

**ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ ПЛОСКИХ ЗАДАЧ  
ДЛЯ ИДЕАЛЬНЫХ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКИХ  
НЕОДНОРОДНЫХ ТЕЛ**

УДК 539.214;539.374

Т. Л. Захарова, Д. Д. Ивлев

Чувашский государственный педагогический институт им. И. Я. Яковлева,  
428000 Чебоксары

Теории пластичности неоднородных тел посвящены монографии [1, 2], в которых приведена соответствующая библиография. В настоящей работе алгоритм последовательных приближений для определения напряженного и деформированного состояния тел из идеального упругопластического материала, развитый в [3], распространяется на случай неоднородных тел.

Условие пластичности Мизеса для неоднородных тел формулируется как предельное значение энергии упругого формоизменения. В качестве примера рассмотрено двусное растяжение толстой плиты, ослабленной круговым отверстием.

1. Потенциал деформаций для упругого изотропного несжимаемого тела для плоской задачи запишем в виде [4]

$$W = \frac{1}{8G} [(\sigma_\rho - \sigma_\theta)^2 + 4\tau_{\rho\theta}^2], \quad (1.1)$$

где  $W$  — упругий потенциал деформации;  $G$  — модуль сдвига;  $\sigma_\rho, \sigma_\theta, \tau_{\rho\theta}$  — компоненты напряжения в полярной системе координат  $\rho\theta$ . Величина  $W$ , очевидно, определяет энергию формоизменения материала.

Будем предполагать материал неоднородным:

$$G = G(\rho, \theta). \quad (1.2)$$

Согласно (1.1), получим

$$e_\rho^e = \frac{1}{4G}(\sigma_\rho - \sigma_\theta), \quad e_\theta^e = -e_\rho^e, \quad e_{\rho\theta}^e = \frac{1}{2G}\tau_{\rho\theta}. \quad (1.3)$$

Здесь  $e_\rho^e, e_\theta^e, e_{\rho\theta}^e$  — компоненты упругой деформации, удовлетворяющие условию совместности

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho^2 \frac{\partial e_\theta^e}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 e_\rho^e}{\partial \theta^2} - \frac{\partial e_\rho^e}{\partial \rho} - \frac{2}{\rho} \frac{\partial^2}{\partial \rho \partial \theta} (\rho e_{\rho\theta}^e). \quad (1.4)$$

Предположим [5], что пластическое состояние наступает при достижении энергией формоизменения (1.1) некоторого постоянного значения:

$$W = \frac{1}{8G} [(\sigma_\rho - \sigma_\theta)^2 + 4\tau_{\rho\theta}^2] = k^2, \quad k = \text{const}. \quad (1.5)$$

Соотношение (1.5), согласно (1.2), перепишем в виде

$$(\sigma_\rho - \sigma_\theta)^2 + 4\tau_{\rho\theta}^2 - 8k^2 G(\rho, \theta) = 0. \quad (1.6)$$

Согласно (1.6), предел текучести при растяжении  $\sigma_\rho = 2k\sqrt{2G(\rho)}, \sigma_\theta = \tau_{\rho\theta} = 0$  зависит от характера неоднородности.

Рассматривая выражение (1.6) в качестве пластического потенциала, получим

$$\varepsilon_{\rho}^p = \lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{\rho}}, \quad \varepsilon_{\theta}^p = \lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{\theta}}, \quad \varepsilon_{\rho\theta}^p = \frac{\lambda}{2} \frac{\partial f}{\partial \tau_{\rho\theta}}, \quad \lambda \geq 0,$$

где  $\varepsilon_{\rho}^p, \varepsilon_{\theta}^p, \varepsilon_{\rho\theta}^p$  — компоненты скорости пластической деформации. Представим выражение модуля (1.2) как

$$G(\rho, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \delta^n G_n(\rho, \theta), \quad G_0 = \text{const} \quad (1.7)$$

( $\delta$  — малый параметр).

Решение будем искать в виде разложений

$$\sigma_{ij} = \sum_{n=0}^{\infty} \delta^n \sigma_{ij}^{(n)}, \quad e_{ij} = \sum_{n=0}^{\infty} \delta^n e_{ij}^{(n)}, \quad \dots \quad (1.8)$$

Определим первое приближение. Из (1.6)–(1.8) имеем

$$\sigma_{\rho}^0 - \sigma_{\theta}^0 = 2\eta k \sqrt{2G_0}, \quad \sigma'_{\rho} - \sigma'_{\theta} = \eta k G_1 \sqrt{\frac{2}{G_0}}, \quad \eta = \text{sign}(\sigma_{\rho}^0 - \sigma_{\theta}^0), \quad (1.9)$$

где индекс нуль вверху относится к компонентам «невозмущенного» состояния, а штрих — к компонентам «возмущенного» состояния.

Уравнения равновесия

$$\frac{\partial \sigma'_{\rho}}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau'_{\rho\theta}}{\partial \theta} + \frac{\sigma'_{\rho} - \sigma'_{\theta}}{\rho} = \hat{u}, \quad \frac{\partial \tau'_{\rho\theta}}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma'_{\theta}}{\partial \theta} + \frac{2\tau'_{\rho\theta}}{\rho} = 0 \quad (1.10)$$

удовлетворим, полагая [3]

$$\sigma'_{\rho} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Phi'}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \Phi'}{\partial \theta^2}, \quad \sigma'_{\theta} = \frac{\partial^2 \Phi'}{\partial \rho^2}, \quad \tau'_{\rho\theta} = -\frac{\partial}{\partial \rho} \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Phi'}{\partial \theta} \right). \quad (1.11)$$

Из (1.9), (1.11) найдем

$$\frac{\partial^2 \Phi'}{\partial \rho^2} - \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \Phi'}{\partial \theta^2} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Phi'}{\partial \rho} = -\eta k \sqrt{\frac{2}{G_0}} G_1. \quad (1.12)$$

Общее решение уравнения (1.12) может быть записано как сумма решения однородного уравнения  $\Phi'_0$  и частного решения неоднородного уравнения  $\Phi'_1$ . Согласно [3],

$$\begin{aligned} \Phi'_0 = & H_{01} + \rho^2 H_{02} + \rho \cos \theta (H_{11} + H_{12} \ln \rho) + \\ & + \rho \sum_{m=2}^{\infty} [H_{m1} \cos(\sqrt{m^2 - 1} \ln \rho) + H_{m2} \sin(\sqrt{m^2 - 1} \ln \rho)] \cos m\theta. \end{aligned} \quad (1.13)$$

Представим  $G_1$  как разложение

$$G_1 = \sum_{m=0}^{\infty} f_m(\rho) \cos m\theta. \quad (1.14)$$

Частное решение уравнения (1.12) с правой частью (1.14) будем искать в виде

$$\Phi'_1 = \sum_{m=0}^{\infty} F_m(\rho) \cos m\theta. \quad (1.15)$$

Подставляя разложения (1.14), (1.15) в уравнение (1.12), имеем

$$F_m''(\rho) - \frac{1}{\rho} F_m'(\rho) + \frac{m^2}{\rho^2} F_m(\rho) = -\eta k \sqrt{\frac{2}{G_0}} f_m(\rho). \quad (1.16)$$

Из (1.16) следует

$$F_m(\rho) = \frac{\eta k}{\sqrt{2G_0}} \left[ \int \rho f_0(\rho) d\rho - \rho^2 \int \frac{f_0(\rho)}{\rho} d\rho \right] + \eta k \rho \sqrt{\frac{2}{G_0}} \left[ \int \ln \rho f_1(\rho) d\rho - \ln \rho \int f_1(\rho) d\rho \right] + \\ + \eta k \rho \sqrt{\frac{2}{G_0}} \sum_{m=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{m^2-1}} \left[ \cos(\sqrt{m^2-1} \ln \rho) \int f_m(\rho) \sin(\sqrt{m^2-1} \ln \rho) d\rho - \right. \\ \left. - \sin(\sqrt{m^2-1} \ln \rho) \int f_m(\rho) \cos(\sqrt{m^2-1} \ln \rho) d\rho \right].$$

Пользуясь общим решением уравнения (1.12), из (1.11) получим выражения для компонент напряжений в пластической области:

$$\sigma_{\rho}^{\prime p} = 2H_{02} - \eta k \sqrt{\frac{2}{G_0}} \int \frac{f_0(\rho)}{\rho} d\rho + \frac{\cos \theta}{\rho} \left[ H_{12} - \eta k \sqrt{\frac{2}{G_0}} \int f_1(\rho) d\rho \right] + \\ + \frac{1}{\rho} \sum_{m=2}^{\infty} [\cos(\sqrt{m^2-1} \ln \rho) ((1-m^2)H_{m1} + \sqrt{m^2-1}H_{m2}) + \\ + \sin(\sqrt{m^2-1} \ln \rho) (-\sqrt{m^2-1}H_{m1} + (1-m^2)H_{m2})] \cos m\theta - \\ - \eta k \sqrt{\frac{2}{G_0}} [\{\sqrt{m^2-1} \cos(\sqrt{m^2-1} \ln \rho) + \sin(\sqrt{m^2-1} \ln \rho)\} \int f_m(\rho) \sin(\sqrt{m^2-1} \ln \rho) d\rho - \\ - \{\sqrt{m^2-1} \sin(\sqrt{m^2-1} \ln \rho) - \cos(\sqrt{m^2-1} \ln \rho)\} \int f_m(\rho) \cos(\sqrt{m^2-1} \ln \rho) d\rho] \cos m\theta, \\ \sigma_{\theta}^{\prime p} = 2H_{02} - \eta k \sqrt{\frac{2}{G_0}} \left[ \int \frac{f_0(\rho)}{\rho} d\rho + f_0(\rho) \right] + \frac{\cos \theta}{\rho} \left[ H_{12} - \eta k \sqrt{\frac{2}{G_0}} \left( \int f_1(\rho) d\rho - \rho f_1(\rho) \right) \right] + \\ + \frac{1}{\rho} \sum_{m=2}^{\infty} [\cos(\sqrt{m^2-1} \ln \rho) ((1-m^2)H_{m1} + \sqrt{m^2-1}H_{m2}) + \sin(\sqrt{m^2-1} \ln \rho) (-\sqrt{m^2-1}H_{m1} + \\ + (1-m^2)H_{m2})] \cos m\theta - \eta k \sqrt{\frac{2}{G_0}} [\{\sqrt{m^2-1} \cos(\sqrt{m^2-1} \ln \rho) + \\ + \sin(\sqrt{m^2-1} \ln \rho)\} \int f_m(\rho) \sin(\sqrt{m^2-1} \ln \rho) d\rho - \{\sqrt{m^2-1} \sin(\sqrt{m^2-1} \ln \rho) - \\ - \cos(\sqrt{m^2-1} \ln \rho)\} \int f_m(\rho) \cos(\sqrt{m^2-1} \ln \rho) d\rho - \rho f_m(\rho)] \cos m\theta, \\ \tau_{\rho\theta}^{\prime p} = \frac{\sin \theta}{\rho} \left[ H_{12} - \eta k \sqrt{\frac{2}{G_0}} \int f_1(\rho) d\rho \right] + \frac{1}{\rho} \sum_{m=2}^{\infty} [m\sqrt{m^2-1} (-H_{m1} \sin(\sqrt{m^2-1} \ln \rho) + \\ + H_{m2} \cos(\sqrt{m^2-1} \ln \rho))] \sin m\theta - \eta k m \sqrt{\frac{2}{G_0}} \left[ \sin(\sqrt{m^2-1} \ln \rho) \int f_m(\rho) \sin(\sqrt{m^2-1} \ln \rho) d\rho + \right. \\ \left. + \cos(\sqrt{m^2-1} \ln \rho) \int f_m(\rho) \cos(\sqrt{m^2-1} \ln \rho) d\rho \right] \sin m\theta. \quad (1.17)$$

Напряжения в упругой области находятся из неоднородного бигармонического уравнения

$$\nabla\nabla\Phi' = \eta\Psi(\rho, \theta), \quad (1.18)$$

где правая часть, согласно (1.3), (1.4), (1.7), (1.8), определяется следующим образом:

$$\begin{aligned} \Psi = & \frac{\rho^4(\sigma_\theta^0 - \sigma_\rho^0)}{G_0} \frac{\partial^2 G_1}{\partial \rho^2} - \frac{\rho^2(\sigma_\theta^0 - \sigma_\rho^0)}{G_0} \frac{\partial^2 G_1}{\partial \theta^2} + \frac{\rho^4 G_1}{G_0} \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} (\sigma_\theta^0 - \sigma_\rho^0) + \\ & + \left[ \frac{2\rho^4}{G_0} \frac{\partial G_1}{\partial \rho} + \frac{3\rho^3 G_1}{G_0} \right] \frac{\partial}{\partial \rho} (\sigma_\theta^0 - \sigma_\rho^0) + \frac{3\rho^3(\sigma_\theta^0 - \sigma_\rho^0)}{G_0} \frac{\partial G_1}{\partial \rho}. \end{aligned} \quad (1.19)$$

Представим  $\Psi$  в виде разложения

$$\Psi = \sum_{m=0}^{\infty} \Psi_m(\rho) \cos m\theta. \quad (1.20)$$

Решение однородного уравнения (1.18) известно [4]. Частное решение уравнения (1.18) находится аналогично (1.15). Используя общее решение (1.18) и замену (1.11), получим выражения для компонент напряжений в упругой области:

$$\begin{aligned} \sigma_\rho^e = & 2C_{01} + (2\ln \rho + 1)C_{02} + \frac{1}{\rho^2}C_{04} + \frac{\eta}{4} \left[ - \int \rho \Psi_0(\rho) d\rho - 2 \int \rho \ln \rho \Psi_0(\rho) d\rho + \right. \\ & + 2 \ln \rho \int \rho \Psi_0(\rho) d\rho + \left. \frac{1}{\rho^2} \int \rho^3 \Psi_0(\rho) d\rho \right] + \left\{ 2\rho C_{11} - \frac{2}{\rho^3} C_{12} + \frac{1}{\rho} C_{14} \right\} \cos \theta + \\ & + \frac{\eta}{4} \left[ \frac{\rho}{2} \int \Psi_1(\rho) d\rho - \frac{1}{\rho} \int \rho^2 \Psi_1(\rho) d\rho + \frac{1}{2\rho^3} \int \rho^4 \Psi_1(\rho) d\rho \right] \cos \theta + \\ & + \sum_{m=2}^{\infty} \left\{ -m(m-1)\rho^{m-2} C_{m1} - m(m+1)\rho^{-m-2} C_{m2} - \right. \\ & - (m+1)(m-2)\rho^m C_{m3} - (m+2)(m-1)\rho^{-m} C_{m4} \left. \right\} \cos m\theta + \\ & + \frac{\eta}{8m} \left[ m\rho^{m-2} \int \rho^{-m+1} \Psi_m(\rho) d\rho + m\rho^{-m-2} \int \rho^{m+1} \Psi_m(\rho) d\rho - \right. \\ & \left. - (m-2)\rho^m \int \rho^{-m-1} \Psi_m(\rho) d\rho - (m+2)\rho^{-m} \int \rho^{m-1} \Psi_m(\rho) d\rho \right] \cos m\theta, \end{aligned}$$

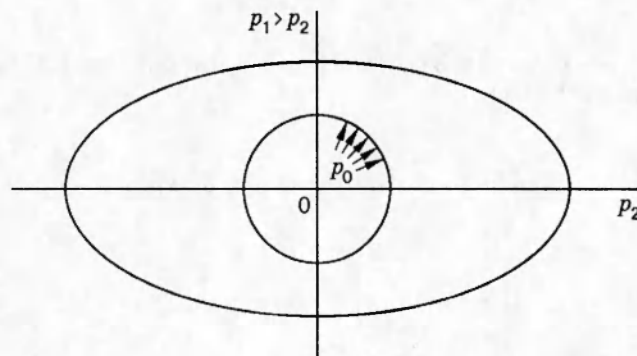
$$\begin{aligned} \sigma_\theta^e = & 2C_{01} + (2\ln \rho + 3)C_{02} - \frac{1}{\rho^2}C_{04} + \frac{\eta}{4} \left[ \int \rho \Psi_0(\rho) d\rho - 2 \int \rho \ln \rho \Psi_0(\rho) d\rho + \right. \\ & + 2 \ln \rho \int \rho \Psi_0(\rho) d\rho - \left. \frac{1}{\rho^2} \int \rho^3 \Psi_0(\rho) d\rho \right] + \left\{ 6\rho C_{11} + \frac{2}{\rho^3} C_{12} + \frac{1}{\rho} C_{14} \right\} \cos \theta + \\ & + \frac{\eta}{4} \left[ \frac{3\rho}{2} \int \Psi_1(\rho) d\rho - \frac{1}{\rho} \int \rho^2 \Psi_1(\rho) d\rho - \frac{1}{2\rho^3} \int \rho^4 \Psi_1(\rho) d\rho \right] \cos \theta + \\ & + \sum_{m=2}^{\infty} \left\{ m(m-1)\rho^{m-2} C_{m1} + m(m+1)\rho^{-m-2} C_{m2} + \right. \\ & + (m+1)(m+2)\rho^m C_{m3} + (-m+1)(-m+2)\rho^{-m} C_{m4} \left. \right\} \cos m\theta + \\ & + \frac{\eta}{8m} \left[ -m\rho^{m-2} \int \rho^{-m+1} \Psi_m(\rho) d\rho - m\rho^{-m-2} \int \rho^{m+1} \Psi_m(\rho) d\rho + \right. \end{aligned} \quad (1.21)$$

$$\begin{aligned}
 & + (m+2)\rho^m \int \rho^{-m-1} \Psi_m(\rho) d\rho - (-m+2)\rho^{-m} \int \rho^{m-1} \Psi_m(\rho) d\rho \Big] \cos m\theta, \\
 \tau_{\rho\theta}^{te} = & \left\{ 2\rho C_{11} - \frac{2}{\rho^3} C_{12} + \frac{1}{\rho} C_{14} \right\} \sin \theta + \frac{\eta}{4} \left[ \frac{\rho}{2} \int \Psi_1(\rho) d\rho - \frac{1}{\rho} \int \rho^2 \Psi_1(\rho) d\rho + \right. \\
 & \left. + \frac{1}{2\rho^3} \int \rho^4 \Psi_1(\rho) d\rho \right] \sin \theta + \sum_{m=2}^{\infty} \{ m(m-1)\rho^{m-2} C_{m1} - m(m+1)\rho^{-m-2} C_{m2} + \\
 & + m(m+1)\rho^m C_{m3} - m(m-1)\rho^{-m} C_{m4} \} \sin m\theta + \frac{\eta}{8} \left[ -\rho^{m-2} \int \rho^{-m+1} \Psi_m(\rho) d\rho + \right. \\
 & \left. + \rho^{-m-2} \int \rho^{m+1} \Psi_m(\rho) d\rho + \rho^m \int \rho^{-m-1} \Psi_m(\rho) d\rho - \rho^{-m} \int \rho^{m-1} \Psi_m(\rho) d\rho \right] \sin m\theta.
 \end{aligned}$$

Радиус пластичности определяется из условия сопряжения [3]

$$\left[ \sigma'_\theta + \frac{d\sigma_\theta^0}{d\rho} \rho'_s \right] = 0 \quad \text{при} \quad \rho = 1. \quad (1.22)$$

2. Рассмотрим бесконечную плоскость с круговым отверстием радиуса  $a$ , которая растягивается на бесконечности двумя взаимно перпендикулярными усилиями  $p_1$ ,  $p_2$ , причем на контуре отверстия действует нормальное давление  $p_0$  (см. рисунок). Для изотропного идеального упругопластического тела эта задача была рассмотрена в [6].



Методом малого параметра определим решение вблизи некоторого «невозмущенного» состояния. В качестве параметра примем величину  $\delta = (p_1 - p_2)/2k$ .

В дальнейшем все величины, имеющие размерность напряжения, отнесем к пределу текучести  $k$ , а величины, имеющие размерность длины, — к радиусу пластической зоны «невозмущенного» состояния  $r_{0s}$ . Обозначим  $\sigma_\rho = \sigma_r/k$ ,  $\tau_{\rho\theta} = \tau_{r\theta}/k$ ,  $\rho = r/r_{0s}$ ,  $\alpha = a/r_{0s}$ ,  $q_i = p_i/k$ ,  $i = 0, 1, 2$ . Для безразмерных величин  $\sigma_\theta/k$ ,  $G/k$  сохраним прежние обозначения  $\sigma_\theta$ ,  $G$ .

Пластина находится в упругопластическом состоянии при  $0 \leq \delta < 1$ . Требуется определить напряженно-деформированное состояние пластины и границу между упругой и пластической областями.

Согласно [3], линеаризованные граничные условия на бесконечности имеют вид

$$\sigma_\rho^{\infty e} = q - \delta \cos 2\theta, \quad \sigma_\theta^{\infty e} = q + \delta \cos 2\theta, \quad \tau_{\rho\theta}^{\infty e} = \delta \sin 2\theta, \quad q = (q_1 + q_2)/2; \quad (2.1)$$

на контуре отверстия

$$\sigma_\rho^p = -q_0, \quad \tau_{\rho\theta}^p = 0 \quad \text{при} \quad \rho = \alpha. \quad (2.2)$$

Рассмотрим нулевое приближение — предельный случай, когда  $\delta = 0$ . В качестве «не-

возмущенного» состояния выбирается осесимметричное состояние пластины с отверстием радиуса  $a$ , на контуре которого действует нормальное давление  $p_0$ , а на бесконечности — равномерное давление  $p = p_1 = p_2$ . Решение этой упругопластической задачи известно [3]:

$$\sigma_\rho^{0p} = -q_0 + 2\eta \ln(\rho/\alpha), \quad \sigma_\theta^{0p} = -q_0 + 2\eta[1 + \ln(\rho/\alpha)], \quad \tau_{\rho\theta}^{0p} = 0; \quad (2.3)$$

$$\sigma_\rho^{0e} = q - \eta/\rho^2, \quad \sigma_\theta^{0e} = q + \eta/\rho^2, \quad \tau_{\rho\theta}^{0e} = 0. \quad (2.4)$$

При этом граница между упругой и пластической зонами будет представлять собой окружность радиуса  $r_{0s} = a \exp[(|q_0 - q| - 1)/2]$ . Пластические и упругие решения в общем виде определены формулами (1.17), (1.21).

На контуре отверстия имеем

$$\sigma_\rho^{ip} = \tau_{\rho\theta}^{ip} = 0 \quad \text{при} \quad \rho = \alpha. \quad (2.5)$$

Условия сопряжения, согласно [3], примут вид

$$\sigma_\rho^{ip} = \sigma_\rho^{ie}, \quad \tau_{\rho\theta}^{ip} = \tau_{\rho\theta}^{ie} \quad \text{при} \quad \rho = 1. \quad (2.6)$$

На бесконечности, согласно (2.1),

$$\sigma_\rho^{ie} = -\delta \cos 2\theta, \quad \tau_{\rho\theta}^{ie} = \delta \sin 2\theta \quad \text{при} \quad \rho = \infty. \quad (2.7)$$

Удовлетворяя условиям (2.5)–(2.7), из (1.17), (1.21) получим выражения для компонент напряжений в пластической зоне:

$$\begin{aligned} \sigma_\rho^{ip} &= -\sqrt{\frac{2}{G_0}} \int_\alpha^\rho \frac{f_0(\rho)}{\rho} d\rho - \frac{1}{\rho} \sqrt{\frac{2}{G_0}} \left[ (\sqrt{3} \cos(\sqrt{3} \ln \rho) + \sin(\sqrt{3} \ln \rho)) \int_\alpha^\rho f_2(\rho) \sin(\sqrt{3} \ln \rho) d\rho - \right. \\ &\quad \left. - (\sqrt{3} \sin(\sqrt{3} \ln \rho) - \cos(\sqrt{3} \ln \rho)) \int_\alpha^\rho f_2(\rho) \cos(\sqrt{3} \ln \rho) d\rho \right] \cos 2\theta, \\ \sigma_\theta^{ip} &= -\sqrt{\frac{2}{G_0}} \left[ \int_\alpha^\rho \frac{f_0(\rho)}{\rho} d\rho + f_0(\rho) \right] - \frac{1}{\rho} \sqrt{\frac{2}{G_0}} \left[ (\sqrt{3} \cos(\sqrt{3} \ln \rho) + \right. \\ &\quad \left. + \sin(\sqrt{3} \ln \rho)) \int_\alpha^\rho f_2(\rho) \sin(\sqrt{3} \ln \rho) d\rho - \right. \\ &\quad \left. - (\sqrt{3} \sin(\sqrt{3} \ln \rho) - \cos(\sqrt{3} \ln \rho)) \int_\alpha^\rho f_2(\rho) \cos(\sqrt{3} \ln \rho) d\rho + \rho f_2(\rho) \right] \cos 2\theta, \\ \tau_{\rho\theta}^{ip} &= -\frac{2}{\rho} \sqrt{\frac{2}{G_0}} \left[ \sin(\sqrt{3} \ln \rho) \int_\alpha^\rho f_2(\rho) \sin(\sqrt{3} \ln \rho) d\rho + \cos(\sqrt{3} \ln \rho) \int_\alpha^\rho f_2(\rho) \cos(\sqrt{3} \ln \rho) d\rho \right] \sin 2\theta. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Выражения для компонент напряжений в упругой зоне имеют вид

$$\begin{aligned} \sigma_\rho^{ie} &= \frac{C_{04}}{\rho^2} + \frac{1}{4} \left[ - \int_\infty^\rho (\rho + 2\rho \ln \rho) \Psi_0(\rho) d\rho + 2 \ln \rho \int_\infty^\rho \rho \Psi_0(\rho) d\rho + \frac{1}{\rho^2} \int_\infty^\rho \rho^3 \Psi_0(\rho) d\rho \right] + \\ &\quad + \left( -1 - \frac{6}{\rho^4} C_{22} - \frac{4}{\rho^2} C_{24} + \frac{1}{8} \left[ \int_\infty^\rho \frac{\bar{\Psi}_2(\rho)}{\rho} d\rho + \frac{1}{\rho^4} \int_\infty^\rho \rho^3 \Psi_2(\rho) d\rho - \frac{2}{\rho^2} \int_\infty^\rho \rho \Psi_2(\rho) d\rho \right] \right) \cos 2\theta, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{\theta}^{\prime e} = & -\frac{C_{04}}{\rho^2} + \frac{1}{4} \left[ \int_{\infty}^{\rho} (\rho - 2\rho \ln \rho) \Psi_0(\rho) d\rho + 2 \ln \rho \int_{\infty}^{\rho} \rho \Psi_0(\rho) d\rho - \frac{1}{\rho^2} \int_{\infty}^{\rho} \rho^3 \Psi_0(\rho) d\rho \right] + \\ & + \left( 1 + \frac{6}{\rho^4} C_{22} + \frac{1}{8} \left[ - \int_{\infty}^{\rho} \frac{\Psi_2(\rho)}{\rho} d\rho - \frac{1}{\rho^4} \int_{\infty}^{\rho} \rho^3 \Psi_2(\rho) d\rho + 2\rho^2 \int_{\infty}^{\rho} \frac{\Psi_2(\rho)}{\rho^3} d\rho \right] \right) \cos 2\theta, \\ \tau_{\rho\theta}^{\prime e} = & \left( 1 - \frac{6}{\rho^4} C_{22} - \frac{2}{\rho^2} C_{24} + \frac{1}{8} \left[ - \int_{\infty}^{\rho} \frac{\Psi_2(\rho)}{\rho} d\rho + \frac{1}{\rho^4} \int_{\infty}^{\rho} \rho^3 \Psi_2(\rho) d\rho + \right. \right. \\ & \left. \left. + \rho^2 \int_{\infty}^{\rho} \frac{\Psi_2(\rho)}{\rho^3} d\rho - \frac{1}{\rho^2} \int_{\infty}^{\rho} \rho \Psi_2(\rho) d\rho \right] \right) \sin 2\theta, \quad (2.9) \end{aligned}$$

$$C_{04} = -\sqrt{\frac{2}{G_0}} \int_{\alpha}^1 \frac{f_0(\rho)}{\rho} d\rho + \frac{1}{4} \int_1^{\infty} (\rho^3 - \rho - 2\rho \ln \rho) \Psi_0(\rho) d\rho,$$

$$\begin{aligned} C_{22} = \frac{1}{2} + \frac{1}{48} \int_1^{\infty} \left( \frac{3}{\rho} - \rho^3 - \frac{2}{\rho^3} \right) \Psi_2(\rho) d\rho - \frac{1}{\sqrt{6G_0}} \int_{\alpha}^1 f_2(\rho) \sin(\sqrt{3} \ln \rho) d\rho + \\ + \frac{1}{\sqrt{2G_0}} \int_{\alpha}^1 f_2(\rho) \cos(\sqrt{3} \ln \rho) d\rho, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_{24} = -1 + \frac{1}{16} \int_1^{\infty} \left( \rho + \frac{1}{\rho^3} - \frac{2}{\rho} \right) \Psi_2(\rho) d\rho + \sqrt{\frac{3}{2G_0}} \int_{\alpha}^1 f_2(\rho) \sin(\sqrt{3} \ln \rho) d\rho - \\ - \frac{1}{\sqrt{2G_0}} \int_{\alpha}^1 f_2(\rho) \cos(\sqrt{3} \ln \rho) d\rho. \end{aligned}$$

Из (2.3), (2.4), (2.8), (2.9) и условия сопряжения (1.22) найдем радиус пластической зоны

$$\begin{aligned} \rho_s' = \frac{1}{\sqrt{2G_0}} \int_{\alpha}^1 \frac{f_0(\rho)}{\rho} d\rho + \frac{1}{4} \int_1^{\infty} \rho \ln \rho \Psi_0(\rho) d\rho + \frac{1}{4} f_0(1) + \left[ 1 + \frac{1}{32} \int_1^{\infty} \left( \frac{4}{\rho} - \frac{3}{\rho^3} \right) \Psi_2(\rho) d\rho + \right. \\ \left. + \frac{1}{\sqrt{2G_0}} \int_{\alpha}^1 f_2(\rho) \cos(\sqrt{3} \ln \rho) d\rho + \frac{1}{4} f_2(1) \right] \cos 2\theta. \quad (2.10) \end{aligned}$$

Частный характер неоднородности запишем в виде

$$G_1 = \frac{A}{\rho^5} + \frac{B}{\rho^5} \cos 2\theta, \quad A, B = \text{const}, \quad (2.11)$$

где  $G_1$ ,  $A$ ,  $B$  отнесены к пределу текучести  $k$ . Характер поведения неоднородности (2.11) определен из условия сходимости интегралов (2.8)–(2.10). Неоднородность может быть произвольной до конечного предела  $\rho_0$  ( $\rho < \rho_0$ ). В случае задания неоднородности в виде (2.11), согласно (1.14), (1.19), (1.20), (2.10), (2.11), выражение для радиуса пластической

зоны примет вид

$$\rho'_s = \frac{A}{4} - \frac{A}{10} \sqrt{\frac{2}{G_0}} + \frac{35A}{18G_0} + \frac{A}{10\alpha^5} + \left[ 1 + \frac{B}{4} - \frac{2B}{19} \sqrt{\frac{2}{G_0}} + \frac{507B}{560G_0} + \frac{B}{38\alpha^4} \sqrt{\frac{2}{G_0}} (4 \cos(\sqrt{3} \ln \alpha) - \sqrt{3} \sin(\sqrt{3} \ln \alpha)) \right] \cos 2\theta. \quad (2.12)$$

Из (2.12) следует, что влияние неоднородности, характеризуемой величинами  $A, B$  в (2.11), зависит от модуля сдвига  $G_0$  и параметра радиуса  $\alpha$ . Причем, чем меньше  $G_0, \alpha$ , тем больше  $\rho'_s$ . При  $A = B = 0$  имеют место результаты [3].

Отметим, что неоднородность материала приводит к изменениям напряженного состояния как в пластической (2.8), так и в упругой зоне (2.9). Перемещения можно определить по [3, 7], а пространственное состояние — по [8].

#### ЛИТЕРАТУРА

1. **Ольшак В., Рыхлевский Я., Урбановский В.** Теория пластичности неоднородных тел. М.: Мир, 1964.
2. **Григорьев О. Д.** Некоторые задачи теории пластичности неоднородных тел. Новосибирск: НИИВТ, 1969.
3. **Ивлев Д. Д., Ершов Л. В.** Метод возмущений в теории упругопластического тела. М.: Наука, 1978.
4. **Филоненко-Бородич М. М.** Теория упругости. М.: Гостехтеоретиздат, 1947.
5. **Ильюшин А. А.** Пластичность. М.: Гостехтеоретиздат, 1948.
6. **Галин Л. А.** Упругопластические задачи. М.: Наука, 1984.
7. **Остросаблин Н. И.** Плоское упругопластическое распределение напряжений около круговых отверстий. Новосибирск: Наука, 1983.
8. **Аннин Б. Д., Черепанов Г. П.** Упругопластическая задача. Новосибирск: Наука, 1983.

*Поступила в редакцию 19/IX 1995 г.,  
в окончательном варианте — 11/I 1996 г.*