

УДК 539.214 + 539.374

ОБ УЧЕТЕ УПРУГИХ СВОЙСТВ НЕНЬЮТОНОВСКОГО МАТЕРИАЛА ПРИ ЕГО ВИСКОЗИМЕТРИЧЕСКОМ ТЕЧЕНИИ

А. А. Буренин, Л. В. Ковтанюк, А. С. Устинова

Институт автоматики и процессов управления ДВО РАН, 690041 Владивосток
E-mail: burenin@iacp.dvo.ru

Рассматривается деформирование и вязкопластическое течение неньютоновского материала, заключенного между коаксиальными жесткими цилиндрическими поверхностями, при повороте каждой из них с последующей остановкой и поворотом в противоположном направлении. Решение задачи строится в рамках модели больших упруговязкопластических деформаций, в отличие от классических решений, полученных с использованием модели жестковязкопластического тела. Рассчитаны параметры вискозиметрического процесса как в области развивающегося вязкопластического течения, так и в областях упругого деформирования.

Ключевые слова: упругость, вязкопластичность, большие деформации, остаточные напряжения.

Как правило, постоянные в моделях вязких и вязкопластичных сред определяются свойствами вискозиметрических течений. При этом используется точное решение соответствующей краевой задачи. В теории вязких и вязкопластичных сред такие решения являются классическими [1–3]. В настоящее время представляет интерес исследование эффектов, обусловленных упругими свойствами интенсивно деформируемых материалов. К таким эффектам относятся недопустимые изменения в геометрии изделий при их изготовлении в процессах обработки материалов давлением (упругое последствие) и возникновение в них при этом недопустимо больших остаточных напряжений. В расчетах с учетом подобных эффектов необходимо использовать математическую модель больших упруговязкопластических деформаций. При этом необходимо наличие точных решений уравнений такой модели не только для обработки результатов экспериментов, но и для тестирования алгоритмов расчетов. В настоящей работе строится именно такое решение.

1. Основные модельные соотношения. Для решения поставленной задачи используется модель больших упругоупластических деформаций, предложенная в [4] и обобщенная на случай деформирования с учетом вязких свойств в [5]. В декартовой прямоугольной системе пространственных эйлеровых координат x_i обратимая (упругая) e_{ij} и необратимая (пластическая) p_{ij} неопределимые в экспериментах компоненты тензора полных деформаций Альманси d_{ij} определяются дифференциальными уравнениями изменения (переноса) в виде

$$\frac{De_{ij}}{Dt} = \varepsilon_{ij} - \varepsilon_{ij}^p - \frac{1}{2} (e_{ik}(\varepsilon_{kj} - \varepsilon_{kj}^p - z_{kj}) + (\varepsilon_{ik} - \varepsilon_{ik}^p + z_{ik})e_{kj}),$$

$$\begin{aligned}
\frac{Dp_{ij}}{dt} &= \varepsilon_{ij}^p - p_{is}\varepsilon_{sj}^p - \varepsilon_{is}^p p_{sj}, & \frac{Dn_{ij}}{Dt} &= \frac{dn_{ij}}{dt} - r_{ik}n_{kj} + n_{ik}r_{kj}, \\
\varepsilon_{ij} &= \frac{1}{2}(v_{i,j} + v_{j,i}), & v_i &= \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_{i,j}v_j, & u_{i,j} &= \frac{\partial u_i}{\partial x_j}, \\
z_{ij} &= A^{-1}[B^2(\varepsilon_{ik}e_{kj} - e_{ik}\varepsilon_{kj}) + B(\varepsilon_{ik}e_{kt}e_{tj} - e_{ik}e_{kt}\varepsilon_{tj}) + e_{ik}\varepsilon_{kt}e_{ts}e_{sj} - e_{ik}e_{kt}\varepsilon_{ts}e_{sj}], & (1.1) \\
A &= 8 - 8E_1 + 3E_1^2 - E_2 - E_1^3/3 + E_3/3, & B &= 2 - E_1, \\
E_1 &= e_{jj}, & E_2 &= e_{ij}e_{ji}, & E_3 &= e_{ij}e_{jk}e_{ki}, \\
r_{ij} &= \omega_{ij} + z_{ij}, & \omega_{ij} &= (v_{i,j} - v_{j,i})/2.
\end{aligned}$$

Здесь u_i, v_i — компоненты векторов перемещений и скоростей точек среды; D/Dt — объективная производная тензоров по времени; r_{ij} — тензор вращений, компоненты которого z_{ij} зависят от обратимых деформаций и скоростей деформирования. Источник ε_{ij}^p в уравнении изменения тензора p_{ij} следует, как и в классической теории, называть компонентами тензора скоростей пластических деформаций. Согласно уравнениям (1.1) при разгрузке ($\varepsilon_{ij}^p = 0$) компоненты тензора необратимых деформаций изменяются так же, как при жестком движении тела. Компоненты тензора полных деформаций Альманси d_{ij} , выраженные через его составляющие e_{ij} и p_{ij} , представляются в виде

$$d_{ij} = e_{ij} + p_{ij} - e_{ik}e_{kj}/2 - e_{ik}p_{kj} - p_{ik}e_{kj} + e_{ik}p_{ks}e_{sj}. \quad (1.2)$$

Напряжения в среде полностью определяются обратимыми деформациями и согласно законам термодинамики в случае несжимаемой среды связаны с ними зависимостями

$$\sigma_{ij} = \begin{cases} -p\delta_{ij} + \frac{\partial W}{\partial d_{ik}}(\delta_{kj} - 2d_{kj}), & p_{ij} \equiv 0, \\ -p_1\delta_{ij} + \frac{\partial W}{\partial e_{ik}}(\delta_{kj} - e_{kj}), & p_{ij} \neq 0. \end{cases} \quad (1.3)$$

Здесь p, p_1 — добавочные гидростатические давления. Считая среду изотропной, упругий потенциал W представим в виде

$$\begin{aligned}
W &= -2\mu J_1 - \mu J_2 + bJ_1^2 + (b - \mu)J_1 J_2 - \chi J_1^3 + \dots, \\
J_k &= \begin{cases} L_k, & p_{ij} \equiv 0, \\ I_k, & p_{ij} \neq 0, \end{cases} & (1.4)
\end{aligned}$$

$$L_1 = d_{kk}, \quad L_2 = d_{ik}d_{ki}, \quad I_1 = e_{kk} - e_{sk}e_{ks}/2, \quad I_2 = e_{st}e_{ts} - e_{sk}e_{kt}e_{ts} + e_{sk}e_{kt}e_{tn}e_{ns}/4$$

(μ, b, χ — упругие постоянные среды). Такой выбор инвариантов I_1, I_2 тензора обратимых деформаций обеспечивает предельный переход от второй зависимости в (1.3) к первой при стремлении необратимых деформаций к нулю.

Будем считать, что необратимые деформации в материале накапливаются при достижении напряженным состоянием поверхности нагружения, которая в силу принципа максимума Мизеса является пластическим потенциалом. В качестве такой поверхности будем использовать условие пластичности Треска, обобщенное на случай деформирования с учетом вязких свойств материала [6, 7], в виде

$$\max |\sigma_i - \sigma_j| = 2k + 2\eta \max |\varepsilon_k^p|, \quad (1.5)$$

где k — предел текучести; η — вязкость; $\sigma_i, \varepsilon_k^p$ — главные значения тензоров напряжений и скоростей пластических деформаций.

Скорости необратимых деформаций связаны с напряжениями ассоциированным законом пластического течения

$$\varepsilon_{ij}^p = \lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}, \quad f(\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}^p) = k, \quad \lambda > 0. \quad (1.6)$$

2. Упругое равновесие. Пусть упруговязкопластичный материал, свойства которого описываются зависимостями, приведенными выше, заполняет пространство между двумя цилиндрическими матрицами с жесткими стенками. Рассмотрим деформирование данного материала при повороте внутреннего жесткого цилиндра радиусом $r = r_0$ и неподвижном внешнем цилиндре радиусом $r = R_0$. Таким образом, в цилиндрической системе координат (r, φ, z) граничное условие имеет вид

$$\mathbf{u}|_{r=R_0} = 0. \quad (2.1)$$

Будем считать, что в рассматриваемом случае все точки среды, в том числе граничные, движутся по окружностям. Тогда составляющие вектора перемещений имеют вид

$$u_r = r(1 - \cos \theta), \quad u_\varphi = r \sin \theta,$$

где $\theta = \theta(r, t)$ — центральный угол закручивания.

При увеличении угла θ сначала происходит только упругое деформирование. При достижении некоторого значения $\theta_0 = \theta(t_0)$ в окрестности внутренней жесткой стенки начинается пластическое течение. Полагая далее $t_0 = 0$, вычислим параметры напряженно-деформированного состояния в этот момент времени.

В рассматриваемом случае отличными от нуля компонентами тензора Альманси являются следующие:

$$d_{rr} = -\frac{1}{2} g^2, \quad d_{r\varphi} = \frac{1}{2} g, \quad g = r \frac{\partial \theta}{\partial r}. \quad (2.2)$$

Согласно зависимостям (1.3) и (1.4) компоненты напряжений с точностью до слагаемых второго порядка по деформациям вычисляются по соотношениям

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} = \sigma_{zz} &= -(p + 2\mu) - (b + \mu)g^2/2 = -s, \\ \sigma_{\varphi\varphi} &= -s + \mu g^2, \quad \sigma_{r\varphi} = \mu g. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Используя граничное условие (2.1) и условие пластичности в виде

$$(\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi})^2 + 4\sigma_{r\varphi}^2 = 4k^2,$$

из условий равновесия

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}}{r} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_{r\varphi}}{\partial r} + 2 \frac{\sigma_{r\varphi}}{r} = 0$$

найдем угол поворота θ_0 , при котором начинается пластическое течение:

$$\theta_0 = \frac{k}{2\mu} \left(1 - \frac{r_0^2}{R_0^2} \right). \quad (2.4)$$

В условиях упругого равновесия компоненты напряжений определяются зависимостями

$$\sigma_{rr} = \sigma_{zz} = \frac{k^2}{4\mu} \left(1 - \frac{r_0^4}{r^4} \right) + \sigma_0, \quad \sigma_{\varphi\varphi} = \frac{k^2}{4\mu} \left(1 + 3 \frac{r_0^4}{r^4} \right) + \sigma_0, \quad \sigma_{r\varphi} = -k \frac{r_0^2}{r^2},$$

где σ_0 — значение компоненты напряжений σ_{rr} на поверхности $r = r_0$ в момент начала пластического течения. Можно считать, что $\sigma_0 = 0$.

Из соотношения (1.2) найдем необходимые для дальнейших вычислений зависимости

$$e_{r\varphi} = d_{r\varphi} = -\frac{1}{2} \frac{k}{\mu} \frac{r_0^2}{r^2}, \quad e_{rr} = -\frac{3}{2} e_{r\varphi}^2, \quad e_{\varphi\varphi} = \frac{1}{2} e_{r\varphi}^2. \quad (2.5)$$

3. Необратимое деформирование. Начиная с момента времени $t = t_0 = 0$ при увеличении угла поворота в окрестности внутреннего жесткого цилиндра развивается область вязкопластического течения $r_0 \leq r \leq r_1(t)$ ($r_1(t)$ — движущаяся граница области пластического течения, отделяющая ее от зоны упругого деформирования $r_1(t) \leq r \leq R_0(t)$).

Согласно зависимостям (1.1), (1.2) кинематика среды определяется соотношениями

$$\begin{aligned} u_r &= r(1 - \cos \theta(r, t)), & u_\varphi &= r \sin \theta(r, t), \\ v_\varphi &= r \frac{\partial \theta}{\partial t}, & \varepsilon_{r\varphi} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_\varphi}{\partial r} - \frac{v_\varphi}{r} \right) = \frac{\partial d_{r\varphi}}{\partial t} = \frac{1}{2} r \frac{\partial^2 \theta}{\partial r \partial t}, \\ \varepsilon_{r\varphi} &= \varepsilon_{r\varphi}^e + \varepsilon_{r\varphi}^p = \frac{\partial e_{r\varphi}}{\partial t} + \frac{\partial p_{r\varphi}}{\partial t}, \\ \varepsilon_{rr}^p &= \frac{\partial p_{rr}}{\partial t} + 2p_{r\varphi}(r_{\varphi r} + \varepsilon_{r\varphi}^p), & \varepsilon_{\varphi\varphi}^p &= \frac{\partial p_{\varphi\varphi}}{\partial t} + 2p_{r\varphi}(r_{r\varphi} + \varepsilon_{r\varphi}^p), \\ \varepsilon_{rr}^p &= -\varepsilon_{\varphi\varphi}^p = -2\varepsilon_{r\varphi}^p e_{r\varphi}. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Интегрируя уравнения равновесия (квазистатическое приближение) в области обратимого деформирования, с использованием условия (2.1) найдем

$$\sigma_{r\varphi} = \frac{c(t)}{r^2}, \quad \theta(r, t) = \frac{c(t)}{2\mu} \left(\frac{1}{R_0} - \frac{1}{r^2} \right), \quad (3.2)$$

где $c(t)$ — неизвестная функция интегрирования.

Из второго соотношения в (1.3) для компонент напряжений в области вязкопластического течения $r_0 \leq r \leq r_1(t)$ получим

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} = \sigma_{zz} &= -(p_1 + 2\mu) - 2(b + \mu)e_{r\varphi}^2 = -s_1(t), \\ \sigma_{\varphi\varphi} &= -s_1(t) + 4\mu e_{r\varphi}^2, & \sigma_{r\varphi} &= 2\mu e_{r\varphi}. \end{aligned} \quad (3.3)$$

При записи выражений (3.3) использовались кинематические зависимости (2.5). В то же время, интегрируя уравнения равновесия, получаем

$$\sigma_{r\varphi} = \frac{m(t)}{r^2}, \quad e_{r\varphi} = \frac{m(t)}{2\mu r^2}. \quad (3.4)$$

Из условий непрерывности компонент напряжений на границе области упругопластического течения $r = r_1(t)$ следует

$$m(t) = c(t), \quad s(t) = s_1(t).$$

Условие пластического течения (1.5) записывается в виде

$$\sigma_{r\varphi}^2 - (k + \eta|\varepsilon_{r\varphi}^p|)^2 = 0. \quad (3.5)$$

Согласно ассоциированному закону пластического течения (1.6) и условию (3.5) получаем

$$\sigma_{r\varphi} = -k + \eta\varepsilon_{r\varphi}^p, \quad \lambda = -\varepsilon_{r\varphi}^p / (k - \eta\varepsilon_{r\varphi}^p). \quad (3.6)$$

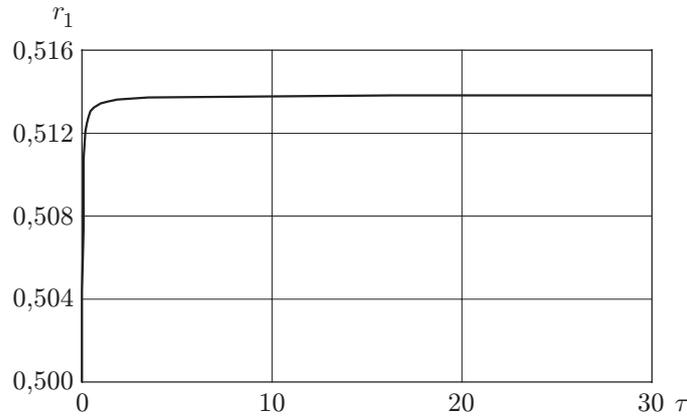


Рис. 1. Граница $r_1(\tau)$ области вязкопластического течения при повороте внутреннего цилиндра ($r_0/R_0 = 0,5$)

Используя (3.4) и (3.6), можно вычислить скорость пластической деформации

$$\varepsilon_{r\varphi}^p = \frac{1}{\eta} \left(\frac{c(t)}{r^2} + k \right).$$

С учетом второго равенства в (3.4) из кинематических зависимостей (3.1), используя условие непрерывности функции $\theta(r, t)$ на границе области вязкопластического течения $r = r_1(t)$, для области необратимого деформирования находим

$$\theta(r, t) = \frac{c(t)}{2\mu} \left(\frac{1}{R_0^2} - \frac{1}{r^2} \right) + \frac{c_1(t)}{\eta} \left(\frac{1}{r_1^2(t)} - \frac{1}{r^2} \right) + \frac{2kt}{\eta} \ln \frac{r}{r_1(t)}, \quad c_1(t) = \int c(t) dt.$$

Условие непрерывности производной $\partial\theta/\partial r$ на границе $r = r_1(t)$ и условие нагружения на границе $r = r_0$ позволяют вычислить функции $c(t)$ и $c_1(t)$ и получить обыкновенное дифференциальное уравнение для $r_1(t)$:

$$c_1(t) = -ktr_1^2, \quad c(t) = -k(r_1^2 + 2r_1\dot{r}_1t), \quad \dot{r}_1 = \frac{dr_1}{dt},$$

$$\dot{r}_1 = \left[\frac{kr_1^2}{2\mu} \left(\frac{1}{R_0^2} - \frac{1}{r_0^2} \right) + \frac{kt}{\eta} \left(1 - \frac{r_1^2}{r_0^2} - 2 \ln \frac{r_0}{r_1} \right) + \theta(r_0, t) \right] / \left[\frac{kt}{\mu} \left(\frac{1}{r_0^2} - \frac{1}{R_0^2} \right) \right].$$

Развитие зоны вязкопластического течения $r_1(\tau) = r_1(t)/R_0$ во времени ($\tau = \alpha t$) при значениях постоянных $\alpha\eta/\mu = 0,001$, $r_0/R_0 = 0,5$, $k/\mu = 0,00621$ показано на рис. 1. При увеличении угла поворота (для численного решения выбран линейный закон $\theta(r_0, t) = \theta_0(1 + \alpha t)$) функция $r_1(t)$ асимптотически приближается к некоторому значению, зависящему от свойств материала.

По найденной функции $r_1(t)$ определяются функция $\theta(r, t)$, напряжения, полные и обратимые деформации как в области обратимого деформирования, так и в области вязкопластического течения. Согласно формуле (1.2), в которой полные деформации разделяются на обратимые и необратимые, компоненты пластических деформаций определяются зависимостями

$$p_{r\varphi} = \frac{kt}{\eta} \left(1 - \frac{r_1^2}{r^2} \right), \quad p_{\varphi\varphi} = 2e_{r\varphi}p_{r\varphi}, \quad p_{rr} = 2dr_{\varphi}(e_{r\varphi} - dr_{\varphi}).$$

4. Разгрузка и течение при повороте цилиндра в противоположном направлении. При остановке внутреннего цилиндра ($\theta = \theta_1$) в некоторый момент времени $t = t_1$ граница области вязкопластического течения определяется значением $r_1 = r_1(t_1)$. Если далее угол поворота не увеличивать, то данное значение не изменяется. При этом неизменными остаются также компоненты деформаций, а следовательно, и напряжений. Если процесс деформирования закончен, то такие деформации и напряжения являются остаточными.

Выясним, как будет изменяться напряженно-деформированное состояние, если начиная с момента времени $t = t_1$ (или любого момента $t > t_1$) внутренний цилиндр поворачивать в противоположном направлении.

При $\theta < \theta_2$ в материале происходит только обратимое деформирование. Начиная с момента времени $t = t_2$ в окрестности внутреннего жесткого цилиндра напряженное состояние выходит на поверхность нагружения:

$$\sigma_{r\varphi}(r_0) = k. \quad (4.1)$$

Иными словами, компонента напряжений $\sigma_{r\varphi} = c(t)/r^2$ сначала уменьшается по абсолютной величине, а затем (при $\theta(t_*) = \theta_*$) возрастает, до тех пор пока в окрестности внутренней поверхности не будет выполняться условие пластичности (4.1) и не начнет развиваться новая область пластического течения. Из равенства $\sigma_{r\varphi}|_{\theta=\theta_*} = 0$ получаем $c(t_*) = 0$. Следовательно, в случае, когда угол поворота граничной поверхности $r = r_0$ равен θ_* , напряжение $\sigma_{r\varphi}$ оказывается равным нулю не только на этой поверхности, но и во всей области деформирования (как в области упругого деформирования, так и в области вязкопластического течения).

Для нахождения значения θ_* и значения θ_2 , определяющего начало пластического течения, необходимо решить задачу упругого равновесия с накопленными необратимыми деформациями. В области обратимого деформирования $r_1 \leq r \leq R_0$ компоненты деформаций и напряжений определяются зависимостями (2.2) и (2.3), а значение $\theta(r, t)$ — зависимостью (3.2). Учитывая, что до момента начала пластического течения компонента $p_{r\varphi}$ тензора пластических деформаций не изменяется ($\varepsilon_{r\varphi}^p = 0$), в области с накопленными необратимыми деформациями определим функцию $\theta(r, t)$ из условия $d_{r\varphi} = e_{r\varphi} + p_{r\varphi}$ и условия непрерывности $\theta(r, t)$ при $r = r_1$:

$$\theta(r, t) = \frac{2kt_1}{\eta} \left(\ln \left(\frac{r}{r_1} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{r_1^2}{r^2} - 1 \right) \right) + \frac{c(t)}{2\mu} \left(\frac{1}{R_0^2} - \frac{1}{r^2} \right). \quad (4.2)$$

Отметим, что хотя компоненты p_{rr} и $p_{\varphi\varphi}$ изменяются, тензор необратимых деформаций при этом остается неизменным. Из равенств (4.1), (4.2) и $c(t_*) = 0$ определим углы θ_* и θ_2 :

$$\theta_* = \frac{2kt_1}{\eta} \left(\ln \left(\frac{r_0}{r_1} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{r_1^2}{r_0^2} - 1 \right) \right), \quad \theta_2 = \theta_* - \frac{k}{2\mu} \left(1 - \frac{r_0^2}{R_0^2} \right). \quad (4.3)$$

При дальнейшем уменьшении угла θ для определения компонент напряжений уравнения равновесия необходимо проинтегрировать в трех областях: области обратимого деформирования $r_1 \leq r \leq R_0$, области с неизменяющимся тензором необратимых деформаций $r_2(t) \leq r \leq r_1$ и области пластического течения $r_0 \leq r \leq r_2(t)$. В первых двух областях, как и выше, компоненты напряжений и функция $\theta(r, t)$ определяются соотношениями (3.2), (3.4) и (4.2), в которых функцию $c(t)$ нужно заменить ее текущим значением $x(t)$. В области пластического течения $r_0 \leq r \leq r_2(t)$, используя зависимости (3.4) и условие пластичности (3.5), найдем

$$\sigma_{r\varphi} = k + \eta \varepsilon_{r\varphi}^p, \quad \varepsilon_{r\varphi}^p = \frac{1}{\eta} \left(\frac{x(t)}{r^2} - k \right). \quad (4.4)$$

Из кинематических зависимостей (3.1) и условия непрерывности $\theta(r, t)$ при $r = r_2(t)$, используя (4.4), для области пластического течения получим

$$\theta(r, t) = \frac{x(t)}{2\mu} \left(\frac{1}{R_0^2} - \frac{1}{r_1^2} \right) + \frac{kt_1}{\eta} \left(\ln \left(\frac{r_2(t)}{r_1} \right) + \frac{r_1^2}{r_2^2(t)} - 1 \right) - \frac{1}{\eta} \left(2kt \ln \left(\frac{r}{r_2(t)} \right) + x_1(t) \left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{r_2^2(t)} \right) \right),$$

$$x_1(t) = \int x(t) dt.$$

Используя условие непрерывности функции $\partial\theta/\partial r$ при $r = r_2$, определим неизвестные функции $x(t)$, $x_1(t)$ и получим дифференциальное уравнение для $r_2(t)$:

$$x_1(t) = k(t_1 + t)r_2^2 - kt_1r_1^2, \quad x(t) = 2kr_2\dot{r}_2(t_1 + t) + kr_2^2,$$

$$\theta(r_0, t) = \frac{2kr_2\dot{r}_2(t_1 + t) + kr_2^2}{2\mu} \left(\frac{1}{R_0^2} - \frac{1}{r_0^2} \right) + \frac{kt_1}{\eta} \left(2 \ln \left(\frac{r_2}{r_1} \right) + \frac{r_1^2}{r_2^2} - 1 \right) -$$

$$- \frac{1}{\eta} \left[2kt \ln \left(\frac{r_0}{r_2} \right) + k((t_1 + t)r_2^2 - t_1r_1^2) \left(\frac{1}{r_0^2} - \frac{1}{r_2^2} \right) \right]. \quad (4.5)$$

Уравнение (4.5) необходимо решать до момента времени $t = t_3$, в который поверхность $r_2(t_3)$ выходит на поверхность $r = r_1$.

Начиная с момента времени $t = t_3$ в материале остаются две области: область вязкопластического течения $r_0 \leq r \leq r_2 = r_1$ и область обратимого деформирования $r_1 = r_2 \leq r \leq R_0$. Для того чтобы проследить дальнейшее движение границы области вязкопластического течения $r_2(t)$, необходимо, как и выше, интегрируя уравнения равновесия, определить параметры напряженно-деформированного состояния в обеих областях. В области обратимого деформирования функция $\theta(r, t)$ находится из соотношения (3.2) (с текущим значением $x(t)$ функции $c(t)$). В области вязкопластического течения, используя кинематические зависимости (3.1), соотношения (4.4) и условие непрерывности $\theta(r, t)$ при $r = r_2(t)$, найдем

$$\theta(r, t) = \frac{x(t)}{2\mu} \left(\frac{1}{R_0^2} - \frac{1}{r^2} \right) + \frac{2kt}{\eta} \ln \left(\frac{r_2}{r} \right) + \frac{x_1(t)}{\eta} \left(\frac{1}{r_2^2} - \frac{1}{r^2} \right).$$

Для нахождения функций $x(t)$ и $x_1(t)$ необходимо использовать условие непрерывности функции $\partial\theta/\partial r$ при $r = r_2(t)$. В результате получим

$$x_1(t) = ktr_2^2, \quad x(t) = \dot{x}_1(t) = kr_2^2 + 2ktr_2\dot{r}_2. \quad (4.6)$$

Компоненты вектора перемещений (функция $\theta(r, t)$) должны быть непрерывны в любой момент времени. Следовательно, в момент времени $t = t_3$ условие непрерывности должно выполняться для функций $x_1(t)$ и $x(t)$. Сравнение зависимостей (4.5) и (4.6) показывает, что непрерывность функции $x(t)$ возможна только в случае $\dot{r}_2(t) = 0$. Таким образом, с момента $t = t_3$ выхода поверхности $r_2(t)$ на первоначальную поверхность, ограничивающую область с накопленными необратимыми деформациями, область вязкопластического течения в дальнейшем не развивается, несмотря на увеличение угла поворота. При этом компоненты пластических деформаций изменяются в области $r_0 \leq r \leq r_2$, оставаясь равными нулю на границе упруговязкопластического течения $r = r_2$. Как и в случае, описанном в п. 3, при остановке внутреннего цилиндра в любой момент времени $t > t_3$ компоненты деформаций и напряжений остаются неизменными.

5. Деформирование при повороте внешней цилиндрической поверхности.

Рассмотрим деформирование упруговязкопластичного материала при повороте внешнего жесткого цилиндра, когда внутренний цилиндр остается неподвижным:

$$\mathbf{u}|_{r=r_0} = 0. \quad (5.1)$$

В данном случае пластическое течение также начинается в окрестности внутренней жесткой стенки при выходе напряженного состояния на поверхность нагружения (1.5). Такое условие пластичности записывается в форме (4.1). Угол поворота θ_0 и компоненты напряжений в момент начала пластического течения найдем из условия (5.1) и условия пластичности (4.1). Значение θ_0 будет таким же, как и в случае поворота внутреннего цилиндра (см. (2.4)), компоненты напряжений вычисляются по соотношениям

$$\sigma_{rr} = \sigma_{zz} = \frac{k^2 r_0^4}{4\mu} \left(\frac{1}{R_0^4} - \frac{1}{r^4} \right) + \sigma_0, \quad \sigma_{\varphi\varphi} = \frac{k^2 r_0^4}{4\mu} \left(\frac{1}{R_0^4} + \frac{3}{r^4} \right) + \sigma_0, \quad \sigma_{r\varphi} = k \frac{r_0^2}{r^2}.$$

При дальнейшем увеличении угла поворота область вязкопластического течения определяется неравенствами $r_0 \leq r \leq r_1(t)$. В области $r_1(t) \leq r \leq R_0$ происходит обратимое деформирование. Кинематика среды определяется соотношениями (3.1). Согласно уравнениям равновесия в области обратимого деформирования

$$\theta(r, t) = \frac{x(t)}{2\mu} \left(\frac{1}{r_0^2} - \frac{1}{r^2} \right).$$

В области вязкопластического течения данная функция определяется из соотношений (4.4), кинематических зависимостей (3.1) и условия непрерывности $\theta(r, t)$ при $r = r_1(t)$:

$$\theta(r, t) = \frac{2}{\eta} \left(kt \ln \left(\frac{r_1}{r} \right) - \frac{x_1(t)}{2} \left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{r_1^2} \right) \right) + \frac{x(t)}{2\mu} \left(\frac{1}{r_0^2} - \frac{1}{r^2} \right).$$

Из условия непрерывности $\partial\theta/\partial r$ при $r = r_1(t)$ найдем функции $x(t)$ и $x_1(t)$ и получим дифференциальное уравнение для границы области вязкопластического течения:

$$\theta(R_0, t) = \frac{2r_1 \dot{r}_1 kt + r_1^2 k}{2\mu} \left(\frac{1}{r_0^2} - \frac{1}{r^2} \right) + \frac{kt}{\eta} \left(2 \ln \left(\frac{r_1}{r} \right) - \frac{r_1^2}{r^2} + 1 \right),$$

$$x_1(t) = ktr_1^2, \quad x(t) = k(r_1^2 + 2r_1 \dot{r}_1 t).$$

На рис. 2 показано развитие области вязкопластического течения при линейном законе нагружения и тех же значениях постоянных, для которых представлены результаты на рис. 1. В отличие от случая поворота внутреннего цилиндра граница области вязкопластического течения не имеет асимптоты и со временем достигает внешней граничной поверхности $r = R_0$.

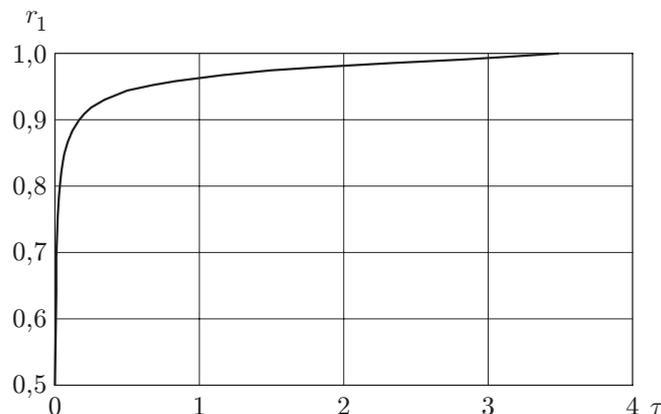


Рис. 2. Граница $r_1(\tau)$ области вязкопластического течения при повороте внешнего цилиндра ($r_0/R_0 = 0,5$)

При остановке внешнего цилиндра и повороте его в противоположном направлении наблюдаются те же эффекты, что и при повороте внутреннего цилиндра. Значение θ_2 , при котором напряженное состояние при повороте внешнего цилиндра в противоположном направлении выходит на поверхность нагружения $\sigma_{r\varphi}|_{r=r_0} = -k$, определяется соотношением (4.3), в котором следует положить

$$\theta_* = \frac{2kt_1}{\eta} \left(\ln \left(\frac{r_1}{R_0} \right) + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{r_1^2}{R_0^2} \right) \right).$$

Дифференциальное уравнение для границы $r_2(t)$ новой области вязкопластического течения принимает вид

$$\begin{aligned} \theta = \frac{2}{\eta} \left(kt \ln \left(\frac{r}{r_2} \right) + \frac{kr_2^2(t+t_1) - kt_1r_1^2}{2} \left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{r_2^2} \right) \right) + \frac{kt_1}{\eta} \left(2 \ln \left(\frac{r_1}{r_2} \right) - \frac{r_1^2}{r_2^2} + 1 \right) + \\ + \frac{2kr_2\dot{r}_2(t+t_1) + kr_2^2}{2\mu} \left(\frac{1}{r_0^2} - \frac{1}{r^2} \right). \end{aligned}$$

С момента выхода границы $r_2(t)$ на поверхность r_1 область вязкопластического течения не развивается.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Бахшиян Ф. А.** Вращение жесткого цилиндра в вязкопластичной среде // Прикл. математика и механика. 1948. Т. 12, вып. 6. С. 650–661.
2. **Огибалов П. М.** Нестационарные движения вязкопластичных сред / П. М. Огибалов, А. Х. Мирзаджанзаде. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1970.
3. **Сафрончик А. И.** Вращение цилиндра с переменной скоростью в вязкопластичной среде // Прикл. математика и механика. 1959. Т. 23, вып. 6. С. 998–1014.
4. **Буренин А. А., Быковцев Г. И., Ковтанюк Л. В.** Об одной простой модели для упруго-пластической среды при конечных деформациях // Докл. РАН. 1996. Т. 347, № 2. С. 199–201.
5. **Ковтанюк Л. В., Шитиков А. В.** О теории больших упругопластических деформаций материалов при учете температурных и реологических эффектов // Вестн. ДВО РАН. 2006. № 4. С. 87–93.
6. **Быковцев Г. И., Семькина Т. Д.** О вязкопластическом течении круглых пластин и оболочек // Изв. АН СССР. Механика и машиностроение. 1964. № 4. С. 68–76.
7. **Знаменский В. А., Ивлев Д. Д.** Об уравнениях вязкопластического тела при кусочно-линейных потенциалах // Изв. АН СССР. Отд-ние техн. наук. Механика и машиностроение. 1963. № 6. С. 114–118.

Поступила в редакцию 17/IV 2007 г.