно, что $e_{(2)}$ можно рассматривать как полную «внутреннюю» энергию, вычисленную с учетом создаваемых пузырьками возмущений и энергии поверхностного натяжения.

Представляет интерес сопоставление (8.3) с классической дифференциальной формой Гиббса для равновесной термодинамики:

$$T ds = d\varepsilon + Pd(1/\rho),$$

откуда

$$\left[\frac{d\varepsilon}{T} - ds + \frac{1}{T} Pd\frac{1}{\rho} \right] = 0. \quad (8.4)$$

Выражения в квадратных скобках в (8.3) и (8.4) построены аналогично с поправкой в (8.3) на конечные разности и двухтемпературность. Условие диссипативности, как и раньше, дает $\zeta \geq 0$.

Представляется, что ζ существенно зависит от знака ΔK . В простейшем варианте можно брать

$$\zeta \equiv \begin{cases} \zeta_+ > 0, & \text{если } \Delta K > 0, \\ 0, & \text{если } \Delta K \leq 0. \end{cases}$$

Если $\Delta K < 0$ и $\zeta > 0$, то пузырьки рассматриваемого сорта исчезают (оказываются термодинамически неустойчивыми). Реально это означает скорее всего, что такие пузырьки разрушаются. Более полное и корректное описание этого явления возможно в феноменологической модели, включающей несколько разных сортов пузырьков, а в остальном построенной аналогично данной.

В соответствии с моделью п. 3 для 1 получается несколько более громоздкое выражение, но в общем построенное аналогично (8.2), (8.3).

9. Испарение и конденсация. До сих пор принципы онсагерового формализма в сочетании с простыми и естественными физическими соображениями определяли для элементарного процесса обменные члены в уравнениях (5.7), (5.8) однозначно с точностью до одного неотрицательного коэффициента (последний на феноменологическом уровне рассуждений принципиально не определим и должен находиться из эксперимента). В случае испарения ситуация иная. Здесь, вообще говоря, можно делать разные гипотезы, задающие элементарный процесс, и заранее трудно сказать, какая из них наиболее точна. Ниже сформулирована, вероятно, простейшая гипотеза, состоящая в том, что в рассматриваемом процессе меняется только масса пузырька, а остальные его характеристики меняются несущественно (гипотеза *квазистационарности*). Более конкретно гипотеза состоит в следующем (ср. с (8.1)):

$$\mathbf{M}_{(1)} = \mathbf{m}_{(1)}, \quad \mathbf{M}_{(2)} = \mathbf{m}_{(2)} = -\mathbf{m}_{(1)}; \quad (9.1a)$$

$$\mathbf{f}_{(1)}^j = -v_{(2)}^j \mathbf{m}_{(2)} = v_{(2)}^j \mathbf{m}_{(1)}; \quad (9.1b)$$

$$\mathbf{h}_{(1)} = \left(\varepsilon_{(2)} + \frac{v_{(2)}^i}{2} \right) \mathbf{m}_{(1)}; \quad (9.1b)$$

$$\mathbf{N} = 0. \quad (9.1\Gamma)$$

Здесь $\mathbf{m}_{(1)}$ имеет онсагерову структуру (5.4), где a_γ — интегрирующие множители, входящие в (5.10) (или в (3.9), (4.7) для полной и упрощенной систем соответственно). Условие симметрии онсагеровой матрицы приводит к выражению

$$\mathbf{m}_{(1)} = -n \mathbf{x} \Delta G, \quad (9.2)$$

где

$$\Delta G \equiv \frac{1}{T_{(1)}} \left(\Delta \varepsilon - \frac{w^2}{2} \right) - \Delta s + \frac{1}{T_{(2)}} \left(\frac{P}{\rho_{(1)}} - \frac{P}{\rho_{(2)}} \right); \quad \Delta \varepsilon \equiv \varepsilon_{(1)} - \varepsilon_{(2)}; \quad \Delta s \equiv s_{(1)} - s_{(2)}.$$

Представляется, что \varkappa существенно зависит от знака ΔG .

В однотемпературном ($T_{(1)} \sim T_{(2)} \sim T$) и односкоростном ($w \sim 0$) пределе $\gamma_{(1)} \sim \varepsilon_{(1)} - Ts_{(1)} + P/\rho_{(1)}$, $\gamma_{(2)} \sim \varepsilon_{(2)} - Ts_{(2)} + p_{(2)}/\rho_{(2)}$, и из (9.2) для скорости фазового перехода получается естественное выражение $m \sim -n\varkappa \Delta \gamma / T$ ($\Delta \gamma \equiv \gamma_{(1)} - \gamma_{(2)}$).

Из (5.9), (5.10), (9.1), (9.2) следует $\Theta = n\varkappa(\Delta G)^2$, $\Theta \geq 0 \Leftrightarrow \varkappa \geq 0$. Для упрощенной модели п. 4 берутся тоже выражения (9.1), (9.2).

Разумеется, в этом пункте, как и в п. 8, предполагается, что несущая среда и пузырьки образованы одним веществом, которое может находиться в двух состояниях — жидком (несущая среда) и парообразном (пузырьки), так что испарение и конденсация имеют смысл фазового перехода.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 96-01-01641).

ЛИТЕРАТУРА

1. Бердичевский В. Л. Уравнения механики жидкости с частицами // Проблемы осреднения и построения континуальных моделей в механике сплошной среды. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1980.
2. Бердичевский В. Л. Вариационные принципы механики сплошной среды. М.: Наука, 1983.
3. Нигматулин Р. И. Динамика многофазных сред. М.: Наука, 1987. Ч. 1, 2.
4. Шугрин С. М. Диссипативная двухскоростная гидродинамика // ПМТФ. 1994. Т. 35, № 4. С. 59–68.
5. Годунов С. К. Интересный класс квазилинейных систем // Докл. АН СССР. 1961. Т. 139, № 3. С. 521–523.
6. Шугрин С. М. Об уравнениях диссипативной лоренцевой гидродинамики // Динамика сплошной среды: Сб. науч. тр. / АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т гидродинамики. 1990. Вып. 96.
7. Гаврилюк С. Л., Шугрин С. М. Среды с уравнениями состояния, зависящими от производных // ПМТФ. 1996. Т. 37, № 2. С. 35–49.
8. Олвер П. Приложение групп Ли к дифференциальным уравнениям. М.: Мир, 1989.
9. Шугрин С. М. Двухскоростная гидродинамика и термодинамика // ПМТФ. 1994. Т. 35, № 4. С. 41–59.

Поступила в редакцию 29/VII 1996 г.