

УДК 539.3:517.946

## О СХОДИМОСТИ МЕТОДОВ РАСЧЕТА И УСТОЙЧИВОСТИ САМОУРАВНОВЕШЕННЫХ НАПРЯЖЕНИЙ ПРИ УСАДКЕ ШАРОВЫХ ВКЛЮЧЕНИЙ ИЗ ПОВРЕЖДАЮЩЕГОСЯ МАТЕРИАЛА

В. В. Стружанов, В. В. Башуров

Институт машиноведения УрО РАН, 620219 Екатеринбург

Предлагается несколько итерационных методов расчета самоуравновешенных напряжений при усадке заключенного в сферическую матрицу шарового включения из физически нелинейного повреждающегося материала. Методами теории катастроф исследована устойчивость данной системы. Установлено, что начало расходимости предложенных итерационных процессов совпадает с моментом ее перехода в неустойчивое положение равновесия.

**Ключевые слова:** устойчивость, самоуравновешенные напряжения, повреждающийся материал.

**Введение.** Ряд технологических операций изготовления композитов вызывает усадку включений (наполнителя), иногда настолько большую, что растягивающие деформации включений достигают величин, при которых их материал из-за возникновения множественных дефектов переходит на неустойчивую закритическую стадию деформирования (стадию разупрочнения). При макроскопическом описании поведения материала на этой стадии постулат устойчивости Друккера не выполняется [1]. Отметим, что ярко выраженным свойством деформационного разупрочнения обладают структурно-неоднородные материалы, такие как композиты, бетон, геоматериалы и т. п. [2–4].

Появление областей физически неустойчивого материала может привести к тому, что положение равновесия всей системы станет неустойчивым и при бесконечно малом возмущении она скачкообразно перейдет в ближайшее устойчивое положение равновесия. В результате такого скачка включения могут разрушиться.

Очевидно, что сходящийся итерационный процесс расчета полей самоуравновешенных напряжений определяет устойчивое положение равновесия системы. Если процесс расходится, то связь этого явления с физическим состоянием тела, как правило, трудно установить.

В данной работе рассмотрен ряд итерационных процедур расчета самоуравновешенных напряжений, возникающих при усадке шарового включения из физически нелинейного материала, расположенного в шаровой матрице.

**1. Расчетная модель и свойства материала.** Рассмотрим композит, состоящий из упругой матрицы и наполнителя в виде шаровых включений из нелинейного материала. После изготовления композита включения получают усадку, которая определяется отрицательной объемной деформацией  $e^*$  при отсутствии связей включения с шаровой областью. Так как окружающая матрица препятствует свободному изменению объема включений, в композите возникает самоуравновешенное поле остаточных напряжений, при этом включения растягиваются. Если включения расположены достаточно редко, то поля напряжений и деформаций возле них практически не оказывают влияния друг на друга. В этом случае в качестве расчетной модели можно принять шар, который состоит из внутреннего шара

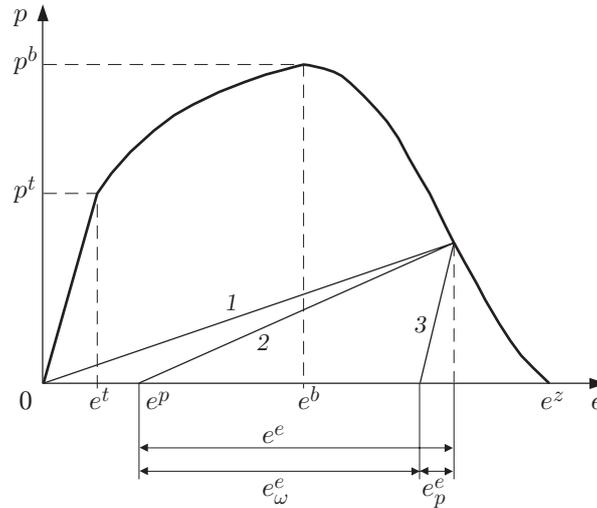


Рис. 1

(включения) с радиусом  $a$  (область  $V_a$ ) и окружающей его толстостенной сферы (матрицы) с внешним радиусом  $b$  (область  $V_b$ ). Полагаем, что материал сферы при нагружении всегда остается в упругом состоянии с модулем Юнга  $E$ , коэффициентом Пуассона  $\nu$ , объемным модулем  $K$ . Те же характеристики имеет материал включения на стадии упругости.

Так как в данной расчетной модели после усадки внутреннего шара в нем возникает всестороннее растяжение, для описания свойств материала достаточно получить полную диаграмму деформирования  $p-e$  ( $p$  — объемное напряжение;  $e$  — объемная деформация) (рис. 1). На диаграмме  $p^t, p^b, e^t, e^b$  — пределы пропорциональности и прочности при всестороннем растяжении и соответствующие объемные деформации;  $e^z$  — деформация разрушения. На стадиях упрочнения (восходящая после предела пропорциональности ветвь диаграммы  $p-e$ ) и разупрочнения (нисходящая ветвь) свойства материала определяет касательный (мгновенный) объемный модуль  $K^p = dp/de$  ( $K^p < K$ ).

При всестороннем растяжении макроскопические пластические деформации не возникают. Поэтому нелинейность диаграммы  $p(e)$  обусловлена повреждениями материала микротрещинами, микропорами и т. п. В этом случае возможны два варианта разгрузки: 1) без остаточных деформаций с секущим модулем  $K^s = p/e$  (линия 1 на рис. 1), когда повреждения абсолютно хрупкие; 2) с образованием незначительных остаточных деформаций  $e^p$  и модулем разгрузки  $K^u = p/(e - e^p)$ ,  $K^u < K$  (линия 2 на рис. 1), если возле повреждений, например в вершинах микротрещин, образуются локальные микропластические зоны.

Проводя рассуждения, аналогичные изложенным в [5, 6], получаем соотношение

$$p = K(1 - \omega)(e - e^p), \tag{1.1}$$

где параметр  $\omega$  характеризует повреждение материала микродефектами:

$$\omega = 1 - K^u/K. \tag{1.2}$$

Используя выражение (1.1), находим

$$dp = K(1 - \omega)(de - de^p) - K(e - e^p) d\omega.$$

В то же время справедливо соотношение для приращений  $dp = K^p de$ . Следовательно,

$$(e - e^p) \frac{d\omega}{de} + \omega \left( 1 - \frac{de^p}{de} \right) = 1 - \frac{K^p}{K} - \frac{de^p}{de}. \tag{1.3}$$

Если остаточные деформации не возникают, то формула (1.3) принимает вид

$$e \frac{d\omega}{de} + \omega = 1 - \frac{K^p}{K}. \quad (1.4)$$

Уравнение (1.3) определяет кинетику поврежденности и остаточной деформации, уравнение (1.4) — кинетику поврежденности при отсутствии остаточной деформации. Непосредственно проверяется, что выражение (1.2) является решением уравнения (1.3), а при  $K^u = K^s$  — решением уравнения (1.4).

После умножения равенства (1.3) на  $de$  его можно записать в виде  $de_\omega^e = d[\omega(e - e^p)] = de_\omega^p - de^p$ , где

$$de_\omega^p = (1 - K^p/K) de \quad (1.5)$$

приращение псевдопластической деформации в случае, если  $K^u = K$  (линия 3 на рис. 1). Аналогичное представление имеет выражение (1.4):  $de_\omega = de_\omega^p$ , где  $e_\omega = \omega e$ .

Использованное в приведенных выше рассуждениях разбиение полной деформации  $e$  на составляющие  $e^p$ ,  $e_p^e = p/K$ ,  $e^e = p/K^u = e - e^p$ ,  $e_\omega^e = \omega e^e$  показано на рис. 1.

Записав уравнение (1.1) с использованием указанных составляющих деформаций, получим

$$p = K[e - e^p - \omega(e - e^p)] = K[e - (e^p + e_\omega^e)] = K(e - e_\omega^p), \quad (1.6)$$

где  $e_\omega^p$  — полная псевдопластическая деформация, определяемая разгрузкой с модулем  $K$ . Ее изменение зависит от изменения  $e^p$  и  $\omega$  и описывается уравнением (1.3) (или (1.4)), а формально — равенством (1.5).

**2. Исходная краевая задача.** Для получения определяющего соотношения в области  $V_a$ , учитывающего ее усадку, представим внутренний шар свободным от связей и зададим усадочную деформацию  $e^*$ . В результате точки границы получают радиальные перемещения, направленные к центру шара и равные  $e^*a$ . Вновь объединим области  $V_a$  и  $V_b$ . После установления равновесия точки внутренней границы области  $V_b$  получают перемещения  $e''a$ , направленные от центра. Очевидно, что  $e^*a + e''a = e'a$ . Таким образом, шар  $V_a$  получает объемную деформацию растяжения  $e''$ , которая связана с напряжением  $p''$  соотношением (1.1). Итак, в области  $V_a$  справедливо соотношение

$$p'' = K(1 - \omega)(e'' - e^p) = K(1 - \omega)(e' - e^* - e^p). \quad (2.1)$$

В области  $V_b$ , где усадка отсутствует, выполняются равенства

$$\begin{aligned} \sigma_r'' &= E[(1 - \nu)\varepsilon_r' + 2\nu\varepsilon_\theta']/(mn), & \sigma_\theta'' &= E(\nu\varepsilon_r' + \varepsilon_\theta')/(mn), \\ \sigma_\varphi'' &= \sigma_\theta'', & \varepsilon_\varphi' &= \varepsilon_\theta', \end{aligned} \quad (2.2)$$

где  $m = 1 + \nu$ ;  $n = 1 - 2\nu$ ;  $\sigma_r$ ,  $\sigma_\theta$ ,  $\sigma_\varphi$ ,  $\varepsilon_r$ ,  $\varepsilon_\theta$ ,  $\varepsilon_\varphi$  — напряжения и деформации в сферической системе координат, начало которой совпадает с центром внутреннего шара; двумя штрихами отмечены самоуравновешенные напряжения, одним штрихом — деформации, удовлетворяющие условиям совместности.

К соотношениям (2.1) и (2.2) следует добавить уравнение равновесия

$$\frac{d\sigma_r''}{dr} + 2 \frac{\sigma_r'' - \sigma_\theta''}{r} = 0,$$

соотношения Коши

$$\varepsilon_r' = \frac{du}{dr}, \quad \varepsilon_\theta' = \frac{u}{r}$$

( $u$  — радиальное перемещение) и граничные условия  $\sigma_r''|_{r=b} = 0$  (внешняя граница свободна от напряжений),  $u|_{r=0} = 0$  (центральная точка не перемещается). В результате при

заданных  $e^*$ ,  $e^p$ ,  $\omega$  имеем замкнутую систему уравнений для определения напряженно-деформированного состояния.

**3. Итерационный процесс с использованием псевдопластической деформации.** Трудность решения сформулированной выше задачи заключается в том, что деформация  $e^p$  и поврежденность  $\omega$  заранее неизвестны. Их значения зависят от возникающих деформаций, которые в свою очередь зависят от  $e^p$  и  $\omega$ . Следовательно, имеет место связанная краевая задача. Для решения такой задачи необходимо применять специальные итерационные методы.

Рассмотрим метод, основанный на использовании псевдопластической деформации. Используя при выводе определяющего соотношения для области  $V_a$  формулу (1.6), получим соотношение

$$p'' = K(e' - e^* - e_\omega^p).$$

Разобьем исходную задачу на основную задачу с определяющим законом

$$p'' = K(e' - e^*)$$

и корректирующую задачу с законом

$$p'' = K(e' - e_\omega^p).$$

К этим соотношениям добавим формулы (2.2) для области  $V_b$ , уравнения равновесия, соотношения Коши и граничные условия, приведенные выше. Кроме того, корректирующую задачу дополним кинетическим уравнением (1.5).

Решение основной задачи определяет напряженно-деформированное состояние в абсолютно упругом составном шаре при усадке включения, решение корректирующей задачи дает напряженно-деформированное состояние в упругом теле, когда внутренний шар имеет остаточную псевдопластическую деформацию  $e_\omega^p$ . Очевидно, что при заданных значениях  $e^*$  и  $e_\omega^p$  решением исходной задачи является сумма решений основной и корректирующей задач.

Общий вид решения основной задачи дают формулы

$$\begin{aligned} p'' &= K(e' - e^*), & e' &= Ae^*, & u &= Ae^*r, & r &\in V_a, \\ \sigma_r'' &= Me^*(1 - b^3r^{-3}), & \sigma_\theta'' &= \sigma_\varphi'' = Me^*(1 + 0,5b^3r^{-3}), \\ \varepsilon_r' &= Ne^*(n - mb^3r^{-3}), & \varepsilon_\theta' &= \varepsilon_\varphi' = Ne^*(n + 0,5mb^3r^{-3}), \\ u &= Ne^*(nr + 0,5mb^3r^{-2}), & r &\in V_b. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Используя свойство непрерывности радиальных напряжений и перемещений, находим

$$M = \frac{2a^3E}{b^3(m+2n)}, \quad A = \frac{b^3m + 2a^3n}{b^3(m+2n)}, \quad N = \frac{M}{E}.$$

Решение корректирующей задачи при заданной величине  $e_\omega^p$  также определяется формулами (3.1) после замены деформации  $e^*$  на  $e_\omega^p$ .

Пусть при некотором значении  $e^* < 0$  составной шар находится в равновесии, при котором в области  $V_a$  псевдопластическая деформация, касательный объемный модуль, модуль разгрузки, поврежденность соответственно равны  $e_\omega^p$ ,  $K^p$ ,  $K^u$ ,  $\omega$ . В начальном положении напряженно-деформированное состояние в области  $V_a$  определяют скаляры  $e = e_\omega^p + e''$ ,  $p'' = Ke''$  (рис. 2), а в области  $V_b$  — вектор-функции деформаций  $\varepsilon' = (\varepsilon_r', \varepsilon_\theta', \varepsilon_\varphi')$  и напряжений  $\sigma'' = (\sigma_r'', \sigma_\theta'', \sigma_\varphi'')$ . Таким образом, напряженно-деформированное состояние всего составного шара можно определить следующими парами скаляров и векторов:  $\{e, \varepsilon'\}$ ,  $\{p'', \sigma''\}$ .

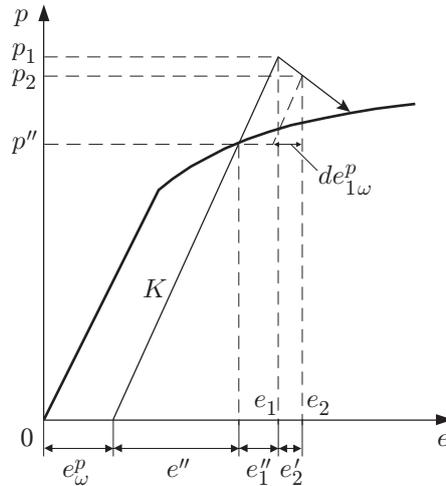


Рис. 2

Придадим включению дополнительную малую усадку  $\Delta e^*$  ( $\Delta e^* < 0$ ). По формулам (3.1), заменяя  $e^*$  на  $\Delta e^*$ , находим решение основной задачи  $p_1''$ ,  $e_1'' = e_1' - \Delta e^*$ ,  $\epsilon_1''$ ,  $\sigma_1''$ . В этом случае выражения  $\{p_1, \sigma_1\} = \{p'', \sigma''\} + \{p_1'', \sigma_1''\}$  и  $\{e_1, \epsilon_1\} = \{e, \epsilon'\} + \{e_1'', \epsilon_1''\}$  представляют собой первое приближение к решению исходной задачи для усадочной деформации  $e^* + \Delta e^*$ . Затем для значения  $e_1$  определяем характеристики материала  $K_1^p = K^p(e_1)$ ,  $K_1^u = K^u(e_1)$ ,  $\omega_1 = 1 - K_1^u/K$  в области  $V_a$ .

Далее, используя зависимость (1.5), в которую подставляем величины  $de = e_1''$  и  $K^p$ , вычисляем  $de_{1\omega}^p$ . По формулам (3.1), в которых полагаем  $e^* = de_{1\omega}^p$ , получаем решение корректирующей задачи  $\{e_2', \epsilon_2'\}$ ,  $\{p_2'', \sigma_2''\}$  и находим второе приближение  $\{p_2, \sigma_2\} = \{p_1, \sigma_1\} + \{p_2'', \sigma_2''\}$ ,  $\{e_2, \epsilon_2\} = \{e_1, \epsilon_1\} + \{e_2', \epsilon_2'\}$ . Для значения  $e_2$  определяем  $K_2^p = K^p(e_2)$ ,  $K_2^u = K^u(e_2)$ ,  $\omega_2 = 1 - K_2^u/K$ . Вновь по формулам (1.5), где  $de = e_2'$ ,  $K^p = K_2^p$ , вычисляем приращение  $de_{2\omega}^p$ ; по формулам (3.1), где  $e^* = de_{2\omega}^p$ , получаем следующее корректирующее решение и находим третье приближение, и т. д. Схематически этот итерационный процесс показан на рис. 2.

Сходимость метода определяет сходимость итерационного ряда для деформаций в области  $V_a$ . Имеем

$$e = e'' + (A - 1)\Delta e^* + \sum_{i=0}^{\infty} C_i, \quad (3.2)$$

где  $C_0 = A(1 - K_0^p/K)$ ;  $C_i = B_i C_{i-1}$ ;  $K_0^p = K^p$ ;  $B_i = A(1 - K_i^p/K)$ . Числовой ряд с положительными членами (3.2) сходится при  $B_i < 1$ . Если на каком-либо  $j$ -м шаге  $B_j = B_* = 1$  и, следовательно, касательный модуль достигает значения

$$K_*^p = -K \frac{2n(b^3 - a^3)}{b^3m + 2a^3n}, \quad (3.3)$$

то возможны два случая. В первом случае  $K_*^p = \min_e K^p$ . Тогда на всех последующих шагах  $B < 1$ . Во втором случае

$$K_*^p > \min_e K^p, \quad (3.4)$$

и на следующих шагах  $B > B_*$ , т. е. члены ряда начинают возрастать. Таким образом, равенство (3.3) является необходимым условием, а в совокупности с неравенством (3.4) — необходимым и достаточным условием, определяющим начало расходимости итерационного процесса.

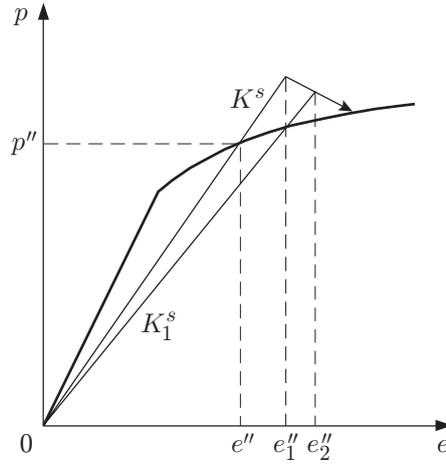


Рис. 3

В силу того что после достижения минимума модуль  $K^p$  возрастает, стремясь к предельному значению  $K^p(e^z) = 0$ , на каком-либо шаге вновь достигается равенство  $B = B_*$ , и с этого момента ряд (3.2) становится сходящимся.

Отметим, что значения параметров материала  $K^p$ ,  $K^u$ ,  $\omega$  в области  $V_a$  для рассчитанного положения равновесия равны значениям, полученным на последнем итерационном шаге.

**4. Итерационный метод для материала с абсолютно хрупкими повреждениями.** Используя закон (2.1) при  $e^p = 0$ , а именно

$$p'' = K^s(e' - e^*), \quad (4.1)$$

где  $K^s = K(1 - \omega)$  — секущий модуль, построим соответствующую итерационную процедуру.

Возьмем начальные положения равновесия, описанные выше, заменив  $K^u$  на  $K^s$  и  $e$  на  $e'' = e' - e^*$  (рис. 3). Возмутим эти положения, задав дополнительную усадку  $\Delta e^*$ . Считая систему упругой, найдем напряженно-деформированное состояние для общей усадки  $e_1^* = e^* + \Delta e^*$ . Оно определяется формулами (3.1) после замены определяющего соотношения в области  $V_a$  на закон (4.1) и деформации  $e^*$  на  $e_1^*$ . Неизвестные постоянные находим, используя непрерывность радиальных перемещений:

$$M = M_1(K^s) = 2a^3 K^s(e'')EH^{-1}, \quad A = A_1(K^s) = K^s(e'')hH^{-1}, \quad N = N_1 = M_1E^{-1},$$

где  $h = 2a^3n + mb^3$ ;  $H = K^s(e'')h + 2E(b^3 - a^3)$ . Для значения  $e_1'' = [A_1(K^s) - 1]e_1^*$  в области  $V_a$  определяем новые характеристики материала  $K_1^p = K^p(e_1'')$ ,  $K_1^s = K^s(e_1'')$ ,  $\omega_1 = 1 - K_1^s/K$  и решаем упругую задачу с этими параметрами. Имеем  $M = M_1(K_1^s)$ ,  $A = A_1(K_1^s)$ . По деформациям  $e_2'' = [A_1(K_1^s) - 1]e_1^*$  находим характеристики  $K_2^p = K^p(e_2'')$ ,  $K_2^s = K^s(e_2'')$ ,  $\omega_2 = 1 - K_2^s/K$  и вновь решаем упругую задачу, и т. д. Схематически эта итерационная процедура показана на рис. 3 и представляет собой простую итерационную схему

$$e_{n+1}'' = \psi(e_n''),$$

где  $\psi(e_n'') = [A_1(K^s(e_n'')) - 1]e_1^*$ . Известно, что метод сходится, если функция  $\psi$  удовлетворяет условию Липшица

$$|\psi(e_{n+1}'') - \psi(e_n'')| < k|e_{n+1}'' - e_n''|$$

с константой  $k < 1$  [7]. В этом случае реализуется принцип сжимающих отображений.



на  $K^u$  и  $e^*$  на сумму  $e_1^* + e^p$ . Определяя значения постоянных из условия непрерывности перемещений и радиальных напряжений, имеем  $A = A_1(K^u)$ ,  $M = M_1(K^u)$ . Тогда  $e_1'' = (A_1 - 1)(e_1^* + e^p)$  и полная деформация в области  $V_a$  равна  $e_1 = e^p + e_1''$  (рис. 4). Для значения  $e_1$  находим  $K_1^u = K^u(e_1)$ ,  $K_1^p = K^p(e_1)$ ,  $\omega_1 = 1 - K_1^u/K$  и полную остаточную деформацию  $e_1^p(e_1) = e_1 - p(e_1)/K_1^u$ . Фиксируя значение  $e_1^p$ , вновь используем формулы (3.1), где  $A = A_1(K_1^u)$ ;  $M = M_1(K_1^u)$ . Имеем  $e_2'' = (A_1 - 1)(e_1^* + e_1^p)$ ,  $e_2 = e_1^p + e_2''$ ,  $K_2^u = K^u(e_2)$ ,  $K_2^p = K^p(e_2)$ ,  $\omega_2 = 1 - K_2^u/K$ ,  $e_2^p(e_2) = e_2 - p(e_2)/K_2^u$ . Далее вычисления повторяются. Схематически эта итерационная процедура показана на рис. 4 и представляет собой простую итерационную схему

$$e_{n+1} = \varphi(e_n),$$

где  $\varphi(e_n) = A_1(K^u(e_n))(e_1^* + e_n^p) - e_1^*$ . Проверим выполнение условия Липшица. Находим

$$\frac{d\varphi}{de} = \frac{d}{de} \left( \frac{K^u(e)h(e_1^* + e^p(e))}{H(K^u)} \right) = \left[ \frac{dK^u}{de} h(e_1^* + e^p) 2E(b^3 - a^3) + K^u h H \frac{de^p}{de} \right] H^{-2}. \quad (5.1)$$

Выражение для  $de^p/de$  получаем из формулы (1.3) после подстановки в нее значения  $\omega$  из формулы (1.2):

$$\frac{de^p}{de} = 1 - \frac{K^p}{K^u} + \frac{e - e^p}{K^u} \frac{dK^u}{de}. \quad (5.2)$$

В положении равновесия также должно выполняться равенство

$$e' a = M_1(e_1^* + e^p)(na + 0,5mb^3a^{-2})E^{-1}, \quad (5.3)$$

где  $M_1 = 2a^3 K^u(e)E/H(K^u)$ ;  $e' = e_1^* + e$  ( $e_1^* < 0$ ,  $e > 0$ ). Тогда из выражения (5.3) следует

$$He = K^u e^p h - 2E(b^3 - a^3)e_1^*. \quad (5.4)$$

Подставляя выражения (5.2) и (5.4) в формулу (5.1), после необходимых преобразований получаем

$$\frac{d\varphi}{de} = \frac{K^u - K^p}{H} h = \frac{K^u h + 2E(b^3 - a^3) - K^p h - 2E(b^3 - a^3)}{H} = 1 - \frac{K^p h + 2E(b^3 - a^3)}{K^u h + 2E(b^3 - a^3)}.$$

Из анализа данного выражения следует, что условие Липшица не выполняется при  $K^p = K_*^p$  (см. (3.3)). Это условие является необходимым для начала расходимости процесса. Проводя рассуждения, аналогичные изложенным выше, выясняем, что процесс начинает расходиться при одновременном выполнении равенства (3.3) и неравенства (3.4). Отметим, что в конечном счете данный итерационный метод сходится, так как модуль  $K^p$  обязательно достигнет значений, больших  $K_*^p$ .

**6. Устойчивость самоуравновешенных напряжений.** Для определения физического смысла полученных условий расходимости рассмотренных выше итерационных процессов исследуем устойчивость самоуравновешенного поля напряжений, возникающего в результате усадки. Рассматривая составной шар как дискретную механическую систему, можно считать, что усадочная деформация  $e^*$  является задаваемым параметром управления, а перемещение точек границы внутреннего шара  $v$  — параметром состояния системы. Выражение для полной энергии шара запишем в виде двухпараметрической функции параметров управления и состояния

$$\Pi(v, \varepsilon^*) = 4\pi a^2 \int_0^v p(v/a) dv + 4\pi a \frac{Kn}{h} (b^3 - a^3)w^2,$$

где первое слагаемое — энергия деформаций внутреннего шара при перемещении точек его границы на величину  $v$ ; второе слагаемое — потенциальная энергия упругих деформаций

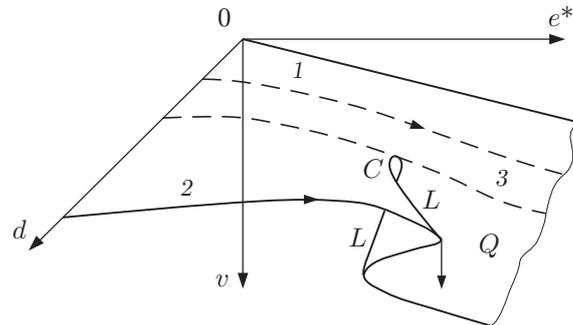


Рис. 5

внешней сферы при перемещении внутренней границы на величину  $w = e^*a + v$  и при условии, что внешняя граница свободна от напряжений.

Известно, что критические точки функции  $\Pi$ , определяемые из решения уравнения

$$\frac{d\Pi}{dv} = 4\pi a^2 p(v/a) + 8\pi a \frac{Kn}{h} (b^3 - a^3)(e^*a + v) = 0, \quad (6.1)$$

задают все положения равновесия системы [8]. В трехмерном пространстве с координатными осями  $e^*$ ,  $v$ ,  $d$  ( $d = b - a$ ) их совокупность образует поверхность  $Q$  — так называемую катастрофу сборки Уитни [8] (рис. 5). Дважды вырожденные точки, в которых происходит смена устойчивых положений равновесия на неустойчивые и наоборот, находятся из совместного решения уравнения (6.1) и уравнения, получающегося приравниванием к нулю детерминанта матрицы Гессе функции  $\Pi$  [8]:

$$\frac{d^2\Pi}{dv^2} = K^p + 2K(b^3 - a^3) \frac{n}{h} = 0, \quad (6.2)$$

и образуют линии сборки  $L$ . Трижды вырожденная критическая точка определяется из решения уравнений (6.1), (6.2) и уравнения

$$\frac{d^3\Pi}{dv^3} = \frac{dK^p}{dv} = \frac{dK^p}{de} \frac{1}{a} = 0. \quad (6.3)$$

Эта точка является началом сборки (точка  $C$  на рис. 5).

Если значение  $d$  мало, то при возрастании параметра управления  $e^*$  траектория равновесных состояний на поверхности  $Q$  не пересекает линии сборки (линия 1 на рис. 5) и все получающиеся положения равновесия полей напряжений устойчивы. Если траектория равновесных состояний на поверхности  $Q$  пересекает линию сборки (линия 2 на рис. 5), то система теряет устойчивость и скачкообразно переходит в новое положение равновесия (траектория с верхнего листа поверхности “прыгает” на нижний). Следовательно, при значении параметра управления, соответствующем точке пересечения линии сборки, самоуравновешенное напряженное состояние неустойчиво и любое его возмущение дополнительной малой усадкой приводит к потере устойчивости. Решая уравнение (6.2), находим, что в данный момент выполняется условие (3.3), т. е.  $K^p = K_*^p$ . Так как уравнение (6.3) при этом не удовлетворяется, то выполняется неравенство (3.4). Если траектория равновесных состояний на поверхности  $Q$  проходит через точку  $C$  (линия 3 на рис. 5), то потери устойчивости не происходит. Точка  $C$  определяется совместным решением уравнений (6.2) и (6.3). Отсюда следует, что значение  $K^p = K_*^p$  является минимальным и неравенство (3.4) не выполняется.

Таким образом, физический смысл условий расходимости итерационных процессов заключается в том, что началу их расходимости соответствует потеря устойчивости рав-

новесия составного шара и возмущаемое дополнительной малой усадкой поле самоуравновешенных напряжений (положений равновесия) является неустойчивым.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. **Работнов Ю. Н.** Механика деформируемого твердого тела. М.: Наука, 1988.
2. **Хорошун Л. П., Шикла Е. Н.** Деформирование композитных материалов при микроразрушениях // Прикл. механика. 1996. Т. 32, № 6. С. 52–58.
3. **Frantziskonis G., Desai C. S.** Constitutive model with strain softening // Intern. J. Solids Struct. 1987. V. 23, N 6. P. 733–750.
4. **Баклашов И. В.** Деформирование и разрушение породных массивов. М.: Недра, 1988.
5. **Стружанов В. В., Жижерин С. В.** Модель повреждающегося материала и итерационные методы расчета напряженного состояния при кручении // Вычисл. технологии. 2000. Т. 5, № 2. С. 92–104.
6. **Жижерин С. В., Стружанов В. В., Миронов В. И.** Итерационные методы расчета напряжений при чистом изгибе балки из повреждающегося материала // Вычисл. технологии. 2001. Т. 6, № 5. С. 24–33.
7. **Колмогоров А. Н., Фомин С. В.** Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1989.
8. **Гилмор Р.** Прикладная теория катастроф. М.: Мир, 1984. Кн. 1.

*Поступила в редакцию 2/XII 2002 г.*

---