

О ГИДРО- И ТЕРМОДИНАМИКЕ ВОЗДУШНЫХ ТОРНАДО И ОКЕАНСКИХ СМЕРЧЕЙ

М. В. Заволженский

(Ростов-Дон)

Существует несколько подходов для объяснения воздушного торнадо. Смерч от земли моделируется вихревой нитью, действующей с заданной интенсивностью перпендикулярно твердой стенке [1]. Для описания смерча из грозового облака привлекаются вспомогательные магнитогидродинамические гипотезы [2]. В последнее время построен ряд численных моделей воздушных смерчей [3—5] на основе точных уравнений Навье — Стокса. В данной работе использована модифицированная постановка задачи Коши — Пуассона о движении тяжелой вязкой несжимаемой жидкости с поверхностью разрыва плотности при двух упрощающих предположениях: 1) основная инерционная сила в смерче характеризуется трансверсальным ускорением; 2) на поверхности разрыва плотности заданы вертикальный градиент трансверсальной скорости и температурные возмущения, характеризующие перепад температуры между этой поверхностью и глубинными слоями жидкости. Вертикальные нормальные и радиальные касательные напряжения на этой поверхности отсутствуют. Поверхностью разрыва плотности среды может служить либо водная поверхность, либо граница атмосферного облака, либо граница резкого изменения плотности воздуха, вызванного пожаром, извержением вулкана и т. п. В пользу этих двух предположений говорят многочисленные радарные наблюдения за торнадо, которые прямо указывают, что образующие смерч механические и конвекционные движения имеют вихревую природу [6, 7]. Эти вихри и некоторые другие факторы (встречные ветровые течения у поверхности разрыва плотности, электромагнитное воздействие, термодинамические причины и т. п.) говорят о том, что основной силой инерции в смерче является трансверсальная инерция, а сам смерч возникает в результате взаимодействия поверхности разрыва плотности с вихревыми воздушными течениями над этой поверхностью. Это взаимодействие можно моделировать вертикальным градиентом трансверсальной скорости на поверхности разрыва. При этом причина, вызывающая вертикальный градиент, остается произвольной, и появляется возможность косвенного учета всей суммы вышеперечисленных факторов, которые, по-видимому [8], и обуславливают образование торнадо. Отметим, что полное отбрасывание сил инерции сильно искажает картину в смерче и позволяет (при заданной вихревой нагрузке) определить только одну трансверсальную скорость в этом сложном пространственном течении [9]. Для простоты пренебрегаем влиянием на торнадо земной поверхности. Тогда атмосферные торнадо и морские смерчи будут отличаться только значениями гидро- и термодинамических параметров и укладываться в следующую схему.

Предположим, что тяжелая вязкая несжимаемая жидкость занимает часть пространства $z' < \zeta'(r')$ в цилиндрической системе координат r', θ, z' с началом на невозмущенной поверхности $z' = 0$ и осью Oz , направленной против силы тяжести. Жидкость движется под действием вертикального градиента трансверсальной скорости $\mu^{-1}\omega'(r')$ на поверхности разрыва плотности $z' = \zeta'$ и перепада температур $\vartheta'(r')$ между этой поверхностью и глубинными слоями жидкости. Величина ω' в такой записи имеет размерность напряжений. По физическому смыслу она равна трансверсальным касательным напряжениям на горизонтальных площадках, пересекающих поверхность разрыва плотности. Будем предполагать, что остальные напряжения на этих площадках отсутствуют. Задача об установившемся движении жидкости под действием этих факторов состоит в определении скорости $\mathbf{v} = \{v_r, v_\theta, v_z\}$, разности $p' - p_*$ между гидродинамическим и атмосферным давлениями, формы поверхности ζ' и разности T' между температурой в данной точке и при $z' \rightarrow -\infty$ как функций r' и z' из системы уравнений Навье — Стокса и теплового баланса (с уче-

том архимедовой подъемной силы)

$$(1) \quad (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} + \mathbf{V} \left(\frac{p' - p_*}{\rho} + g z' \right) = -\beta T' \mathbf{g} + \nu \nabla^2 \mathbf{v}, \quad \nabla \mathbf{v} = 0,$$

$$\rho c \left(v_r \frac{\partial T'}{\partial r'} + v_z \frac{\partial T'}{\partial z'} \right) = \lambda \left[\frac{1}{r'} \frac{\partial}{\partial r'} \left(r' \frac{\partial T'}{\partial r'} \right) + \frac{\partial^2 T'}{\partial z'^2} \right] +$$

$$+ \mu \left\{ 2 \left[\left(\frac{\partial v_r}{\partial r'} \right)^2 + \left(\frac{v_r}{r'} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_z}{\partial z'} \right)^2 \right] + \left[r' \frac{\partial}{\partial r'} \left(\frac{v_\theta}{r'} \right) \right]^2 + \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial z'} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_r}{\partial z'} + \frac{\partial v_z}{\partial r'} \right)^2 \right\},$$

при граничных условиях на поверхности $z' = \zeta'$

$$(2) \quad -(p' - p_*) + 2\mu \frac{\partial v_z}{\partial z'} = 0, \quad \frac{\partial v_z}{\partial r'} + \frac{\partial v_r}{\partial z'} = 0, \quad T' = \theta'(r'),$$

$$\mu \frac{\partial v_\theta}{\partial z'} = -\omega'(r'), \quad v_z = v_r \frac{\partial \zeta'}{\partial r'}$$

и при исчезании v_r , v_θ и T' при $z' \rightarrow -\infty$. Плотность ρ , кинематическую вязкость ν , $\mu = \rho\nu$, удельную теплоемкость c , теплопроводность λ и коэффициент кубического термического расширения жидкости β считаем постоянными. Положим

$$(3) \quad \Omega = \max_{r'} |\omega'(r')|, \quad \omega = \frac{\omega'}{\Omega}, \quad p' = p_* + \frac{\rho g^2 \mu^2}{\Omega^2} (p - z), \quad T = \beta T',$$

$$v_r = \frac{\rho \mu^3 g^3}{\Omega^4} u, \quad v_\theta = \frac{g \mu}{\Omega} v, \quad v_z = \frac{\rho \mu^3 g^3}{\Omega^4} w, \quad \zeta' = \frac{\rho^2 g^5 \mu^6}{\Omega^8} \zeta,$$

$$r = \frac{r' \Omega^2}{g \mu^2}, \quad z = \frac{z' \Omega^2}{g \mu^2}, \quad R = \frac{\rho^2 \mu^4 g^4}{\Omega^6}, \quad \gamma = \frac{\beta g^2 \mu^3}{\lambda \Omega^2}, \quad \theta = \beta \theta'.$$

При таком выборе безразмерных переменных при переходе к ним в уравнениях (1), (2) у нелинейного члена v^2/r в уравнении движения коэффициентом будет единица, а у остальных нелинейных инерционных членов — малый параметр R . Разлагая члены граничных условий в ряды по степеням ζ , получим систему уравнений и граничных условий с малым параметром перед квадратичными и более высокими нелинейностями (кроме v^2/r). Эту систему запишем в виде $A(\bar{u}, R) = RB(\bar{u}, R)$, $\bar{u} = \{u, v, w, p, \zeta\}$. Оператор A только в своей радиальной составляющей содержит нелинейный член v^2/r . Разложение оператора B по степеням элементов матрицы \bar{u} и их производных начинается с квадратичных членов. Поэтому к полученному операторному уравнению можно применить метод последовательных приближений, если единица не является собственным числом оператора L^{-1} (L — линейный оператор, получаемый из A отбрасыванием нелинейного члена). Будем считать, что параметр R выбран так, что единица не входит в спектр оператора L . Тогда при достаточно малых R процесс последовательных приближений будет сходящимся, причем первое приближение составит $O(R)$ по отношению к нулевому. Для нулевого приближения, которым мы ограничимся ввиду малости R (при $\Omega \sim 1$ Н/м² $R \sim 0,01$ для воды), получим такие уравнения и граничные условия: $A(\bar{u}, R) = 0$, т. е.

$$(4) \quad \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial z} \Big|_{z=0} = -\omega(r), \quad v \Big|_{z=-\infty} = 0;$$

$$(5) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{v^2}{r} = \frac{\partial p}{\partial r}, \quad \frac{1}{r} \frac{\partial (ru)}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0;$$

$$(6) \quad \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = \frac{\partial p}{\partial z} - T;$$

$$(7) \quad \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = -\gamma \left\{ \left[r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v}{r} \right) \right]^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 \right\};$$

$$(8) \quad R\zeta = p - 2 \frac{\partial w}{\partial z}, \quad \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r} = 0, \quad w = 0, \quad T = \vartheta(r) \text{ при } z = 0, \\ u = T = 0 \text{ при } z = -\infty.$$

Безразмерная трансверсальная скорость v , определяемая задачей (4), совпадает с найденной в [10] при исследовании течения без конвекции. Она равна ($Q_{1/2}$ — функция Лежандра)

$$(9) \quad v = -\frac{1}{\pi \sqrt{r}} \int_0^\infty \sqrt{x} \omega(x) Q_{1/2} \left(\frac{x^2 + r^2 + z^2}{2rx} \right) dx.$$

Интегральные представления решения задачи (5)–(8) строятся при помощи преобразования Ганкеля и имеют вид

$$(10) \quad u = \int_0^\infty s u_1(s, z) J_1(rs) ds, \quad w = \int_0^\infty s w_0(s, z) J_0(rs) ds, \\ p = \int_0^\infty s p_0(s, z) J_0(rs) ds, \quad T = \int_0^\infty s T_0(s, z) J_0(rs) ds, \\ T_0 = \vartheta_0 e^{sz} + \frac{1}{2s} \int_0^\infty \varphi_0(s, -x) [e^{s(z-x)} - e^{-s|z+x|}] dx, \\ \vartheta_0 = \int_0^\infty r \vartheta(r) J_0(rs) dr, \quad \varphi_0 = -\gamma \int_0^\infty r \left\{ \left[r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v}{r} \right) \right]^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 \right\} J_0(rs) dr, \\ p_0 = -\frac{1}{2} \int_0^\infty T_0(s, -x) [e^{s(z-x)} - \operatorname{sgn}(z+x) e^{-s|z+x|}] dx - \\ - \frac{1}{2} \int_0^\infty f_1(s, -x) [e^{s(z-x)} + e^{-s|z+x|}] dx, \quad f_1 = \int_0^\infty v^2(r, z) J_1(rs) dr, \\ u_1 = \frac{1}{4s} \int_0^\infty T_0(s, -x) \{ [2 + s(z-x)] e^{s(z-x)} + s(z+x) e^{-s|z+x|} \} dx + \\ + \frac{1}{4s} \int_0^\infty f_1(s, -x) \{ [1 + s(z-x)] e^{s(z-x)} + [1 - s|z+x|] e^{-s|z+x|} \} dx, \\ w_0 = -\frac{1}{4s} \int_0^\infty T_0(s, -x) \{ [1 - s(z-x)] e^{s(z-x)} - [1 + s|z+x|] e^{-s|z+x|} \} dx - \\ - \frac{1}{4} \int_0^\infty f_1(s, -x) [(z-x) e^{s(z-x)} + (z+x) e^{-s|z+x|}] dx, \\ \zeta = \zeta^{(1,1)} + \zeta^{(1,2)} + \zeta^{(2)}, \quad \zeta^{(1,1)} = \frac{1}{2R} \int_0^\infty \vartheta_0(s) J_0(rs) ds,$$

$$\zeta^{(1,2)} = \frac{1}{R} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{1}{s} (1 - e^{-xs}) \varphi_0(s, -x) J_0(rs) dx ds,$$

$$\zeta^{(2)} = \frac{1}{R} \int_0^\infty \int_0^\infty xs^2 e^{-xs} f_1(s, -x) J_0(rs) dx ds.$$

Как и форма поверхности разрыва плотности жидкости, все характеристики рассматриваемого течения складываются из возмущений за счет вихревых касательных напряжений на поверхности, за счет перепада температур и возмущений, связанных с диссипацией механической энергии.

Общие формулы (10) как частный случай содержат течения, соответствующие атмосферным торнадо и смерчам из морской воды. Чтобы выделить эти течения, допустим, что вихревые касательные напряжения $\omega'(r')$ и распределение температуры $\vartheta'(r')$ на поверхности $z' = \zeta'$ отличны от нуля в кругах $r' \leq a'$ и $r' \leq b'$, где они имеют постоянные значения $(-\Omega)$ и Θ' . В переменных (3)

$$(11) \quad \omega(r) = -1 \text{ при } r \leq a, \quad \omega(r) = 0 \text{ при } r > a, \quad a = a' \Omega^2 / g \mu^2;$$

$$(12) \quad \vartheta(r) = \beta \Theta' = \Theta \text{ при } r \leq b, \quad \vartheta(r) = 0 \text{ при } r > b, \quad b = b' \Omega^2 / g \mu^2.$$

Исследование составляющих течения, обусловленных вихревой нагрузкой на поверхность, проведем асимптотически, в предположении, что безразмерный радиус a области ее действия достаточно мал. Тогда из (9), (11) находим трансверсальную скорость, которая при $a \rightarrow 0$ равна [10]

$$(13) \quad v = a^3 r / 6 (r^2 + z^2 + a^2)^{3/2}.$$

Вводя это выражение в (10), найдем изображение по Ганкелю для трансверсального ускорения (f_1) и для диссипативной функции (φ_0) [11]

$$(14) \quad f_1 = \frac{a^6 s^2 K_1(s \sqrt{z^2 + a^2})}{288 \sqrt{z^2 + a^2}};$$

$$(15) \quad \varphi_0 = -\frac{\gamma a^6 s^2}{192} \left[\frac{K_0(s \sqrt{z^2 + a^2})}{z^2 + a^2} - \frac{a^2 s K_2(s \sqrt{z^2 + a^2})}{8 (z^2 + a^2)^{3/2}} \right] [1 + O(\sqrt{z^2 + a^2})]$$

(K_n — функции Макдональда второго рода).

Введем (14), (15) в (10). При этом получатся интегралы, расходящиеся при $a = 0$. Поэтому основной вклад в их асимптотику при $a \rightarrow 0$ дает окрестность точки $x = s = 0$, и можно положить $e^{-xs} \sim 1$, $1 - e^{-xs} \sim xs$. На этом пути главные члены асимптотики интегралов (10), определяющихся вихревой нагрузкой на поверхности, выражаются через элементарные функции, а связанных с диссипацией энергии — через гипергеометрический ряд. Так, для соответствующих членов поверхности ζ получаем

$$(16) \quad \zeta^{(2)} = \frac{a^6 (a^2 - r^2)}{72R (a^2 + r^2)^3},$$

$$\zeta^{(1,2)} = -\frac{\pi \gamma a^3}{3072R} \left[6F\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}; 1; -\frac{r^2}{a^2}\right) - F\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}; 1; -\frac{r^2}{a^2}\right) \right].$$

Отсюда и из (3) следует, что доля диссипативных возмущений по сравнению с вихревыми равна $\frac{45\pi}{384} \frac{g \mu \beta}{\lambda} a'$. Даже если диаметр области, ох-

ваченной вихревыми возмущениями, измеряется километрами, эта доля составляет несколько процентов. Поэтому диссипацией энергии в смерче можно пренебречь. Априори этот результат не был очевидным, так как по некоторым данным [12] атмосферные возмущения в торнадо достигают скорости звука.

Вводя (12) в (10), определим изображение по Ганкелю для рассматриваемого перепада температур $\vartheta_0 = b\Theta s^{-1}J_1(rs)$. Подставляя эту функцию в (10), получим интегральные представления характеристик рассматриваемого течения, связанных с тепловой конвекцией. Окончательно (без учета диссипации)

$$(17) \quad \zeta = \zeta^{(1,1)} + \zeta^{(2)}, \quad \zeta^{(1,1)} = \frac{b\Theta}{2R} \int_0^\infty \frac{1}{s} J_1(bs) J_0(rs) ds;$$

$$(18) \quad p - R\zeta = p^{(1,1)} - R\zeta^{(1,1)} + \bar{p}^2 - R\zeta^2, \quad \bar{p}^{(2)} - R\zeta^{(2)} = -\frac{\pi a^5}{288} \frac{2(a + |z|)^2 - r^2}{2[(a + |z|)^2 + r^2]^{5/2}},$$

$$p^{(1,1)} - R\zeta^{(1,1)} = -\frac{1}{2} b\Theta |z| \int_0^\infty e^{-s|z|} J_0(rs) J_1(bs) ds - \frac{b\Theta}{2}$$

(именно разность $p - R\zeta$, а не функция p в соответствии с (3), характеризует давление в среде);

$$(19) \quad w = w^{(1,1)} + w^{(2)}, \quad w^{(2)} = \frac{\pi a^5 |z|}{1152} \frac{2(a + |z|)^2 - r^2}{[(a + |z|)^2 + r^2]^{5/2}},$$

$$w^{(1,1)} = -\frac{1}{8} b\Theta z \int_0^\infty \frac{1 + s|z|}{s} e^{-s|z|} J_1(bs) J_0(rs) ds;$$

$$(20) \quad u = u^{(1,1)} + u^{(2)}, \quad u^{(2)} = \frac{\pi r a^5 [r^2 + (a + |z|)^2 - 3|z|(a + |z|)]}{1152 [r^2 + (a + |z|)^2]^{5/2}},$$

$$u^{(1,1)} = -\frac{1}{4} b\Theta \int_0^\infty \left[\frac{|z|}{2s} (1 + s|z|) - \frac{1}{s^2} \right] e^{-s|z|} J_1(rs) J_1(bs) ds;$$

$$(21) \quad T = b\Theta \int_0^\infty e^{-s|z|} J_1(bs) J_0(rs) ds.$$

Интеграл (17) по-разному выражается через гипергеометрическую функцию в зависимости от того, что больше: r или b . Именно

$$(22) \quad \zeta^{(1,1)} = \frac{b\Theta}{4r} \begin{cases} F\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}; 1; \frac{r^2}{b^2}\right), & r < b, \\ \frac{2}{\pi}, & r = b, \\ \frac{b}{2r} F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 2; \frac{b^2}{r^2}\right), & r > b. \end{cases}$$

Отсюда следует

$$(23) \quad \zeta^{(1,1)}(0) = \frac{b\Theta}{2R}, \quad \zeta^{(1,1)} = \frac{b^2\Theta}{4rR} \left[1 + O\left(\frac{b^2}{r^2}\right) \right], \quad r \rightarrow \infty.$$

Асимптотическую формулу интеграла (20) построим при $b \rightarrow \infty$ с помощью интегрирования соотношения

$$\int_0^{\infty} e^{-\alpha s} J_1(bs) J_1(rs) ds = \frac{1}{\pi \sqrt{br}} Q_{1/2} \left(\frac{x^2 + r^2 + b^2}{2rb} \right) = \frac{br}{2(\alpha^2 + r^2 + b^2)^{3/2}}$$

дважды по α от α до ∞ . В результате

$$(24) \quad u_{(1,1)}^{(2)} = \frac{b^2 r \Theta (2r^2 + 2b^2 + z^2) \sqrt{r^2 + b^2 + z^2} - |z| (r^2 + b^2 + 2z^2)}{16 (r^2 + b^2 + z^2)^{3/2} (\sqrt{r^2 + b^2 + z^2} + |z|)}$$

Остальные интегралы в (18), (19) и (24) можно разложить в ряд по гипергеометрическим функциям. Полученные на этом пути формулы обобщим на более исходных. Здесь они не приводятся.

Отметим основные результаты и некоторые следствия.

1. Если у поверхности воды или на поверхности разрыва плотности в атмосфере при отсутствии перепада температур действуют стационарные вихревые касательные напряжения, отличные от нуля в круге радиуса a' , где они постоянны и равны Ω , то размерные характеристики вызываемого ими течения получим после перехода к переменным (3) в формулах (13), (17)–(20) и (24) при $\Theta = 0$:

$$(25) \quad v_r^{(2)} = xU \frac{x^2 + (y+1)^2 - 3y(y+1)}{[x^2 + (y+1)^2]^{5/2}}, \quad v_\theta^{(2)} = \frac{xV}{(1 + x^2 + y^2)^{3/2}},$$

$$v_z^{(2)} = yU \frac{2(1+y)^2 - x^2}{[x^2 + (y+1)^2]^{5/2}}, \quad p^{(2)} = p_* + \rho g a' y - \frac{2(y+1)^2 - x^2}{2[x^2 + (y+1)^2]^{5/2}} P,$$

$$\zeta^{(2)} = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^3} \zeta_*, \quad \zeta_{\min} = -\frac{\zeta_*}{27}, \quad x = \frac{r'}{a'}, \quad y = \frac{|z|}{a'}, \quad 0 \leq x, y \leq \infty,$$

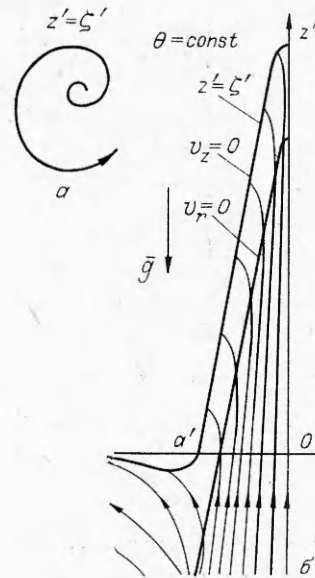
$$U = \frac{\pi \rho a'^3 \Omega^2}{1152 \mu^3} = \frac{\rho T^2}{1152 \pi \mu^3 a'}, \quad V = \frac{\Omega a'}{\varepsilon_*} = \frac{T}{6 \pi \mu a'} = \frac{M}{6 \mu S},$$

$$P = \frac{\pi \rho a'^2 \Omega^2}{288 \mu^2} = \frac{\rho T^2}{288 \mu^2 S} = \frac{\pi \rho M^2}{288 \mu^2 S^2}, \quad \zeta_* = \frac{\Omega^2 a'^2}{72 g \mu^2} = \frac{T^2}{72 g \pi \mu^2 S} = \frac{M^2}{72 g \mu^2 S^2},$$

где $S = \pi a'^2$ — площадь распределения касательных напряжений Ω ; $T = \Omega S$ — суммарные трансверсальные касательные усилия на поверхности; $M = T a'$ — момент вихревых касательных усилий.

Из (25) следует, что вертикальная скорость в окрестности оси направлена вверх против силы тяжести. В смерчах без перепада температур в этой окрестности возможны только восходящие токи. Радиальная скорость в смерче равна нулю на поверхности двухполостного гиперboloида вращения $x^2 + (y+1)^2 = 3y(y+1)$. Внутри нижней полости этого гиперboloида (верхняя полость не пересекает область течения) радиальная скорость направлена к оси, вне этой полости — от оси вихря. Линии тока на поверхности жидкости $z' = \zeta'$ представляют собой спирали $r' = C \exp\left(\frac{U}{V} \theta\right)$ (фиг. 1, а, вид сверху). На фиг. 1, б изображены примерная картина линии тока и форма поверхности $z' = \zeta'$ в плоскости $\theta = \text{const}$ в окрестности оси течения. Пространственная конфигурация линий тока близка к винтовым линиям, по которым происходит течение в направлении к вершине смерча. Это возможно только при постоянном увеличении высоты столба. Смерч является механизмом по увеличению своей собственной высоты. Бесконечного увеличения высоты смерча не происходит по следующей причине. Гидродинамическое давление на поверхности

$z' = \zeta'$ имеет $\min p' = p_* - P$ при $r' = 0$. Для того чтобы не происходило распыления жидкости в смерче, нужно $p_* \geq P$, так как жидкость не выдерживает отрицательных давлений. Отсюда и из (25) вытекает, что движение в смерче без распыления жидкости возможно лишь при нагрузке с моментом $M \leq \leq 12\mu S \sqrt{2p_*/(\pi\rho)} = M_*$. При дальнейшем увеличении момента морской смерч начинает работать как насос, перекачивающий со своей вершины распыленную им же жидкость в атмосферу [12]. Известен случай, когда таким способом смерч отправил в воздух целое озеро [12]. В земных условиях при нормальном атмосферном давлении $M_* = 0,09575 S \text{ Н}\cdot\text{м}$ ($S, \text{ м}^2$). Соответствующая высота смерча ζ_{**} и максимальная трансверсальная скорость $v_{\theta*}$, до которых не происходит распыления жидкости в смерче, имеют вид $\zeta_{**} = \frac{4p_*}{\pi\rho g}$, $v_{\theta*} =$
 $= 2 \sqrt{\frac{2p_*}{\pi\rho}}$. Для смерча из воды эти величины



Ф и г. 1

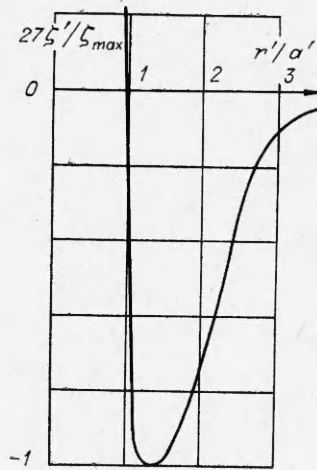
равны 13 м и 16 м/с. В воздушном смерче, когда плотность уменьшается почти в 1000 раз, предел высоты ζ_{**} торнадо таков, что не приходится говорить о заметном разрежении воздуха за счет вихревых эффектов. Торнадо поднимает плотный воздух нижних слоев атмосферы на большую высоту, и на фоне разреженного воздуха этой высоты более плотный столб легко фиксируется радарными установками [13]. О размерах возмущений водной поверхности и о поле скоростей в морском смерче можно судить по следующему примеру. Если у поверхности воды на площади $S = 78,5 \text{ м}^2$ (круг диаметром 10 м) действуют вихревые касательные усилия с моментом $M = 25 \text{ Н}\cdot\text{м}$, то из воды выдавливается столб распыленной жидкости высотой $\zeta_* = 143,5 \text{ м}$. Перед этим столбом образуется кольцевая воронка глубиной 5,3 м. Максимальная трансверсальная скорость воды в таком смерче равна 53 м/с.

Из (25), (3) следует, что вертикальная скорость на оси вихря $v_z(0, z') = yU(1 + y)^{-3}$ достигает максимума $W = \pi a' g \zeta_* / (108v)$ при $z' = \zeta' - a'/2$. Даже при возмущениях ζ_* на поверхности воды порядка нескольких метров величина W превосходит скорость звука в несколько раз. В земных условиях это нереально. Поэтому при более строгом подходе нужно строить модель смерча с учетом сжимаемости жидкости. Интересно, что смерч без температурного перепада практически нейтрализует влияние гравитации на увлекаемую им жидкость. Давление и скорость в смерче не зависят от ускорения силы тяжести g .

2. В принятом приближении ($R \ll 1$) произвольные осесимметричные температурные возмущения поверхности разрыва плотности жидкости не искажают трансверсальной скорости течения (9) во всей области, занятой жидкостью. Это связано в первую очередь с тем, что архимедова подъемная сила не дает проекции на трансверсальную ось.

3. Если температура поверхности разрыва плотности жидкости задается формулами (3), (12), то размерную форму этой поверхности получим после перехода к переменным (3) в формулах (16), (17), (22) и (23). При этом возмущение поверхности на оси вихря

$$(26) \quad \zeta'(0) = \zeta_* + \frac{1}{2} b' \beta \Theta'.$$



Ф и г. 2

Поэтому конфигурация возмущений атмосферы в торнадо характеризуется главным образом вихревым членом (25) и представляет собой высокий узкий столб (ядро) в несколько десятков километров, окруженный в нижней своей части узкой воронкой глубиной в 27 раз меньше высоты столба. (Воронка узка потому, что вихревые возмущения поверхности (25) затухают пропорционально четвертой степени расстояния от оси вихря.) Эта воронка сама по себе имеет глубину в несколько сот метров. Она наблюдается визуально и производит опустошительные разрушения у поверхности земли [12]. Кроме визуальных наблюдений, такое описание торнадо (ζ' — в соответствии с (25)) подтверждают радарные наблюдения за этими вихрями [12, 13], которые отмечают как вихревой столб, уходящий за пределы тропосферы, так и воронку у его основания, по вертикальному масштабу во много раз меньшую высоты столба. На фиг. 2 показано сечение воронки перед столбом плоскостью $\theta = \text{const}$ в соответствии с профилем (25). За вертикальный масштаб принята глубина воронки, за горизонтальный — радиус зоны действия вихревых возмущений в предположении, что первый масштаб значительно превосходит второй.

4. Гидродинамическое давление в смерче при температурном перепаде (12) описывается формулами (3), (18). На оси вихря и в его вершине

$$p'(0, z') = p_* - \frac{\rho g^2 \mu^2}{\Omega^2} \left[\frac{\Theta - 2}{2} |z| + \frac{\Theta}{2} \left(b - \frac{z^2}{\sqrt{b^2 + z^2}} \right) + \frac{\pi a^5}{288 (a + |z|)^3} \right], \quad (27)$$

$$p'(0, \zeta') = p_* - P - \frac{1}{2} \rho g b' \beta \Theta'.$$

Отсюда следует, что в противовес общему увеличению высоты вихря положительный перепад Θ' уменьшает, а отрицательный — увеличивает давление на вершине вихря. Например, нагретая морская поверхность или охлажденная поверхность земли уменьшают высоту морского смерча или воздушного торнадо до момента распыления жидкости, т. е. появления в смерче отрицательных давлений. И наоборот, охлажденное море или нагретая земля способствуют тому, что высота нераспыленного вихря увеличивается.

Формулы (27) говорят, что в зоне прохождения торнадо, особенно если земля холоднее облака ($\Theta' > 0$), должна существовать область по-

Если температура поверхности океана ниже температуры глубинных слоев воды ($\Theta' < 0$) и если в (26) второе слагаемое значительно превосходит первое (что возможно лишь, когда вихревая нагрузка на поверхность практически отсутствует), то на этой поверхности образуется пологое углубление с профилем (22). Охлажденная незакрученная жидкая поверхность вдавливается в океан. Обычно, даже при небольших вихревых напряжениях на поверхности разрыва плотности в среде, в (26) превалирует первое слагаемое. Масштаб деформации поверхности $z' = \zeta'$ в воздушном торнадо за счет теплообмена, равный $|b' \Theta' \beta / 2| \sim \sim b' |\Theta'| / 546$ ($\beta \sim 1/273 \text{ K}^{-1}$), при $b' \sim 10 \text{ км}$, $|\Theta'| \sim 10 \text{ К}$ измеряется десятками или сотнями метров. Масштаб ζ_* деформации этой поверхности за счет вихревой нагрузки достигает десятков километров (для воздуха $\mu \sim 2 \cdot 10^{-5} \text{ кг/м} \cdot \text{с}$).

ниженного давления. Это подтверждается наблюдениями (например, при торнадо взрываются консервные банки, наружу вылетают оконные стекла и т. п.). Не останавливаясь на подробном исследовании выражений (27), укажем на принципиальную возможность существования положительных корней у уравнения $p'(0, |z|) = 0$. В этом случае область разрывных давлений находится внутри смерча. Наличие внутренних областей с разрывными давлениями говорит о возможности существования прерывистых смерчей — изолированных вихрей, разделенных областями с менее плотной средой. Такие смерчи иногда наблюдаются на практике. Если уравнение $p'(0, |z|) = 0$ не имеет положительных корней, то при определенной нагрузке на поверхность разрыва плотности (когда отрицательно выражение (27)) распыление жидкости будет происходить с вершины смерча. В том и другом случаях смерч должен выделяться на общем фоне атмосферы планеты при наблюдении из космоса. Если, по распространенной в настоящее время гипотезе, большое красное пятно Юпитера представляет собой гигантский атмосферный вихрь (например, порожденный экваториальной струей и оторвавшийся от нее), то указанный эффект может служить объяснением причины, по которой этот вихрь, как и все остальные более мелкие, наблюдаемые в полярных и других областях Юпитера и Сатурна [14], замечен при фотографировании с космических аппаратов и при визуальном наблюдении в телескоп.

5. Осевая скорость в смерче, определяемом условиями (11), (12) на поверхности разрыва плотности, определяется формулами (3), (19), которые на оси течения дают

$$(28) \quad v_z(0, z') = \frac{yU}{(1+y)^3} + \frac{y_1 W_1}{\sqrt{1+y_1^2}}, \quad y_1 = \frac{|z'|}{b}, \quad W_1 = \frac{\rho g \beta \partial' b'^2}{8\mu}.$$

Отсюда следует, что в случае положительного перепада температур осевые скорости за счет вихревых возмущений атмосферы и за счет тепловой конвекции накладываются друг на друга. Если, например, земля холоднее облачного покрова, то в торнадо (т. е. в области $z' < \zeta'$ под поверхностью разрыва плотности) будут наблюдаться только восходящие токи.

При отрицательном перепада температур при малых $|z|$ скорость в (28) положительна (не только потому, что на практике $U > |W_1|$, но и в связи с тем, что обычно $b' \gg a'$) и потому направлена к вершине вихря. При $z' \rightarrow -\infty$ первое слагаемое в (28) обращается в нуль, а второе — в $W_1 < 0$. Поэтому вдали от вершины торнадо осевая скорость ориентирована в глубь жидкости. Изменение направления скорости (28) с ростом $|z|$ происходит тем раньше, чем точнее выполнено неравенство $b' \gg a'$, т. е. когда область перепада температур значительно шире области действия вихревых возмущений. Это совпадает с условиями образования торнадо: смерч возникает, когда над землей проходит мощная туча, а с ее краев срываются вихри в виде закрученного облака, которые и служат зародышем торнадо [6, 13]. Большая поверхность общей тучи обеспечивает существование значительной области перепада температур между облаком и землей, а относительная малость площади срывающихся с тучи вихрей — существование высокого узкого столба и глубокой узкой воронки торнадо. При этом у основания вихря преобладают осевые скорости, связанные с тепловой конвекцией, над теми, которые вызваны самим вихрем. Если земля теплее окружающего воздуха, то по оси торнадо будут наблюдаться интенсивные нисходящие токи, вызывающие большое давление на землю. С этим связано вдавливание в почву различных предметов, которое иногда имеет место при прохождении торнадо. До сих пор

это свойство воздушного вихря удавалось объяснить только с привлечением ряда конструктивных гипотез на электромагнитной основе [2].

6. Радиальная скорость в смерче выражается по формулам (3), (20). При этом на поверхности разрыва плотности

$$v_r(r', \zeta') = \frac{xU}{(1+x^2)^{3/2}} + \frac{x_1 W_1}{\sqrt{1+x_1^2}}, \quad x_1 = \frac{r'}{b'}.$$

При положительном перепаде температур картина течения в плоскости $\theta = \text{const}$ аналогична изображенной на фиг. 1, б. В случае отрицательного перепада вдали от оси вихря преобладают конвекционные токи, направленные к этой оси. Эти токи разбиваются поверхностью $v_z(r', z') = 0$ на области, в одной из которых течение способствует увеличению высоты столба, а в другой — создается нисходящий поток.

7. Перепад температуры в зоне течения определяется формулами (3), (24). На оси вихря и при $r' \rightarrow \infty$

$$T'(\theta, z') = \frac{\theta'}{4 + y_1^2 + y_1} \sqrt{1 + y_1^2}, \quad T'(r', z') = \frac{b'^2 |z'| \theta'}{2(r'^2 + z'^2 + b'^2)^{3/2}}, \quad r' \rightarrow \infty. \quad (29)$$

8. Приведем некоторые соображения, позволяющие распространить результаты (25), характеризующие течение в смерче без теплообмена и полученные при малых значениях $a = a' \Omega^2 / (g\mu^2)$ на область больших значений этого параметра. Основой для получения (25) послужила формула (13), полученная из интеграла

$$v = \frac{1}{\pi \sqrt{r}} \int_0^a \sqrt{x} Q_{1/2} \left(\frac{x^2 + r^2 + z^2}{2rx} \right) dx$$

при $a \rightarrow 0$. При $a \rightarrow \infty$ этот интеграл расходится [15]. Для качественной оценки его роста при $a \rightarrow \infty$ функцию Лежандра можно заменить асимптотикой при больших значениях аргумента, так как ее зависимость от этого аргумента при $x \rightarrow 0$ и $x \rightarrow \infty$ описывается одной и той же формулой. Это дает

$$v \sim \frac{r}{2} \int_0^a \frac{x^2 dx}{(x^2 + r^2 + z^2)^{3/2}} \sim \frac{r}{2} \ln \frac{2a}{\sqrt{r^2 + z^2}}, \quad a \rightarrow \infty.$$

Следовательно, при больших a трансверсальная скорость в смерче имеет логарифмический рост по a . Использованная выше формула (13) ограничена при $a \rightarrow \infty$. Поэтому, применяя формулы (25) при больших значениях a , мы могли только уменьшить абсолютные величины экстремальных характеристик рассматриваемого течения.

Отметим, что при построении модели смерчей игнорировалась возможная турбулентность рассматриваемого течения. Существует численный расчет торнадо [16] с учетом турбулентности и без нее, который не зафиксировал значительной разницы между турбулентным и ламинарным случаями. Возможно, эти вихри содержат своеобразный механизм подавления турбулентности, который оправдывает примененную здесь ламинарную модель.

9. Полученные результаты можно распространить на случай движения среды под действием вихревых и температурных возмущений, перемещающихся по поверхности разрыва ее плотности с заданной постоянной скоростью c' . Пусть величины ω' , θ' зависят только от расстояния r'

от центра возмущений. Тогда, записав нестационарную систему уравнений Навье — Стокса и теплового баланса в переменных $r' = \sqrt{(x' - c't')^2 + y'^2}$, $\tilde{x} = x' - c't'$, z' и пользуясь тем, что граничные условия зависят только от r' , будем искать то решение системы, которое не зависит от \tilde{x} . Это решение получается из предыдущего заменой $r' = \sqrt{(x' - c't')^2 + y'^2}$ и содержит информацию о термо-и гидродинамическом следе смерча в атмосфере и океане. Не останавливаясь на подробном анализе этой информации, отметим, что выше не делалось никаких ограничений на радиус b' зоны действия температурных возмущений над поверхностью разрыва плотности среды. Поэтому при достаточно больших b' можно применить формулы (29) для анализа температурного следа урагана над поверхностью воды (ограничиваясь простейшим предположением, что ураган, ось которого перемещается поступательно в одном направлении с постоянной скоростью c' , создает в движущемся круге радиуса b' с центром на этой оси постоянный перепад температуры Θ' между поверхностью воды и ее глубинными слоями). Из (29) запишем уравнения изотерм $T' = \text{const}$ при $r' \rightarrow \infty$ в виде

$$(30) \quad \sin^2 \varphi = \frac{(\rho^2 + 1)^3 4T'^2 (b'^2 + \tilde{x}^2)^2}{\rho^2 b'^4 \Theta'^2}, \quad y' = \rho \sqrt{b'^2 + \tilde{x}^2} \cos \varphi, \\ z' = \rho \sqrt{b'^2 + \tilde{x}^2} \sin \varphi.$$

Условием существования изотерм является неравенство $\sin^2 \varphi \leq 1$, которое в силу (30) сводится к исследованию случая, при котором многочлен третьей степени относительно $\rho^2 + 1$ имеет два корня, не меньших единицы. Это дает ограничения на коэффициенты многочлена, из которых следует

$$(31) \quad |\tilde{x}| = |x' - c't'| \leq b' \sqrt{\frac{1}{3\sqrt{3}} \left| \frac{\Theta'}{T'} \right| - 1}.$$

Отсюда вытекает, что при больших значениях времени t' изотермы существуют только при $3\sqrt{3}|T'| \leq |\Theta'|$. Время релаксации t'_* следа урагана до температуры T' в сечении $x' = 0$ получим, если в (31) возьмем знак равенства: $t'_* = \frac{b'}{c'} \sqrt{\frac{1}{3\sqrt{3}} \left| \frac{\Theta'}{T'} \right| - 1}$. При $t' = t'_*$ изотермы (30) вы-

рождаются в точку, а при $t' > t'_*$ исчезают. Таким образом, время релаксации термического следа урагана или смерча прямо пропорционально радиусу зоны температурных возмущений поверхности разрыва плотности среды и обратно пропорционально поступательной скорости перемещения этих возмущений. Если начальный перепад температуры $\Theta' = 10^\circ\text{C}$, радиус зоны температурных возмущений $b' = 2000$ км (стадия центрального циклона [12]), скорость поступательного перемещения циклона $c' = 1$ м/с, то время релаксации следа урагана до температуры $T' = 1^\circ\text{C}$ $t'_* = 22$ сут. Этот результат говорит об очень медленной релаксации термического следа урагана. Он согласуется с последними данными, полученными в 27-м рейсе советского исследовательского судна «Академик Курчатов» по совместной советско-американской программе «Полимоде» [17]. Во время этого рейса в Саргассовом море был картирован термический след относительно слабого урагана через сутки, а затем — через 20 сут после его прохождения. Результат наложения изотерм говорит о том, что через 20 сут релаксация термического следа до температуры 1°C практически не начиналась. Изотермы (30) в плоскости yOz представляют собой овалы с осью симметрии $y = 0$. Анализ экспериментальных

изотерм термического следа урагана [17] показывает, что в процессе их деформации наблюдается тенденция вырождения изотерм в овалы.

Автор выражает благодарность Р. И. Нигматулину за помощь при обсуждении и корректировке полученных результатов.

Поступила 17 VII 1979

ЛИТЕРАТУРА

1. Serrin J. The swirling vortex.— Phil. Trans. Roy. Soc., 1972, vol. A271, N 1214.
2. Шилова Е. И., Щербинин Э. В. Магнитогидродинамическая модель смерча.— Магнитн. гидродинамика, 1974, № 2.
3. Burggraf O. R., Foster M. R. Continuation or breakdown in tornado-like vortices.— J. Fluid Mech., 1977, vol. 80, N 4.
4. Hsu S. T., Tesfamariam H. Computer simulation of a tornado-like vortex boundary layer flow.— In: Proc. Summer Comput. Simulat. Conf. La Jolla, Calif., 1976.
5. Rotunno R. Numerical simulation of a laboratory vortex.— J. Atmos. Sci., 1977, vol. 34, N 12.
6. Smith R. K., Leslie L. M. Tornadogenesis.— Quart. J. Roy. Meteorol. Soc., 1978, vol. 104, N 439.
7. Ward N. B. Rotational characteristics of a tornado cyclone.— In: 13th Radar Meteorol. Conf. Proc., Montreal, 1968. Boston, Mass., Amer. Meteorol. Soc., s. a. 94—97.
8. Davies-Jones R., Kessler E. Tornadoes. Weather and clim. Modif. N. Y., e. a., 1974.
9. Эйшанский А. М., Верчук В. М. О вращательном движении вязкой жидкости.— В сб.: Вероятностно-стат. методы в проектир. конструкций. Днепропетровск, 1974.
10. Заволженский М. В., Терсков А. X. Вихрь у поверхности вязкой жидкости.— Изв. АН СССР. МЭГ, 1978, № 4.
11. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Т. 1. М., Наука, 1974.
12. Наливкин Д. В. Ураганы, бури, смерчи. Л., Наука, 1969.
13. Kessler E. Tornadoes: state of knowledge.— Proc. ASCE. J. Struct. Div., 1978, vol. 104, N 2.
14. Williams G. P. Planetary circulation. I. Barotropic representation of Jovian and terrestrial turbulence.— J. Atmos. Sci., 1978, vol. 35, N 8.
15. Маричев О. И. Метод вычисления интегралов от специальных функций. Минск, Наука и техника, 1978.
16. Kuo H. L. Axisymmetric flows in the boundary layer of a maintained vortex.— J. Atmos. Sci., 1971, vol. 28, N 1.
17. Федоров К. Н. О медленной релаксации термического следа урагана в океане.— ДАН СССР, 1979, т. 245, № 4.

УДК 539.374

ЯВЛЕНИЕ КУМУЛЯЦИИ ПРИ ДИНАМИЧЕСКОМ ПРЕССОВАНИИ ПОРОШКОВЫХ МАТЕРИАЛОВ

С. А. Балакин, Л. П. Горбачев, Е. Г. Григорьев, Д. М. Скоров
(Москва)

Один из перспективных способов прессования порошковых материалов заключается в пропускании через порошок электрического тока большой плотности [1, 2]. Этот способ позволяет получать материалы высокой плотности с необходимыми свойствами. Получение контролируемой плотности спрессованных материалов достигается выбором параметров прессования: приложенного внешнего механического давления, амплитуды и длительности импульсов тока. Экспериментально установлен факт существования определенных параметров, при которых процесс становится неустойчивым — происходит «выплеск» прессуемого материала из прессформы [1]. В данной работе рассматривается возможная причина возникновения «выплеска» и определяется область параметров, в которой такое явление имеет место.