

УДК 532.526

Гармоники волн Толлмина–Шлихтинга в сжимаемом пограничном слое*

Г.В. Петров

*Институт теоретической и прикладной механики
им. С.А. Христиановича СО РАН, Новосибирск*

E-mail: smorodsk@itam.nsc.ru

С помощью нелинейных параболизированных уравнений устойчивости рассчитаны гармоники волн Толлмина–Шлихтинга в сжимаемом пограничном слое на пластине. Показано, что при нарастании (вниз по течению) амплитуды второй гармоники до значений порядка амплитуды основной гармоники темп роста последней резко увеличивается. Подобное быстрое отклонение от результатов линейной теории характеризует начало перехода пограничного слоя в турбулентное состояние. Расчеты выполнены для чисел Маха $M = 0,01$ и 2 .

Ключевые слова: пограничный слой, устойчивость, нелинейность, переход к турбулентности.

Основной многократно исследованных разными авторами механизмов перехода пограничного слоя в турбулентное состояние является нелинейное взаимодействие элементарных собственных возмущений — волн Толлмина–Шлихтинга. В настоящей работе рассчитано нелинейное развитие одиночных волн Толлмина–Шлихтинга и обнаружены аналогичные признаки перехода.

По линейной теории устойчивости, волна представляется синусоидальной по времени вещественной частью функции

$$\mathbf{Y} = \mathbf{Z} \exp\left\{i\left(\int \alpha \, dx + \beta z - \omega t\right)\right\},$$

где $\mathbf{Y} = \mathbf{Y}(x, y, z, t)$ — вектор, компонентами которого являются возмущения скорости и других параметров течения, t — время, x, y, z — декартовы координаты, i — мнимая единица; угловая частота ω и трансверсальное волновое число β — заданные вещественные константы; $\alpha(x)$ и $\mathbf{Z}(x, y)$ вычисляются.

Хотя предметом настоящего исследования является нелинейное развитие только одной волны (с учетом двух гармоник), формулируется задача взаимодействия с другой волной Толлмина–Шлихтинга, имеющей параметры $\omega_2 = 2\omega$,

* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 05-01-00079а).

$\beta_2 = 2\beta$. По аналогии с работой [1], в которой рассматривалось взаимодействие трех волн, выводится замкнутая система уравнений для двух волн:

$$\begin{aligned} \mathbf{LZ} &= \mathbf{N}(\mathbf{Z}_2, \bar{\mathbf{Z}}) \exp\{i\int(\alpha_2 - \bar{\alpha} - \alpha)RdR\}, \\ \mathbf{LZ}_2 &= 0,5\mathbf{N}(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}) \exp\{i\int(2\alpha - \alpha_2)RdR\}, \end{aligned} \quad (1)$$

где \mathbf{L} и \mathbf{N} — параболизированный линейный и нелинейный операторы, представленные в работе [2], чертой отмечена комплексно-сопряженная величина. Эти операторы зависят от волновых параметров векторов, на которые они действуют, вектору $\bar{\mathbf{Z}}$ соответствуют параметры $-\omega, -\bar{\alpha}, -\beta$. Переменная R , связанная с линиями тока невозмущенного пограничного слоя, асимптотически равна $\sqrt{u_\infty x/v_\infty}$, волновые векторы (α, β) и угловые частоты ω обезразмерены на u_∞/v_∞ и u_∞^2/v_∞ соответственно, u — продольная составляющая скорости, v — кинематическая вязкость, нижний индекс ∞ относится к значениям величин в набегающем потоке.

Для решения системы (1) на каждом шаге маршевой схемы осуществляется круговой итерационный процесс, в ходе которого нелинейные члены системы вычисляются по результатам предыдущей итерации.

Расчеты выполнены для совершенного газа с отношением теплоемкостей $\gamma = 1,4$ и вязкостью, определяемой законом Саттерленда с постоянной $T_s = 110$ К. Температура торможения потока $T_0 = 310$ К, пластина теплоизолирована.

Рис. 1 представляет наибольшие по сечениям $R = \text{const}$ значения A относительных амплитуд возмущения потока массы $|\rho \hat{u} + u \hat{\rho}|/(\rho_\infty u_\infty)$ (а) и продольные фазовые скорости $c = \omega/\text{Re}\alpha$ (b) в зависимости от R , здесь ρ — плотность, $\hat{\rho}, \hat{u}$ — амплитудные функции возмущений в комплексном представлении. До начального $R = R_0$, определяемого как точка минимума амплитуды основной волны, расчет выполняется по линейной теории, затем производится перенормирование на заданные значения начальных амплитуд и включаются члены нелинейного взаимодействия.

Кривые 1 (см. рис. 1) соответствуют основной волне с угловой частотой $\omega = 0,8 \cdot 10^{-5}$, трансверсальным волновым числом $\beta = 3,65 \cdot 10^{-5}$ и начальной амплитудой $A_0 = 1,6 \cdot 10^{-4}$, остальные кривые — волнам с параметрами $2\omega, 2\beta$ и разными начальными амплитудами. При небольших R результаты, представленные кривыми 2, совпадают с данными линейной теории, поскольку нелинейные члены, определяемые лишь основной волной (второе уравнение системы (1)), относительно

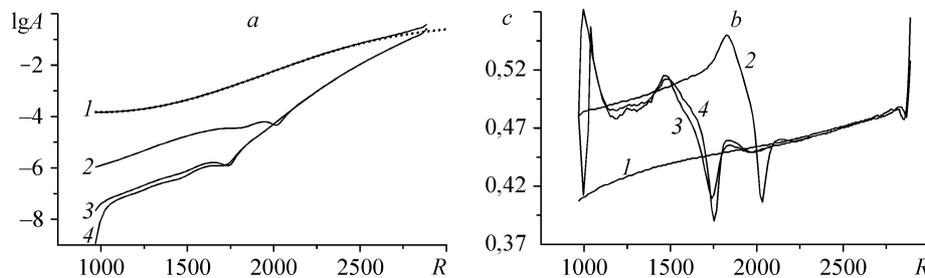
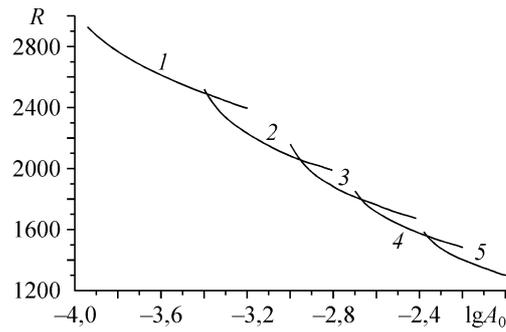


Рис. 1. Зависимость амплитуд возмущений потока массы (а) и фазовой скорости $c = \omega/\text{Re}(\alpha)$ (b) от R для $M = 2, \omega = 0,8 \cdot 10^{-5}, \beta = 3,65 \cdot 10^{-5}$.

Рис. 2. Наименьшие значения R , при которых амплитуда второй гармоники достигает половины значения амплитуды основной гармоники в зависимости от начальной амплитуды A_0 для $M = 2$, $\omega \cdot 10^5 = 0,8$ (1), 1,1 (2), 1,4 (3), 1,7 (4), 2,1 (5).



малы при данной начальной амплитуде A_2 . При $A_2 < A_0^2$ (кривые 3 и 4)

результат после установления счета

не зависит от начальной амплитуды, следовательно, мы имеем возмущение, возбуждаемое основной волной.

Поначалу это возмущение незначительно отличается от волны Толлмина–Шлихтинга, при $R > 1500$ отличие становится существенным, а при $R > 1800$ фазовая скорость сравнивается с фазовой скоростью основной волны (кривая 4, см. рис. 1, *b*). Кривые 2 показывают, что то же самое, но ниже по течению, происходит в случае более интенсивной волны, не обязанной своим существованием основной волне, т. е. пока $A_2 \ll A_0$, счет неизменно перескакивает на вторую гармонику с волновым вектором $2(\text{Re}\alpha, \beta)$ и амплитудой, представленной при $R > 1800$ кривой 4 на рис. 1, *a*.

Сопоставление кривой 1 с пунктирной кривой (линейная теория) на рис. 1, *a* показывает, что влияние второй гармоники на основную начинается с $R \cong 2500$. Темп роста амплитуды перестает уменьшаться и остается примерно одинаковым до $R \cong 2820$, когда амплитуда второй гармоники достигает половины значения амплитуды основной гармоники, после чего резко возрастает, а при $R \cong 2860$ счет теряет устойчивость. Подобное anomalous поведение характерно также для перехода пограничного слоя в турбулентное состояние в субгармоническом режиме [3].

Приведенные выше данные соответствуют значению β , при котором отношение амплитуд второй и основной гармоник достигает 50 % при наименьшем R . Результаты таких расчетов для разных частот и начальных амплитуд приведены на рис. 2 в виде кривых, огибающая семейства которых (кривая 2 на рис. 3, *a*) соответствует критическим (абсолютно наименьшим для данных A_0) значениям $R = R^*$. Соответствующие ω^* , β^* представляют кривые 2, 3 на рис. 3, *b*. Крити-

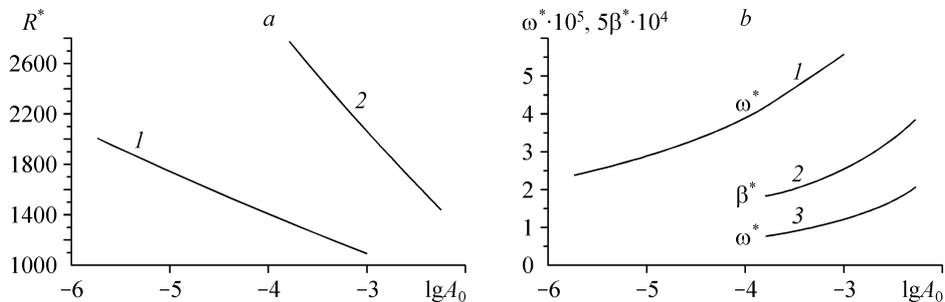


Рис. 3. Зависимость критических параметров от начальной амплитуды A_0 для $M = 0,01$, 2 (2, 3).

ческая амплитуда основной гармоники оказывается постоянной $A^* \cong 27\%$ во всем диапазоне начальных амплитуд A_0 .

Кривые 1 на рис. 3 рассчитаны для $M = 0,01$, $\beta = 0$. Критические параметры на 1-2 порядка чувствительнее к начальным значениям амплитуды, чем при $M = 2$. Критическая амплитуда $A^* \cong 12\%$.

Полученные результаты в совокупности с данными по восприимчивости пограничного слоя к внешним возмущениям можно положить в основу расчетов ламинарно-турбулентного перехода.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Петров Г.В.** Расчетные исследования взаимодействия волн Толлмина–Шлихтинга в сжимаемом пограничном слое // Теплофизика и аэромеханика. — 2006. — Т. 13, № 2. — С. 225–228.
2. **Петров Г.В.** Акустическое возбуждение волны Толлмина–Шлихтинга в сжимаемом пограничном слое на шероховатой пластине // Теплофизика и аэромеханика. — 2005. — Т. 12, № 2. — С. 209–218.
3. **Володин А.Г., Зельман М.Б.** Трехволновое резонансное взаимодействие возмущений в пограничном слое // Известия АН СССР. Механика жидкости и газа. — 1978. — № 5. — С. 78–84.

Статья поступила в редакцию 17 декабря 2007 г.