

ПЛОСКАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ОРТОТРОПНОГО ТЕЛА С ТРЕЩИНОЙ, НИЖНИЙ БЕРЕГ КОТОРОЙ АРМИРОВАН УПРУГОЙ МЕМБРАНОЙ

В. А. Хандогин

Новосибирский государственный технический университет, 630092 Новосибирск

Рассмотрено напряженное состояние ортотропной плоскости с одним линейным дефектом, нижний берег которого армирован упругой мембраной. Потенциалы С. Г. Лехницкого строятся как решения двумерной краевой задачи Римана. Их форма получена в замкнутом виде. Показано, что асимптотики напряжений в вершинах дефекта могут иметь особенность любого порядка от -1 до 0 в зависимости от жесткости мембраны. Специально рассмотрены случаи малой и большой жесткости.

В вершинах линейных дефектов в деформируемом твердом теле выделяются два типа сингулярностей силовых факторов. В ограничениях линейной упругости для идеальной трещины и бесконечно тонкого жесткого включения характерны особенности порядка $r^{-1/2}$ [1]. Для условий основной смешанной краевой задачи (жесткое включение с оторванным краем) свойственны особенности порядка $r^{-1/4}$ и $r^{-3/4}$ [2].

В настоящей работе рассмотрена краевая задача, для которой напряжения в вершинах дефекта могут иметь особенность любого порядка от 0 до -1 . Показано, в частности, что несимметричное армирование берегов трещины качественно изменяет напряженно-деформированное состояние по сравнению со случаем идеальной трещины со свободным краем.

1. Граничные условия задачи. Рассмотрим неограниченную плоскую ортотропную среду с разными и чисто мнимыми характеристическими числами ($s_k = im_k, k = 1, 2$). При этом матрица упругих податливостей a_{ij} [3] удовлетворяет условию $2\sqrt{a_{11}a_{22}} \neq 2a_{12} + a_{66}$, а направления ортотропии совпадают с направлениями координатных осей.

Напряжения, деформации, смещения и другие силовые факторы выражаются через две аналитические функции ($\bar{\Psi}(z_1)$ и $\Psi(z_2)$) по известным общим правилам [3, 4].

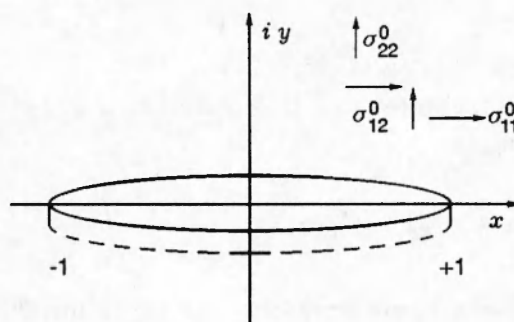
Предположим, что среда ослаблена одним разрезом вдоль отрезка действительной оси $|x| < 1$. Нижний берег разреза непрерывно армирован бесконечно тонкой упругой мембраной постоянной жесткости. По определению мембрана упруго препятствует продольным деформациям растяжения — сжатия и не сопротивляется изгибу и сдвигу. В [5, 6] такая мембрана называется «безмоментной упругой нитью».

Среда нагружена на бесконечности равномерными напряжениями σ_{ij}^0 . Контур дефекта свободен от внешних сил (см. рисунок). Статическое равновесие граничных элементов твердого тела в этом случае обеспечивается условиями вида

$$\sigma_{22}^{\pm}(x, 0) = 0, \quad \sigma_{12}^{\pm}(x, 0) = 0, \quad \sigma_{1\lambda}^{-}(x, 0) \equiv \alpha\sigma_{12}^{-}(x, 0) + \beta\sigma_{11}^{-}(x, 0) = 0, \quad (1.1)$$

в которых направляющие косинусы и связанные с ними параметры определяются соотношениями

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + c^2 a_{11}^2}}, \quad \beta = \frac{ca_{11}}{\sqrt{1 + c^2 a_{11}^2}}, \quad \mu \equiv \alpha + i(m_1 + m_2)\beta, \quad e^{2i\lambda} \equiv \frac{\bar{\mu}}{\mu}. \quad (1.2)$$



Здесь c — жесткость упругой нити на растяжение — сжатие.

2. Краевые задачи. Потенциалы С. Г. Лехницкого будем разыскивать в виде

$$\Phi(z_1) = \Phi_1(z_1) + i\Phi_2(z_1), \quad \Psi(z_2) = \Psi_1(z_2) + i\Psi_2(z_2), \quad (2.1)$$

где функции $\Phi_{1,2}$ и $\Psi_{1,2}$ представляются интегралами типа Коши с чисто вещественными плотностями. Опишем кратко процедуру построения потенциалов (2.1).

Первая пара из граничных условий (1.1) приводит к следующим двум краевым задачам Римана для функций (2.1):

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(\sigma_{22}^+ - \sigma_{22}^-) &\equiv (\Phi_1^+ - \Phi_1^-) + (\Psi_1^+ - \Psi_1^-) = 0, \\ \frac{1}{2i}(\sigma_{22}^+ + \sigma_{22}^-) &\equiv (\Phi_2^+ + \Phi_2^-) + (\Psi_2^+ + \Psi_2^-) - i\sigma_{12}^0 = 0. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Решение краевых задач (2.2) общеизвестно [7] и позволяет исключить один из потенциалов. Предположим для определенности, что исключается второй потенциал $\Psi(z_2)$. В этом случае вторая пара граничных условий (1.1) приводит к двумерной краевой задаче Римана для первого потенциала. Отличительной особенностью второй задачи является то, что матрица ее коэффициентов не зависит от пространственных координат и приводится к диагональной форме поворотом на угол $\lambda/2$. В результате приходим к двум независимым краевым задачам Римана и выражению для искомого потенциала $\Phi(z_1)$:

$$\varphi_k^+ - (-1)^k e^{-i\lambda} \varphi_k^- = F_k, \quad k = 1, 2; \quad (2.3)$$

$$\Phi \equiv \Phi_1 + i\Phi_2 = e^{i\lambda/2}(\varphi_1 + i\varphi_2); \quad (2.4)$$

$$F_1(x) = \frac{ie^{-i\lambda/2}}{2(m_2 - m_1)} \left\{ \frac{m_2\sigma_{22}^0 + \sigma_{11}^0}{m_2 + m_1} \sin \lambda + \sigma_{12}^0(1 + \cos \lambda) \right\} + \frac{im_2\sigma_{22}^0(1 - \cos \lambda)}{2(m_2 - m_1)} \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}} e^{-i\lambda/2}, \quad (2.5)$$

$$F_2(x) = \frac{ie^{-i\lambda/2}}{2(m_2 - m_1)} \left\{ \sigma_{12}^0(1 - \cos \lambda) - \frac{m_2\sigma_{22}^0 + \sigma_{11}^0}{m_2 + m_1} \sin \lambda \right\} + \frac{im_2\sigma_{22}^0(1 + \cos \lambda)}{2(m_2 - m_1)} e^{-i\lambda/2} \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Решения краевых задач (2.3) находятся по общим правилам [7] и не вызывают затруднений. Единственное решение, не ограниченное вблизи обеих вершин дефекта, фиксируется условием однозначности смещений и отсутствия главного вектора сил на дефекте в форме, указанной в [4]. Приведем окончательный результат:

$$\varphi_k(z_1) = \frac{X_k(z_1)}{2\pi i} \int_{-1}^{+1} \frac{F_k(t)}{X_k^+(t)} \frac{dt}{t - z_1}, \quad k = 1, 2,$$

$$X_1(z) = (z-1)^{-n-1/2}(z+1)^{n-1/2}, \quad X_2(z) = (z-1)^{-n}(z+1)^{n-1}, \quad n = \lambda/2\pi. \quad (2.6)$$

Здесь $X_{1,2}(z_1)$ — решения однородных задач (2.3).

Выражения для второго потенциала С. Г. Лехницкого $\Psi(z_2)$ строятся аналогично описанной процедуре и имеют вид

$$\Psi(z_2) \equiv \Psi_1 + i\Psi_2 = e^{i\lambda/2}(\psi_1 + i\psi_2), \quad \psi_k(z_2) = \frac{X_k(z_2)}{2\pi i} \int_{-1}^{+1} \frac{F_k^*(t)}{X_k^+(t)} \frac{dt}{t-z_2}, \quad k = 1, 2, \quad (2.7)$$

где функции $F_k^*(t)$ определяются выражениями для функций $F_k(t)$ (2.5), если в них сделать перестановку $m_2 \leftrightarrow m_1$, а $X_k(z)$ заданы формулами (2.6). Подобие формул (2.4) и (2.7) обусловлено симметрией напряжений относительно комплексных потенциалов $\Phi(z_1)$ и $\Psi(z_2)$.

Совокупность равенств (2.3)–(2.7) представляет интегральную форму точного решения поставленной задачи (1.1).

3. Преобразование точного решения. Интегральные члены в точном решении могут быть вычислены с помощью расширения известного приема вычисления интегралов типа Коши, изложенного, например, в [8]. Прием распространяется на интегралы (2.6), (2.7), значения которых ищутся в виде

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{-1}^{+1} \frac{F(t)}{X(t)} \frac{dt}{t-z} = \omega \left\{ \frac{F(t)}{X(t)} - G(z) \right\}, \quad (3.1)$$

где $G(z)$ — сумма главных частей функции F/X в ее полюсах, а константа ω определяется из сравнения предельных значений левой и правой частей равенства (3.1) на линии интегрирования с учетом краевой задачи для функции $X(z)$. В частности, для функции $F(t) = F_{1,2}(t)$ представляют интерес следующие два интеграла:

$$J_1(z, \lambda) \equiv \frac{X_1(z)}{2\pi i} \int_{-1}^{+1} \frac{1}{X_1^+(t)} \frac{dt}{t-z} = \frac{1}{1+e^{-i\lambda}} \left\{ 1 - \left(z - \frac{\lambda}{\pi} \right) X_1(z) \right\},$$

$$J_2(z, \lambda) \equiv \frac{X_1(z)}{2\pi i} \int_{-1}^{+1} \frac{1}{X_1^+(t)} \frac{t}{\sqrt{1-t^2}} \frac{dt}{t-z} = \frac{1}{1-e^{-i\lambda}} \left\{ \frac{z}{\sqrt{1-z^2}} + i \left(z - \frac{\lambda}{\pi} \right) X_1(z) \right\}. \quad (3.2)$$

Выражения для подобных интегралов, содержащих $X_2(z)$ и входящих в функции $\varphi_2(z_1)$ и $\psi_2(z_2)$, получаются из формул (3.2) при замене в них $\lambda \rightarrow \lambda - \pi$.

Наконец, с помощью равенств (2.4)–(2.6) и (3.2) приходим к аналитической форме точного значения первого потенциала С. Г. Лехницкого:

$$\begin{aligned} \Phi(z_1) = & \frac{i}{2(m_2 - m_1)} \left\{ \sigma_{12}^0(1 + \cos \lambda) + \frac{m_2 \sigma_{22}^0 + \sigma_{11}^0}{m_2 + m_1} \sin \lambda \right\} J_1(z_1, \lambda) + \\ & + \frac{i m_2 \sigma_{22}^0}{2(m_2 - m_1)} \left\{ (1 - \cos \lambda) J_2(z_1, \lambda) + (1 + \cos \lambda) J_2(z_1, \lambda - \pi) \right\} + \\ & + \frac{i}{2(m_2 - m_1)} \left\{ \sigma_{12}^0(1 - \cos \lambda) - \frac{m_2 \sigma_{22}^0 + \sigma_{11}^0}{m_2 + m_1} \sin \lambda \right\} J_1(z_1, \lambda - \pi). \quad (3.3) \end{aligned}$$

Аналитическая форма для второго потенциала $\Psi(z_2)$ получается из выражения (3.3), если в нем выполнить перестановки вида

$$z_1 \rightarrow z_2, \quad m_2 \leftrightarrow m_1. \quad (3.4)$$

4. Случай изотропной среды. Структура потенциалов (3.3) допускает прямой предельный переход к изотропной среде по схеме работы [4]. Выполняя соответствующие выкладки, получим выражения для стандартных комплексов напряжений:

$$\begin{aligned} \sigma_{11} + \sigma_{22} = & \sigma_{11}^0 + \sigma_{22}^0 - 2\text{Im} \left\{ \left(\sigma_{12}^0(1 + \cos \lambda) + \frac{1}{2} (\sigma_{11}^0 + \sigma_{22}^0) \sin \lambda \right) J_1(z, \lambda) + \right. \\ & + \sigma_{22}^0((1 - \cos \lambda)J_2(z, \lambda) + (1 + \cos \lambda)J_2(z, \lambda - \pi)) + \\ & \left. + \left(\sigma_{12}^0(1 - \cos \lambda) - \frac{1}{2} (\sigma_{11}^0 + \sigma_{22}^0) \sin \lambda \right) J_1(z, \lambda - \pi) \right\}, \end{aligned} \quad (4.1)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{22} - \sigma_{11} + 2i\sigma_{12} = & \sigma_{22}^0 - \sigma_{11}^0 + 2i\sigma_{12}^0 - 2\text{Re} \left\{ (2 - i) \left(\sigma_{12}^0(1 + \cos \lambda) + \frac{1}{2} (\sigma_{11}^0 + \sigma_{22}^0) \sin \lambda \right) \times \right. \\ & \left. \times J_1(z, \lambda) + (2 - i) \left(\sigma_{12}^0(1 - \cos \lambda) - \frac{1}{2} (\sigma_{11}^0 + \sigma_{22}^0) \sin \lambda \right) J_1(z, \lambda - \pi) \right\}. \end{aligned}$$

5. Асимптотики напряжений. Комплексные потенциалы обладают разными асимптотическими выражениями в окрестности левой и правой вершины дефекта. Например, около правой вершины дефекта точное решение (3.3) имеет асимптотику вида ($\zeta_1 = z_1 - 1$)

$$\Phi(z_1) = \frac{\sigma_{22}^0 m_2}{2\sqrt{2}(m_2 - m_1)} \zeta_1^{-1/2} + c_1 \zeta_1^{-n-1/2} + c_2 \zeta_1^{-n}, \quad (5.1)$$

а в окрестности левой вершины ($\zeta_1 = z_1 + 1$)

$$\Phi(z_1) = \frac{\sigma_{22}^0 m_2}{2\sqrt{2}(m_2 - m_1)} \zeta_1^{-1/2} + c_3 \zeta_1^{n-1} + c_4 \zeta_1^{n-1/2}. \quad (5.2)$$

Здесь константы c_1, \dots, c_4 очевидным образом вычисляются по точному решению (3.3). При этом асимптотические формулы для другого потенциала $\Psi(z_2)$ получаются из формул (5.1) и (5.2) перестановкой (3.4).

Первые слагаемые в асимптотиках (5.1), (5.2) определяют обычное состояние нормального отрыва, как и для идеальной трещины [3]. Остальные слагаемые описывают перераспределение полей напряжений, вызванное влиянием армирующей мембраны. Параметр n зависит от жесткости мембраны через угол λ (1.2) и изменяется в пределах $0 < n \leq 1/4$, где левое значение характерно для бесконечно малой жесткости ($c = \lambda = 0$), а правое — для бесконечно большой ($c = \infty, \lambda = \pi/2$). В результате этого в вершинах дефекта могут возникать особенности любого порядка от 0 до $(-1 + \varepsilon)$, где $\varepsilon \rightarrow 0$, в зависимости от жесткости армирующей мембраны. При малой жесткости наибольший порядок особенности $(n - 1)$ возникает в окрестности левой вершины дефекта.

При бесконечно большой жесткости армирующей мембраны асимптотики потенциалов имеют одинаковые порядки сингулярных членов около обеих вершин дефекта: $\zeta_1^{-1/2}$, $\zeta_1^{-1/4}$, $\zeta_1^{-3/4}$. Интересно сравнить этот случай с основной смешанной задачей теории трещин [2] и симметричным армированием обоих берегов дефекта жесткой мембраной [9]. Для основной смешанной задачи характерны осцилляции напряжений около вершин дефекта и связанная с ними неопределенность коэффициентов интенсивности напряжений в асимптотических членах порядка $-1/4$ и $-3/4$. В рассматриваемой задаче с асимптотиками (5.1) и (5.2) коэффициенты интенсивности c_1, \dots, c_4 являются константами и точно известны, а напряжения монотонно зависят от полярного радиуса и не имеют осциллирующих составляющих.

При симметричном армировании берегов дефекта напряжения имеют характерную особенность порядка $-1/2$ и не типичное для трещин угловое распределение [9]. Асимметрия краевых условий, обусловленная односторонним армированием, качественно изменяет картину распределения напряжений в сравнении с симметричным случаем. В связи с этим рассмотрим предел бесконечно малой жесткости армирующей нити, для которого порядок особенности в асимптотиках (5.2) наибольший. В пределе $n \rightarrow 0$ первый потенциал (3.3) имеет следующую структуру основных сингулярных членов:

$$\Phi(z_1) = \frac{m_2 \sigma_{22}^0 - i \sigma_{12}^0}{2(m_2 - m_1)} \left\{ \frac{z_1}{\sqrt{z_1^2 - 1}} - 1 \right\} + n \frac{\sigma_{11}^0 + m_2 \sigma_{22}^0}{2(m_2^2 - m_1^2)} \left\{ \left(\frac{z_1 - 1}{z_1 + 1} \right)^{1-n} - \frac{1}{2} \right\} + O(\lambda). \quad (6.1)$$

Соответствующее соотношение для второго потенциала $\Psi(z_2)$ по-прежнему получается из формулы (6.1) перестановкой (3.4). Первое слагаемое представляет собой точное решение для идеальной трещины [3]. Последние слагаемые, исчезающие при $n \rightarrow 0$, определяют перераспределение напряжений под влиянием армирующего ребра. Причина перераспределения напряжений состоит в том, что ребро удерживается от поворотов и дилатаций внутренними силами, интенсивность которых, как известно, подсчитывается по значениям $\sigma_{22}^-(x, 0)$ и $\sigma_{12}^-(x, 0)$. Учитывая эти факторы, нетрудно записать решение и для случая, когда ребро свободно от внутренних сил, а следовательно, крутящий момент и момент дилатации на ребре равны нулю. Аналогично строятся и решения, когда только один из указанных двух моментов равен нулю. Все они подобны по свойствам представленным выше потенциалам.

Выводы. 1. Рассмотрена смешанная задача эластостатики о деформации однородной плоской среды, ослабленной одним разрезом, нижний берег которого армирован упругой мембраной (безмоментной упругой нитью). Построены точные решения для ортотропного и изотропного случаев.

2. Асимптотические выражения потенциалов С. Г. Лехницкого показывают, что в вершинах дефекта могут возникать сингулярности напряжений любого порядка от 0 до $(-1 + \epsilon)$, где $\epsilon \rightarrow 0$, в зависимости от жесткости армирующей мембраны. При малой жесткости наибольший порядок особенности реализуется около левой вершины дефекта, но соответствующий коэффициент интенсивности стремится к нулю.

3. В отличие от решений основной смешанной задачи построенные асимптотики полей напряжений монотонно зависят от полярного радиуса, а коэффициенты интенсивности точно определены и не имеют осциллирующих составляющих.

4. Из сравнения со случаем симметричного армирования обоих берегов трещины видно, что асимметрия краевых условий качественно изменяет картину распределения напряжений.

Работа выполнена при поддержке региональной программы «Ресурсосберегающие технологии и приборы».

ЛИТЕРАТУРА

1. Бережницкий Л. Т., Панасюк В. В., Стащук Н. Г. Взаимодействие жестких включений и трещин в деформируемом теле. Киев: Наук. думка, 1983.
2. Кит Г. С., Кривцун М. Г. Плоские задачи термоупругости для тел с трещинами. Киев: Наук. думка, 1983.
3. Си Г., Либовиц Г. Математическая теория хрупкого разрушения // Разрушение. Т. 2. М.: Мир, 1975. С. 83-203.

4. Фильштинский Л. А. Упругое равновесие плоской анизотропной среды, ослабленное произвольными криволинейными трещинами. Предельный переход к изотропной среде // Изв. АН СССР. МТТ. 1976. № 5. С. 91–97.
5. Шереметьев М. П. Пластинки с подкрепленным краем. Львов: Изд-во Львов. ун-та, 1960.
6. Савин Г. Н., Тульчий В. И. Пластинки, подкрепленные составными кольцами и упругими накладками. Киев: Наук. думка, 1971.
7. Гахов Ф. Д. Краевые задачи. М.: Наука, 1977.
8. Саврук М. П. Двумерные задачи упругости для тел с трещинами. Киев: Наук. думка, 1981. С. 14–16.
9. Хандогин В. А. Сингулярное напряженное состояние в вершине хрупкой трещины с нулевыми значениями J -интеграла // ПМТФ. 1995. Т. 36, № 6. С. 108–112.

Поступила в редакцию 8/VIII 1996 г.
