

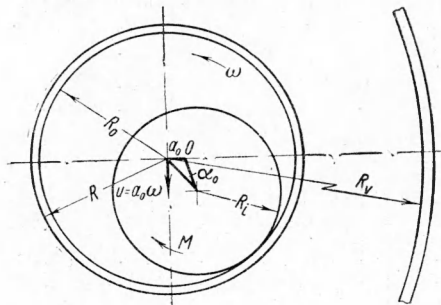
## О ВЗАИМОДЕЙСТВИИ ВИБРАТОРА С ОГРАНИЧЕННОЙ ЖИДКОЙ СРЕДОЙ

И. А. Кунин, В. Ф. Хон

(Новосибирск)

В работе [1] решена задача о взаимодействии вибратора с неограниченной вязкой сжимаемой жидкостью. В настоящей статье рассматривается вибратор, находящийся в центре ванны конечных размеров. Выяснено влияние условий отражения волн от стенок на характеристики вибратора. Исследованы резонансные явления.

1. Будем для определенности рассматривать планетарный вибратор, однако результаты с несущественными изменениями применимы и к другим вибраторам, например, дебалансного типа. Исходная схема представлена на фиг. 1. Вибратор расположен в центре ванны, заполненной вязкой сжимаемой жидкостью. Под действием постоянного вращающего момента  $M$ , приложенного к бегунку, вибратор совершает круговые колебания с частотой  $\omega$  и амплитудой  $a_0$  (корпус вибратора движется поступательно вокруг неподвижной точки  $O$  в плоскости, перпендикулярной его оси). Предполагаются выполненными следующие условия:



Фиг. 1

$$a_0 \ll R, \quad a_0 \omega \ll c, \quad \nu \ll R^2 \omega \quad (1.1)$$

Здесь  $c$  — скорость звука в жидкости,  $\nu$  — кинематическая вязкость. Рассматривается плоская задача, т. е. скорость жидкости считается не зависящей от координаты в направлении оси вибратора.

В работе [1] было показано, что при условиях (1.1) вычисление мощности вибратора, идущей на излучение и преодоление сил вязкого трения, а также других характеристик вибратора сводится в конечном счете к нахождению потенциала скорости в области звуковых волн. Существенным отличием данной задачи от рассмотренной ранее является учет отражения волн от стенок ванны. Считается заданным коэффициент отражения  $V$  стенок ванны [2]:

$$V = \exp[-2(\beta + i\psi)] \quad \left(0 \leq \beta < \infty, \quad -\frac{1}{2}\pi \leq \psi \leq \frac{1}{2}\pi\right) \quad (1.2)$$

Параметры  $\beta$  и  $\psi$  характеризуют соответственно амплитуду и фазу отраженной волны. При  $\beta \rightarrow \infty$ , т. е. при полностью поглощающих стенках ванны, имеет место предельный переход к рассмотренному случаю неограниченной жидкой среды.

2. В обычных обозначениях имеем

$$\nabla^2 \varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0, \quad \mathbf{v} = \nabla \varphi, \quad p = -\rho \frac{\partial \varphi}{\partial t} \quad (2.1)$$

Примем начало координат в точке, в которой находится центр корпуса вибратора в данный момент времени, и обозначим через  $\mathbf{e}_1$  и  $\mathbf{e}_2$  орты осей координат. Пусть  $\mathbf{e} = \mathbf{e}_1 + i\mathbf{e}_2$ . Тогда скорость корпуса вибратора  $\mathbf{u}$  можно записать следующим образом

$$\mathbf{u} = \mathbf{e} a_0 \omega \exp(-i\omega t) \quad (2.2)$$

Граничные условия для потенциала  $\varphi$  (с точностью до величин порядка  $a_0/R_2$ ) имеют вид

$$\frac{\partial \varphi}{\partial r} = \mathbf{u} \nabla r = a_0 \omega \exp[i(\theta - \omega t)] \quad \text{при } r = R$$

$$\varphi_2 = V \varphi_1 \quad \text{при } r = R_2 \quad (2.3)$$

Здесь  $\theta$  — угол между ортом  $\mathbf{e}_1$  и радиусом-вектором  $\mathbf{r}$ ,  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  — соответственно падающая и отраженная волны.

Ищем решение в виде  $\varphi = f(r) \mathbf{u} \nabla r$ . Подставляя  $\varphi$  в (2.1), получаем для  $f$  уравнение Бесселя

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{df}{dr} \right) + \left( k^2 - \frac{1}{r^2} \right) f = 0 \quad \left( k = \frac{\omega}{c} \right) \quad (2.4)$$

Его решение, удовлетворяющее граничным условиям (2.3), имеет вид

$$f = R \frac{H_1^{(2)}(y) H_1^{(1)}(kr) + V H_1^{(1)}(y) H_1^{(2)}(kr)}{H_1^{(2)}(y) [x H_0^{(1)}(x) - H_1^{(1)}(x)] + V H_1^{(1)}(y) [x H_0^{(2)}(x) - H_1^{(1)}(x)]} \quad (2.5)$$

где

$$x = kR, \quad y = kR_y \quad (2.6)$$

Нас будет интересовать значение  $f$  при  $r = R$ . Удобно перейти к представлению функций Бесселя через амплитуду  $C_m$  и фазу  $\delta_m$

$$I_m(z) \pm iN_m(z) = +iC_m(z) \exp [\pm i\delta_m(z)] \quad (2.7)$$

Таблицы для  $C_m, \delta_m$  и их производных приведены в [3]. Вводя обозначения

$$G = \frac{C_1(x)}{2xC_1'(x)}, \quad \xi = \delta_1(y) - \delta_1(x), \quad \eta = \delta_1(y) - \delta_1'(x), \quad (2.8)$$

получим для  $f$  при  $r = R$  следующее выражение

$$f(x, y, \beta, \psi) = -RG \frac{\text{ch} [\beta + i(\psi - \xi)]}{\text{ch} [\beta + i(\psi - \eta)]} \quad (2.9)$$

В дальнейшем нам понадобятся в явном виде выражения для действительной и мнимой части  $f$ . Имеем:

$$A = \text{Re}(R^{-1}f) = -G \frac{\text{ch} 2\beta \cos(\eta - \xi) + \cos(2\psi - \eta - \xi)}{\text{sh}^2 \beta + \cos^2(\psi - \eta)} \quad (2.10)$$

$$B = \text{Im}(R^{-1}f) = -G \frac{\text{sh} 2\beta \sin(\eta - \xi)}{\text{sh}^2 \beta + \cos^2(\psi - \eta)} \quad (2.11)$$

Как и следовало ожидать, в предельном случае  $\beta \rightarrow \infty$  выражения для  $A$  и  $B$  совпадают с соответствующими выражениями для неограниченной жидкой среды

Практический интерес представляет случай  $x \ll 1$ , или, что то же, случай когда длина волны значительно превышает радиус вибратора  $R$ . Ограничиваясь в (2.10) и (2.11) членами порядка  $x^2$ , получаем

$$A = -1 + \frac{\pi}{2} x^2 \frac{\sin 2[\delta_1(y) - \psi]}{\text{ch} 2\beta + \cos 2[\delta_1(y) - \psi]} \quad (2.12)$$

$$B = -\frac{\pi}{2} x^2 \frac{\text{sh} 2\beta}{\text{ch} 2\beta + \cos 2[\delta_1(y) - \psi]} \quad (2.13)$$

Это разложение становится неверным, если только одновременно  $\beta \rightarrow 0, \psi \rightarrow \delta_1(y) + \frac{1}{2}(2n+1)\pi$ . Но при  $x \rightarrow 0$  это соответствует чистому резонансу, т. е.  $f \rightarrow \infty$  и условия (1.1) оказываются невыполненными.

В другом предельном случае  $x \gg 1$  имеем

$$A = -\frac{1}{2x^2} \frac{\text{ch} 2\beta + x \sin 2(\psi + x - y)}{\text{sh}^2 \beta + \sin^2(\psi + x - y)} \quad (2.14)$$

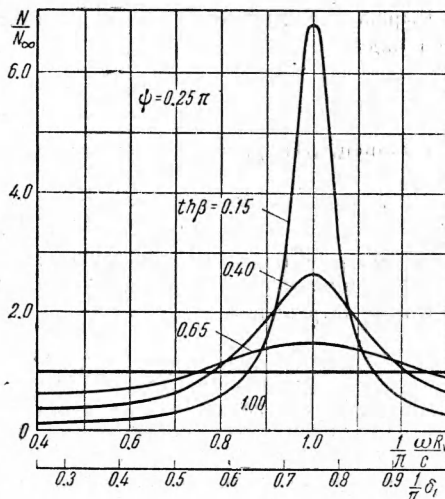
$$B = -\frac{1}{2x} \frac{\text{sh} 2\beta}{\text{sh}^2 \beta + \sin^2(\psi + x - y)} \quad (2.15)$$

3. Для определения характеристических функций сил сопротивления, обусловленных излучением и вязким трением, мы можем воспользоваться соответствующими выражениями работы [1], подставляя в них найденные значения  $A$  и  $B$ . При этом характеристические функции будут уже зависеть не от одного, а от четырех параметров —  $x, y, \beta, \psi$ . В прежних обозначениях имеем

$$\Pi_u = -x^2 B, \quad \Pi_c = -x^2 A, \quad \Phi_u = x^{1/2}(1 - A - B), \quad \Phi_c = x^{1/2}(1 - A + B) \quad (3.1)$$

Полная активная мощность  $N$  на единицу высоты вибратора, отдаваемая в окружающую среду, определяется выражением

$$N = \frac{\pi \rho c^2 \kappa^2 R}{z^2} \frac{x(\Pi_u + \gamma \Phi_u)}{M_u^2 + (1 + M_c)^2} \quad (3.2)$$



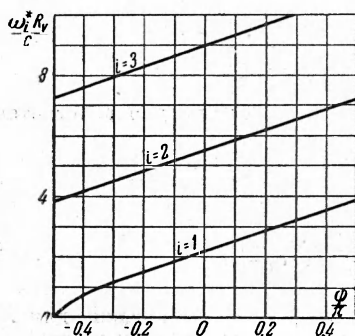
Фиг. 2

где

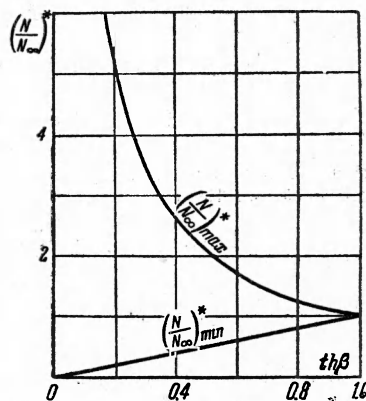
$$M_u = \frac{\pi \rho R^2 \Pi_u + \gamma \Phi_u}{m_i x^2}, \quad M_c = \frac{m_0 + m_0^*}{m_i}, \quad z = \frac{R_i}{R_0 - R_i}$$

$$m_0^* = \pi \rho R^2 \frac{\Pi_c + \gamma \Phi_c}{x^2}, \quad \gamma = \sqrt{\frac{\nu}{2cR}}, \quad \kappa = \frac{R_i}{R} \quad (3.3)$$

а  $m_0$  и  $m_i$  — соответственно массы корпуса вибратора и бегунка.



Фиг. 3



Фиг. 4

Выражение для относительной амплитуды колебаний корпуса вибратора  $\delta_0$  имеет вид

$$\delta_0 = \frac{a_0}{R_0 - R_i} = \frac{1}{\sqrt{M_u^2 + (1 + M_c)^2}} \quad (3.4)$$

Наконец, для угла фазового сдвига  $\alpha_0$  имеем

$$\text{tg } \alpha_0 = \frac{M_u}{\sqrt{(M_u^2 + M_c^2)[M_u^2 + (1 + M_c)^2] - M_u^2}} \quad (3.5)$$

Рассмотрим более подробно случай  $x \ll 1$ . Учитывая (2.12) и (2.13), получаем для отношения мощности вибратора  $N$  к ее предельному значению  $N_\infty$  при  $\beta \rightarrow \infty$  следующее выражение

$$\frac{N}{N_\infty} = \frac{\text{sh } 2\beta}{\text{ch } 2\beta + \cos 2[\delta_1(y) - \psi]} \quad (3.6)$$

На фиг. 2 эта зависимость представлена графически для  $\psi = 1/4\pi$ . Из графика видно, что существует сравнительно узкий диапазон частот, при котором имеет место резонансная настройка вибратора. Резонансные частоты  $\omega_i^*$  определяются только фазой  $\psi$  коэффициента отражения. На фиг. 3 показаны первые три резонансные частоты в функции от  $\psi$ . Наоборот, высота максимумов и минимумов не зависит от  $\psi$  и  $y^*$  и полностью определяется амплитудой коэффициента отражения или, что то же, параметром  $\beta$ . Эта зависимость показана на фиг. 4.

В заключение отметим, что при  $x \ll 1$  имеют место также соотношения:

$$\frac{\text{tg } \alpha_0}{(\text{tg } \alpha_0)_\infty} = \frac{\text{sh } 2\beta}{\text{ch } 2\beta + \cos 2[\delta_1(y) - \psi]}, \quad \frac{a_0}{(a_0)_\infty} = 1 \quad (3.7)$$

Институт горного дела  
Сибирского отделения АН СССР  
Новосибирский электротехнический  
институт

Поступила  
25 V 1960

#### ЛИТЕРАТУРА

1. К у н и н И. А. К теории планетарного вибратора в неограниченной жидкой среде. Изв. АН СССР. ОТН, «Механика и машиностроение», 1959, № 5.
2. М о р с Ф. М. Колебания и звук. ГИТТЛ, 1949.
3. М о р с Ф. М., Ф е ш б а х Г. Методы теоретической физики, т. II. ИЛ, 1960.