УДК 517.957:[532.516.5+536.23]

О РЕГУЛЯРНЫХ ЧАСТИЧНО ИНВАРИАНТНЫХ РЕШЕНИЯХ РАНГА 1 ДЕФЕКТА 1 УРАВНЕНИЙ ПЛОСКИХ ДВИЖЕНИЙ ВЯЗКОГО ТЕПЛОПРОВОДНОГО ГАЗА

В. В. Бублик

Институт теоретической и прикладной механики им. С. А. Христиановича СО РАН,
630090 Новосибирск
E-mail: bublik@itam.nsc.ru

Рассматривается система уравнений Навье — Стокса двумерных движений вязкого теплопроводного совершенного газа с политропным уравнением состояния. Изучаются регулярные частично инвариантные решения ранга 1 дефекта 1. Доказано достаточное условие их редуцируемости к инвариантным решениям ранга 1. Исследованы все решения указанного класса с линейной зависимостью компонент вектора скорости от пространственных координат. Получены новые примеры решений, не редуцируемых к инвариантным.

Ключевые слова: динамика вязкого теплопроводного газа, частично инвариантные решения.

1. Описание модели. Рассматривается система уравнений, описывающая плоские движения вязкого теплопроводного совершенного газа с политропным уравнением состояния:

$$\rho(u_t + uu_x + vu_y) = -p_x + (\lambda(u_x + v_y))_x + (2\mu u_x)_x + (\mu(u_y + v_x))_y; \tag{1.1}$$

$$\rho(v_t + uv_x + vv_y) = -p_y + (\lambda(u_x + v_y))_y + (\mu(u_y + v_x))_x + (2\mu v_y)_y; \tag{1.2}$$

$$\rho_t + (u\rho)_x + (v\rho)_y = 0; \tag{1.3}$$

$$c_V\rho(T_t + uT_x + vT_y) + p(u_x + v_y) = (\varkappa T_x)_x + (\varkappa T_y)_y + \lambda(u_x + v_y)^2 + \mu(2u_x^2 + 2v_y^2 + (u_y + v_x)^2). \tag{1.4}$$

Здесь u, v — компоненты вектора скорости; ρ — плотность; T — температура; $p = R\rho T$ — давление; R — газовая постоянная; c_V — удельная теплоемкость при постоянном объеме; $\mu = m_0T^\omega$, $\lambda = l_0T^\omega$ — первая и вторая вязкости; $\varkappa = k_0T^\omega$ — теплопроводность. При исследовании будем учитывать следующие условия, имеющие физический смысл:

$$\rho > 0, \quad T > 0, \quad 3\lambda + 2\mu \geqslant 0, \quad \mu > 0, \quad \varkappa \geqslant 0, \quad R > 0, \quad c_V > 0. \tag{1.5}$$

В работе [1] приведена групповая классификация системы (1.1)–(1.4) для случая $\lambda = -(2/3)\mu$, которая справедлива и в случае отсутствия такой зависимости между первой и второй вязкостями. Группа, допускаемая системой уравнений (1.1)–(1.4), является восьмипараметрической. Этой группе соответствует алгебра Ли L_8 с базисом

$$X_1 = \partial_x, \quad X_2 = \partial_y, \quad X_3 = t\partial_x + \partial_u, \quad X_4 = t\partial_y + \partial_v,$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 06-01-00080) и в рамках Программы поддержки ведущих научных школ Российской Федерации (грант № НШ-8732.2006.1).

$$X_5 = y\partial_x - x\partial_y + v\partial_u - u\partial_v, \quad X_6 = \partial_t, \quad X_7 = t\partial_t + x\partial_x + y\partial_y - \rho\partial_\rho,$$
$$X_8 = x\partial_x + y\partial_y + u\partial_u + v\partial_v + 2(\omega - 1)\rho\partial_\rho + 2T\partial_T.$$

Оптимальная система подалгебр алгебры Ли L_8 построена в [2]. Рассмотрим решения, которые можно строить на основе трехмерных подалгебр. В этом случае наиболее простым классом решений являются инвариантные решения ранга 0. Все такие решения для системы (1.1)–(1.4) описаны в [3]. Более сложным для построения классом решений являются частично инвариантные решения. В [4] введено понятие регулярного частично инвариантного решения. Целью данной работы является изучение регулярных частично инвариантных решений ранга 1 дефекта 1 системы уравнений (1.1)–(1.4), которые можно строить на основе трехмерных подалгебр. В частности, доказывается достаточное условие их редуцируемости к инвариантным решениям ранга 1, описанным в [2]. Также исследуются все решения указанного класса с линейной зависимостью компонент вектора скорости от пространственных координат.

2. Редуцируемые к инвариантным частично инвариантные решения. Построение инвариантных решений существенно проще построения частично инвариантных. Используя критерии, позволяющие заранее исключить редуцируемые к инвариантным частично инвариантные решения, можно непосредственно строить нередуцируемые решения. В [5] доказан критерий редуцируемости к инвариантному произвольного частично инвариантного многообразия. Однако этот критерий не всегда удобно применять на практике. Поэтому актуальным является доказательство частных теорем, формулирующих достаточные условия. Известная теорема Овсянникова (теорема 22.7 в [6]) в большинстве случаев неприменима для систем дифференциальных уравнений второго порядка. В данной работе исследуется вопрос о редуцируемости регулярных частично инвариантных решений ранга 1 дефекта 1 уравнений плоских движений вязкого теплопроводного совершенного газа. Аналогичная задача для осесимметричных движений газа изучена в [7].

Так как между алгебрами Ли и группами Ли преобразований существует соответствие, в дальнейшем будем использовать оба этих понятия, не оговаривая специально область применимости каждого из них. При этом группу преобразований, соответствующую алгебре Ли L_8, обозначим через G_8.

Теорема. *Если универсальный инвариант подгруппы $H \subset G_8$ можно выбрать в виде*

$$J = (\xi(t,x,y), A(t,x,y)u + B(t,x,y)v + C(t,x,y), D(t,x,y)\rho, E(t,x,y)T), \tag{2.1}$$

где ξ, A, B, C, D, E — некоторые функции, то соответствующее регулярное частично инвариантное H-решение ранга 1 дефекта 1 системы уравнений (1.1)–(1.4) *редуцируется к инвариантному.*

Доказательство. Известно, что ранг и дефект частично инвариантного решения инвариантны относительно преобразования подобия подгрупп. Анализ инвариантов всех подгрупп показывает, что выполнение условия (2.1) для каждой подгруппы также инвариантно относительно преобразования подобия подгрупп. Поэтому доказательство теоремы достаточно провести только для подгрупп из оптимальной системы подгрупп. В табл. 1 указаны все подгруппы, удовлетворяющие условию (2.1). Для удобства подгруппа H идентифицируется базисом соответствующей алгебры Ли (при этом вместо оператора указан только его номер, например, запись $7{+}\alpha 8$ означает оператор $X_7{+}\alpha X_8$). В графе J указаны инварианты подгруппы.

Представим общую схему доказательства теоремы. Для каждой подгруппы в табл. 1 инварианты задают вид представления решения. При $\partial\xi/\partial y \neq 0$ из уравнения (1.3) следует выражение

$$u(t,x,y) = \varphi(\xi)x/t + w(t,\xi) \tag{2.2}$$

Таблица 1

Номер подгруппы	H	J
1	1, 3, $7+\alpha 8$	$yt^{-\alpha-1}$, $vt^{-\alpha}$, $\rho t^{1-2\alpha(\omega-1)}$, $Tt^{-2\alpha}$
2	1, 3, $2+7-8$	$y-\ln t$, vt, $\rho t^{2\omega-1}$, Tt^2
3	1, 3, $4+7$	$y/t-\ln t$, $v-\ln t$, ρt, T
4	1, 3, $4+6$	t^2-2y, $v-t$, ρ, T
5	1, 3, $6+8$	$y\,\mathrm{e}^{-t}$, $v\,\mathrm{e}^{-t}$, $\rho \mathrm{e}^{2(1-\omega)t}$, $T\mathrm{e}^{-2t}$
6	1, 3, $6-8$	$y\mathrm{e}^{t}$, $v\mathrm{e}^{t}$, $\rho \mathrm{e}^{2(\omega-1)t}$, $T\mathrm{e}^{2t}$
7	1, 3, 6	y, v, ρ, T
8	1, 3, 8	t, v/y, $\rho y^{2(1-\omega)}$, Ty^{-2}
9	1, 3, 4	t, $tv-y$, ρ, T
10	1, 2, 3	t, v, ρ, T

или

$$u(t,x,y)=\varphi(\xi)x+w(t,\xi). \tag{2.3}$$

Тогда уравнение (1.4) принимает вид

$$F(\xi)+\Bigl(f_1(t)\varphi' x+f_2(t)\,\frac{\partial w}{\partial \xi}\Bigr)^2=0, \tag{2.4}$$

где F, f_1, f_2 — известные (свои для каждой подгруппы) функции указанных аргументов. Из (2.4) следует

$$\varphi'=0, \qquad 2f_2\,\frac{\partial w}{\partial \xi}\Bigl(f_2'\,\frac{\partial w}{\partial \xi}+f_2\,\frac{\partial^2 w}{\partial t\,\partial \xi}\Bigr)=0. \tag{2.5}$$

При $\xi=t$ вместо (2.2) или (2.3) имеем $u(t,x,y)=\varphi(t)x+w(t,y)$, а вместо (2.4) получаем $F(t)+(\partial w/\partial y)^2=0$, откуда следует

$$2\,\frac{\partial w}{\partial y}\,\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}=0. \tag{2.6}$$

Интегралы уравнений (2.5) или (2.6) используются при анализе уравнения (1.1). В результате для u получается представление, позволяющее определить двумерную подгруппу, относительно которой инвариантно построенное решение. Все такие подгруппы приведены в табл. 2. В первой графе указан номер подгруппы из табл. 1, во второй — базисы соответствующих двумерных подгрупп. Константы могут принимать любое вещественное значение, за исключением случаев, которые оговорены особо. В третьей графе указан дополнительный инвариант подгруппы H, который отсутствует у соответствующей трехмерной подгруппы (остальные инварианты совпадают). Доказательство для каждой подгруппы здесь не приводится.

3. Решения с линейным полем скоростей. Среди трехмерных подгрупп, не удовлетворяющих необходимому условию существования инвариантного решения или условию изложенной выше теоремы, остается восемь серий подгрупп. Все они указаны в табл. 3. Если не редуцируемые к инвариантным регулярные частично инвариантные решения ранга 1 дефекта 1 существуют, то они могут быть построены только на основе

Таблица 2

Номер подгруппы	H	j_u
1	$1,\ -\alpha\beta 3 + 7 + \alpha 8\ (\alpha \neq 0)$	$(u - \beta)t^{-\alpha}$
	$1,\ \alpha 3 + 7$	$u - \alpha \ln t$
	$3,\ (\alpha + 1)\beta 1 + 7 + \alpha 8\ (\alpha \neq -1)$	$(ut - x - \beta)t^{-\alpha-1}$
	$3,\ -\alpha 1 + 7 - 8$	$ut - x - \alpha \ln t$
2	$1,\ \alpha 3 + 2 + 7 - 8$	$(u - \alpha)t$
	$3,\ -\alpha 1 + 2 + 7 - 8$	$ut - x - \alpha \ln t$
3	$1,\ \alpha 3 + 4 + 7$	$u - \alpha \ln t$
	$3,\ \alpha 1 + 4 + 7$	$(tu - x - \alpha)/t$
4	$1,\ \alpha 3 + 4 + 6$	$u - \alpha t$
5	$1,\ -\alpha 3 + 6 + 8$	$(u - \alpha)\,\mathrm{e}^{-t}$
6	$1,\ -\alpha 3 + 6 - 8$	$(u - \alpha)\,\mathrm{e}^{t}$
7	$1,\ \alpha 3 + 6$	$u - \alpha t$
8	$\alpha 1 + 3,\ \beta 3 + 8$	$((t + \alpha)u - x - \beta)/y$
9	$\alpha 1 + 3,\ -\beta 1 + 4$	$t(t + \alpha)u - tx - \beta y$
10	$\beta 1 - 2,\ \alpha 1 + 3$	$(t + \alpha)u - x - \beta y$

подгрупп, приведенных в табл. 3. Для полного анализа таких решений необходимо использовать теории исследования систем уравнений в частных производных на совместность [8, 9]. Для указанных восьми подгрупп такой анализ пока не проведен, поэтому ограничимся частным случаем, а именно решениями с линейной зависимостью поля скоростей от пространственных координат (для краткости такое поле скоростей будем называть линейным). Подобные движения сплошной среды изучались в большом количестве работ (см., например, краткий обзор в [10]). Кроме того, исследован более общий класс решений, а именно решения с линейной зависимостью поля скоростей от части пространственных координат (см. работу [11] и библиографию к ней).

Подгруппа 1. Представление решения:

$$u = u(t, x, y), \qquad v = v_1(t)u, \qquad \rho = \rho_1(t)u^{2(\omega-1)}, \qquad T = T_1(t)u^2. \tag{3.1}$$

Условие линейности поля скоростей:

$$u = u_1(t)x + u_2(t)y + u_3(t). \tag{3.2}$$

Подставляя (3.1), (3.2) в систему (1.1)–(1.4) и расщепляя ее относительно переменных x и y, получаем систему вида

$$\frac{du_1}{u_1} = \frac{du_2}{u_2} = \frac{du_3}{u_3} = U\,dt, \qquad \frac{dv_1}{dt} = V, \qquad \frac{d\rho_1}{dt} = \varrho, \qquad \frac{dT_1}{dt} = \Theta, \tag{3.3}$$

где U, V, ϱ, Θ — известные функции u_1, u_2, u_3, v_1, ρ_1, T_1. По теореме Овсянникова из системы (3.3) следует, что решение редуцируется к инвариантному. Конкретный вид подгруппы, относительно которой решение является инвариантным, определяется после задания констант интегрирования системы (3.3).

Таблица 3

Номер подгруппы	H	J
1	1, 2, 8	$t,\ v/u,\ \rho u^{2(1-\omega)},\ Tu^{-2}$
2	$\alpha 1+2$, 3, 8	$t,\ (tu-x+\alpha y)/v,\ \rho v^{2(1-\omega)},\ Tv^{-2}$
3	1, 2, 5	$t,\ u^2+v^2,\ \rho,\ T$
4	3, 4, 5	$t,\ (ut-x)^2+(vt-y)^2,\ \rho,\ T$
5	1, 2, $5+\alpha 8$ ($\alpha\neq 0$)	$\omega\neq 1$: $t,\ \Big(u\sin\dfrac{\ln\rho}{2\alpha(\omega-1)}+v\cos\dfrac{\ln\rho}{2\alpha(\omega-1)}\Big)\rho^{1/(2-2\omega)},$ $\Big(u\cos\dfrac{\ln\rho}{2\alpha(\omega-1)}-v\sin\dfrac{\ln\rho}{2\alpha(\omega-1)}\Big)\rho^{1/(2-2\omega)},\ T\rho^{1/(1-\omega)}$
		$\omega=1$: $t,\ \Big(u\sin\dfrac{\ln T}{2\alpha}+v\cos\dfrac{\ln T}{2\alpha}\Big)T^{-1/2},$ $\Big(u\cos\dfrac{\ln T}{2\alpha}-v\sin\dfrac{\ln T}{2\alpha}\Big)T^{-1/2},\ \rho$
6	3, 4, $5+\alpha 8$ ($\alpha\neq 0$)	$\omega\neq 1$: $\Big((ut-x)\sin\dfrac{\ln\rho}{2\alpha(\omega-1)}+(vt-y)\cos\dfrac{\ln\rho}{2\alpha(\omega-1)}\Big)\rho^{1/(2-2\omega)},$ $\Big((ut-x)\cos\dfrac{\ln\rho}{2\alpha(\omega-1)}-(vt-y)\sin\dfrac{\ln\rho}{2\alpha(\omega-1)}\Big)\rho^{1/(2-2\omega)},$ $t,\ T\rho^{1/(1-\omega)}$
		$\omega=1$: $t,\ \Big((ut-x)\sin\dfrac{\ln T}{2\alpha}+(vt-y)\cos\dfrac{\ln T}{2\alpha}\Big)T^{-1/2},$ $\Big((ut-x)\cos\dfrac{\ln T}{2\alpha}-(vt-y)\sin\dfrac{\ln T}{2\alpha}\Big)T^{-1/2},\ \rho$
7	1, 6, $7-8$	$y,\ v/u,\ \rho u^{1-2\omega},\ Tu^{-2}$
8	$5+\alpha 8$, 6, $7-8$	$\sqrt{x^2+y^2}\exp\left(\alpha\operatorname{arctg}(y/x)\right),\ (ux+vy)/(vx-uy),$ $\sqrt{x^2+y^2}\,(u^2+v^2)^{1/2-\omega}\rho,\ T(x^2+y^2)/(ux+vy)^2$

Подгруппа 2. Представление решения:

$$u=(vu_1(t)+x-\alpha y)/t,\qquad v=v(t,x,y),\qquad \rho=\rho_1(t)v^{2(\omega-1)},\qquad T=T_1(t)v^2. \tag{3.4}$$

Условие линейности поля скоростей:

$$v=v_1(t)x+v_2(t)y+v_3(t). \tag{3.5}$$

Подставляя (3.4), (3.5) в систему (1.1)–(1.4) и расщепляя ее относительно переменных x и y, получаем систему вида

$$\frac{du_1}{dt}=U,\qquad \frac{dv_1}{dt}+\frac{u_1v_1+1}{t}v_1=v_1V,\qquad \frac{dv_2}{dt}+\frac{u_1v_2-\alpha}{t}v_1=v_2V,$$

$$\frac{dv_3}{dt} + \frac{u_1 v_3}{t} v_1 = v_3 V, \qquad \frac{d\rho_1}{dt} = \varrho, \qquad \frac{dT_1}{dt} = \Theta,$$

где U, V, ϱ, Θ — известные функции u_1, v_1, v_2, v_3, ρ_1, T_1. По теореме Овсянникова решение редуцируется к инвариантному.

Подгруппа 3. Представление решения:

$$u^2 + v^2 = q^2(t), \qquad \rho = \rho(t), \qquad T = T(t).$$

Линейное поле скоростей:

$$u = u_1(t)x + u_2(t)y + u_3(t), \qquad v = v_1(t)x + v_2(t)y + v_3(t).$$

Имеем

$$(u_1 x + u_2 y + u_3)^2 + (v_1 x + v_2 y + v_3)^2 = q^2,$$

откуда после расщепления относительно x и y получаем

$$u_1 \equiv 0, \qquad v_1 \equiv 0, \qquad u_2 \equiv 0, \qquad v_2 \equiv 0, \qquad u_3^2 + v_3^2 = q^2.$$

Полученное решение инвариантно относительно подгруппы $\{X_1, X_2\}$. Редукция доказана.

Подгруппа 4. Представление решения:

$$(ut - x)^2 + (vt - y)^2 = q^2(t), \qquad \rho = \rho(t), \qquad T = T(t). \tag{3.6}$$

Линейное поле скоростей:

$$u = u_1(t)x + u_2(t)y + u_3(t), \qquad v = v_1(t)x + v_2(t)y + v_3(t). \tag{3.7}$$

Подставляя уравнение (3.7) в первое уравнение (3.6) и расщепляя его относительно x и y, получаем

$$u_1 t - 1 = 0, \qquad v_2 t - 1 = 0, \qquad u_2 \equiv 0, \qquad v_1 \equiv 0, \qquad (u_3^2 + v_3^2)t^2 = q^2.$$

Полученное решение инвариантно относительно подгруппы $\{X_3, X_4\}$. Редукция доказана.

Подгруппа 5 ($\omega \neq 1$). Представление решения:

$$u = \rho^{1/(2\omega-2)}\Big(\varphi(t)\sin\frac{\ln\rho}{2\alpha(\omega-1)} + \psi(t)\cos\frac{\ln\rho}{2\alpha(\omega-1)}\Big) \equiv U(t,\rho),$$

$$v = \rho^{1/(2\omega-2)}\Big(\varphi(t)\cos\frac{\ln\rho}{2\alpha(\omega-1)} - \psi(t)\sin\frac{\ln\rho}{2\alpha(\omega-1)}\Big) \equiv V(t,\rho),$$

$$T = T_1(t)\rho^{1/(\omega-1)}, \qquad \rho = \rho(t,x,y).$$

Линейное поле скоростей:

$$u_{xx} = u_{xy} = u_{yy} = v_{xx} = v_{xy} = v_{yy} = 0. \tag{3.8}$$

Так как

$$\frac{\partial U}{\partial\rho} = \frac{\alpha U + V}{2\alpha(\omega-1)\rho}, \qquad \frac{\partial V}{\partial\rho} = \frac{\alpha V - U}{2\alpha(\omega-1)\rho},$$

то система (3.8) принимает вид

$$\begin{gathered} A\rho\rho_{xx} + B\rho_x^2 = 0, \qquad A\rho\rho_{xy} + B\rho_x\rho_y = 0, \qquad A\rho\rho_{yy} + B\rho_y^2 = 0, \\ C\rho\rho_{xx} + D\rho_x^2 = 0, \qquad C\rho\rho_{xy} + D\rho_x\rho_y = 0, \qquad C\rho\rho_{yy} + D\rho_y^2 = 0, \\ A = 2(\omega-1)(\alpha U + V), \qquad B = ((3-2\omega)\alpha - 1/\alpha)U + 2(2-\omega)V, \\ C = 2(\omega-1)(\alpha V - U), \qquad D = 2(\omega-2)U + ((3-2\omega)\alpha - 1/\alpha)V. \end{gathered} \tag{3.9}$$

Условия совместности системы (3.9):

$$(U^2+V^2)\rho_x = 0, \qquad (U^2+V^2)\rho_y = 0.$$

При $\rho_x = \rho_y = 0$ имеем $u = u(t)$, $v = v(t)$, $\rho = \rho(t)$, $T = T(t)$, т. е. решение инвариантно относительно подгруппы $\{X_1, X_2\}$. При $U^2+V^2 = 0$ имеет место состояние покоя: $u = v = 0$. В случае $\omega \neq 0$ из (1.1)–(1.4) следует $\rho \equiv \mathrm{const}$, $T \equiv \mathrm{const}$, т. е. решение инвариантно относительно подгруппы $\{X_1, X_2\}$. При $\omega = 0$ решение системы (1.1)–(1.4) восстанавливается из решения $\tau(x, y)$ уравнения

$$\varkappa(\tau_{xx} + \tau_{yy}) = c_V q$$

по формулам

$$u = 0, \qquad v = 0, \qquad \rho = \tau^{-1}, \qquad T = T_0 \mathrm{e}^{qt}\tau, \qquad q \equiv \mathrm{const}.$$

Редукция к решению, инвариантному относительно какой-либо двумерной подгруппы группы $\{X_1, X_2, X_5 + \alpha X_8\}$, получается только в двух случаях. В первом, тривиальном случае ($\tau \equiv \mathrm{const}$, $q = 0$) решение инвариантно относительно подгруппы $\{X_1, X_2\}$. Во втором случае при

$$\tau = \frac{c_V q}{4\varkappa}\,(x^2+y^2) + a_{10}x + a_{01}y + \frac{\varkappa}{c_V q}\,(a_{10}^2 + a_{01}^2), \qquad q \neq 0, \quad a_{10}^2 + a_{01}^2 \neq 0$$

решение редуцируется к инвариантному относительно подгруппы $\{aX_1 + X_5 + \alpha X_8, bX_1 + X_5 + \alpha X_8\}$, где $a = (2\varkappa/(c_V q))(a_{01} + \alpha a_{10})$; $b = (2\varkappa/(c_V q))(\alpha a_{01} - a_{10})$. Во всех остальных случаях редукция отсутствует. (Следует отметить, что при $a_{10}^2 + a_{01}^2 \neq 0$ решение инвариантно относительно подгруппы $\{X_5 + \alpha X_8\}$, но редукция отсутствует, так как ранг решения увеличивается.)

Подгруппа 5 ($\omega = 1$). Представление решения:

$$u = T^{1/2}\Big(\varphi(t)\sin\frac{\ln T}{2\alpha} + \psi(t)\cos\frac{\ln T}{2\alpha}\Big) \equiv U(t,T),$$
$$v = T^{1/2}\Big(\varphi(t)\cos\frac{\ln T}{2\alpha} - \psi(t)\sin\frac{\ln T}{2\alpha}\Big) \equiv V(t,T),$$
$$\rho = \rho(t), \qquad T = T(t,x,y).$$

Имеем

$$\frac{\partial U}{\partial T} = \frac{\alpha U + V}{2\alpha T}, \qquad \frac{\partial V}{\partial T} = \frac{\alpha V - U}{2\alpha T}.$$

Условие линейности поля скоростей принимает вид

$$\begin{gathered} ATT_{xx} + BT_x^2 = 0, \qquad ATT_{xy} + BT_xT_y = 0, \qquad ATT_{yy} + BT_y^2 = 0, \\ CTT_{xx} + DT_x^2 = 0, \qquad CTT_{xy} + DT_xT_y = 0, \qquad CTT_{yy} + DT_y^2 = 0, \\ A = 2\alpha(\alpha U + V), \qquad B = -(\alpha^2+1)U, \\ C = 2\alpha(\alpha V - U), \qquad D = -(\alpha^2+1)V. \end{gathered} \tag{3.10}$$

Условия совместности системы (3.10):

$$(U^2+V^2)T_x = 0, \qquad (U^2+V^2)T_y = 0.$$

В этом случае все решения системы (1.1)–(1.4) инвариантны относительно подгруппы $\{X_1, X_2\}$.

Подгруппа 6 ($\omega \neq 1$). Представление решения:

$$u = \frac{1}{t}\,\rho^{1/(2\omega-2)}\Big(\varphi(t)\sin\frac{\ln\rho}{2\alpha(\omega-1)} + \psi(t)\cos\frac{\ln\rho}{2\alpha(\omega-1)}\Big) + \frac{x}{t} \equiv U(t,x,\rho),$$

$$v = \frac{1}{t}\,\rho^{1/(2\omega-2)}\Big(\varphi(t)\cos\frac{\ln\rho}{2\alpha(\omega-1)} - \psi(t)\sin\frac{\ln\rho}{2\alpha(\omega-1)}\Big) + \frac{y}{t} \equiv V(t,y,\rho),$$

$$T = T_1(t)\rho^{1/(\omega-1)}, \qquad \rho = \rho(t,x,y).$$

Имеем

$$\frac{\partial U}{\partial\rho} = \frac{t(\alpha U + V) - (\alpha x + y)}{2\alpha(\omega-1)t\rho}, \qquad \frac{\partial V}{\partial\rho} = \frac{t(\alpha V - U) - (\alpha y - x)}{2\alpha(\omega-1)t\rho}.$$

Условие линейности поля скоростей сводится к системе

$$\begin{gathered} A\rho\rho_{xx} + B\rho_x^2 = 0, \qquad A\rho\rho_{xy} + B\rho_x\rho_y = 0, \qquad A\rho\rho_{yy} + B\rho_y^2 = 0, \\ C\rho\rho_{xx} + D\rho_x^2 = 0, \qquad C\rho\rho_{xy} + D\rho_x\rho_y = 0, \qquad C\rho\rho_{yy} + D\rho_y^2 = 0, \\ A = (\alpha U + V)t - (\alpha x + y), \qquad C = (\alpha V - U)t - (\alpha y - x), \\ B = \frac{(\alpha^2 - 2\alpha(\omega-1) - 1)(Ut - x) + 2(\alpha - \omega + 1)(Vt - y)}{2(\omega-1)}, \\ D = \frac{(\alpha^2 - 2\alpha(\omega-1) - 1)(Vt - y) - 2(\alpha - \omega + 1)(Ut - x)}{2(\omega-1)}. \end{gathered} \tag{3.11}$$

Условия совместности системы (3.11):

$$((Ut - x)^2 + (Vt - y)^2)\rho_x = 0, \qquad ((Ut - x)^2 + (Vt - y)^2)\rho_y = 0.$$

При $\rho_x = \rho_y = 0$ имеем

$$u = u_1(t) + x/t, \qquad v = v_1(t) + y/t, \qquad \rho = \rho(t), \qquad T = T(t),$$

т. е. решение инвариантно относительно подгруппы $\{X_3, X_4\}$.

Рассмотрим случай $u = x/t$, $v = y/t$, $\rho = \rho(t,x,y)$, $\rho_x^2 + \rho_y^2 \neq 0$. Уравнения (1.1)–(1.3) принимают вид

$$\omega(2(l_0 + m_0)T_1^{\omega-1} - Rt) = 0, \qquad t\rho_t + x\rho_x + y\rho_y + 2\rho = 0.$$

При $\omega = 0$ решение системы (1.1)–(1.4) восстанавливается из решения $\Psi(\xi,\eta)$, $T_1(t)$ системы

$$\Psi_{\xi\xi} + \Psi_{\eta\eta} = A, \qquad \frac{c_V(t^2T_1)' - 4(l_0 + m_0)}{t^2T_1} = Ak_0 - \frac{2R}{t}, \qquad A \equiv \mathrm{const}$$

по формулам

$$u = \xi, \qquad v = \eta, \qquad \rho = \frac{1}{t^2\Psi}, \qquad T = t^2T_1\Psi, \qquad \xi = \frac{x}{t}, \qquad \eta = \frac{y}{t}.$$

Редукция к решению, инвариантному относительно какой-либо двумерной подгруппы группы $\{X_3, X_4, X_5 + \alpha X_8\}$, получается только в двух случаях. В первом, тривиальном случае ($\Psi \equiv \mathrm{const}$, $A = 0$) решение инвариантно относительно подгруппы $\{X_3, X_4\}$. Во втором случае при

$$\Psi = A(\xi^2 + \eta^2)/4 + a_{10}\xi + a_{01}\eta + 2(a_{10}^2 + a_{01}^2)/A, \qquad A \neq 0, \quad a_{10}^2 + a_{01}^2 \neq 0$$

решение редуцируется к инвариантному относительно подгруппы $\{aX_3+X_5+\alpha X_8, bX_4+X_5+\alpha X_8\}$, где $a=2(a_{01}+\alpha a_{10})/A$; $b=2(\alpha a_{01}-a_{10})/A$. Во всех остальных случаях редукция отсутствует.

При $\omega\neq 0$ решений, удовлетворяющих условию (1.5), не существует.

Подгруппа 6 ($\omega=1$). Представление решения:

$$u=\frac{1}{t}T^{1/2}\Big(\varphi(t)\sin\frac{\ln T}{2\alpha}+\psi(t)\cos\frac{\ln T}{2\alpha}\Big)+\frac{x}{t}\equiv U(t,x,T),$$
$$v=\frac{1}{t}T^{1/2}\Big(\varphi(t)\cos\frac{\ln T}{2\alpha}-\psi(t)\sin\frac{\ln T}{2\alpha}\Big)+\frac{y}{t}\equiv V(t,y,T),$$
$$\rho=\rho(t),\qquad T=T(t,x,y).$$

Имеем

$$\frac{\partial U}{\partial T}=\frac{\alpha(Ut-x)+(Vt-y)}{2\alpha tT},\qquad \frac{\partial V}{\partial T}=\frac{\alpha(Vt-y)-(Ut-x)}{2\alpha tT}.$$

Условие линейности поля скоростей сводится к системе

$$\begin{gathered}ATT_{xx}+BT_x^2=0,\qquad ATT_{xy}+BT_xT_y=0,\qquad ATT_{yy}+BT_y^2=0,\\ CTT_{xx}+DT_x^2=0,\qquad CTT_{xy}+DT_xT_y=0,\qquad CTT_{yy}+DT_y^2=0,\\ A=2(\alpha(Ut-x)+(Vt-y)),\qquad B=-(\alpha+1/\alpha)(Ut-x),\\ C=2(\alpha(Vt-y)-(Ut-x)),\qquad D=-(\alpha+1/\alpha)(Vt-y).\end{gathered}\tag{3.12}$$

Условия совместности системы (3.12):

$$((Ut-x)^2+(Vt-y)^2)T_x=0,\qquad ((Ut-x)^2+(Vt-y)^2)T_y=0.$$

В этом случае единственное решение системы (1.1)–(1.4), удовлетворяющее условию (1.5), имеет вид

$$u=u_1(t)+x/t,\qquad v=v_1(t)+y/t,\qquad \rho=\rho(t),\qquad T=T(t),$$

т. е. решение инвариантно относительно подгруппы $\{X_3,X_4\}$.

Подгруппа 7. Представление решения:

$$u=u(t,x,y),\qquad v=uv_1(y),\qquad \rho=u^{2\omega-1}\rho_1(y),\qquad T=u^2T_1(y).$$

Анализ линейности поля скоростей приводит к одному из трех представлений вектора компонент скорости:

1) $u=u_1(t)x+u_2(t)y+u_3(t)$, $\qquad v=v_0(u_1(t)x+u_2(t)y+u_3(t))$;
2) $u=(y+u_0)u_1(t)$, $\qquad v=(v_0+v_{01}(y+u_0))u_1$;
3) $u=u(t)$, $\qquad v=(v_0y+v_{01})u$.

В случае 1 все решения либо являются подмножеством решений в случае 2, либо не удовлетворяют условию (1.5). В случае 2 все решения редуцируются к инвариантным относительно подгруппы $\{X_1,\alpha X_6+\beta(X_7-X_8)\}$. В случае 3 решение редуцируется к инвариантному относительно подгруппы $\{X_1,X_6\}$.

Подгруппа 8. Представление решения:

$$\frac{ux+vy}{vx-uy}=Q(\xi),\qquad \rho=\frac{(u^2+v^2)^{\omega-1/2}}{\sqrt{x^2+y^2}}\rho_1(\xi),\qquad T=\frac{(ux+vy)^2}{x^2+y^2}T_1(\xi),$$
$$\xi=\sqrt{x^2+y^2}\exp\left(\alpha\operatorname{arctg}(y/x)\right).$$

Так как функция $Q(\xi)$ не зависит от t, то в случае линейного поля скоростей легко получить представление для компонент скорости

$$u = (u_{01}x + u_{02}y + u_{03})w(t), \qquad v = (v_{01}x + v_{02}y + v_{03})w(t).$$

Дальнейший анализ показывет, что уравнение (1.4) принимает вид

$$\frac{dw}{dt} + F(x, y, \xi)w^2 = 0,$$

где F — известная функция. Интегрирование последнего уравнения дает представление для функции w

$$w(t) = 1/(w_0 t + w_{01}).$$

Полученное решение редуцируется к инвариантному относительно подгруппы $\{X_5 + \alpha X_8, w_{01}X_6 + w_0(X_7 - X_8)\}$.

Заключение. Таким образом, доказано достаточное условие редуцируемости регулярных частично инвариантных решений ранга 1 дефекта 1 уравнений плоских движений вязкого теплопроводного совершенного газа. Также показано, что среди решений системы (1.1)–(1.4) с однородной деформацией имеется только два частично инвариантных решения ранга 1 дефекта 1, которые не редуцируются к инвариантным. Первое решение не представляет особого интереса, так как описывает распределение термодинамических параметров в покоящемся газе. Второе решение восстанавливается из решения уравнения Пуассона. При этом начально-краевые задачи для системы (1.1)–(1.4) легко сводятся к краевой задаче для уравнения Пуассона. Задание скорости на границе должно быть согласовано с решением. Заданию температуры на границе области соответствует задача Дирихле, заданию потока температуры — задача Неймана, возможны также смешанные задачи. В настоящее время эллиптические уравнения в области с криволинейной границей можно решать численно с очень высокой точностью [12]. Поэтому полученное новое решение системы (1.1)–(1.4) получается численно с любой необходимой точностью и может служить тестом для формул, алгоритмов и их программных реализаций при разработке численных методов и создании комплексов вычислительных программ.

Следует отметить принципиальное отличие построенных новых решений от известных решений с линейной зависимостью вектора скорости от части пространственных координат, полученных в [11] для уравнений динамики вязкой несжимаемой теплопроводной жидкости и изоэнтропических течений сжимаемого газа с политропным уравнением состояния. Ранее во всех решениях термодинамические параметры (температура, давление, энтропия и др.) линейно или квадратично зависели от части пространственных координат. В данной работе эти ограничения не вводились. В результате удалось получить решения, в которых зависимость температуры от пространственных координат сложнее, чем полиномиальная (описываемая с помощью решения уравнений Пуассона). Решения с линейной зависимостью температуры от пространственных координат получаются как частный случай новых построенных решений, при этом доказано, что все они (а также решения с квадратичной зависимостью температуры от пространственных координат) редуцируются к инвариантным решениям.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Бублик В. В.** Групповая классификация двумерных уравнений движения вязкого теплопроводного совершенного газа // ПМТФ. 1996. Т. 37, № 2. С. 27–34.
2. **Бублик В. В.** Инвариантные решения ранга 1 уравнений плоских движений вязкого теплопроводного совершенного газа // ПМТФ. 1997. Т. 38, № 3. С. 26–31.

3. **Бублик В. В.** “Простые” решения уравнений двумерных движений вязкого теплопроводного совершенного газа // Динамика сплошной среды / РАН. Сиб. отд-ние. Ин-т гидродинамики. 2000. Вып. 116. С. 123–127.
4. **Овсянников Л. В.** Регулярные и нерегулярные частично инвариантные решения // Докл. РАН. 1995. Т. 343, № 2. С. 156–159.
5. **Бытев В. О.** К задаче о редукции // Динамика сплошной среды / АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т гидродинамики. 1970. Вып. 5. С. 146–148.
6. **Овсянников Л. В.** Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978.
7. **Бублик В. В.** Точные решения уравнений осесимметричных движений вязкого теплопроводного совершенного газа, описываемые системами обыкновенных дифференциальных уравнений // ПМТФ. 1999. Т. 40, № 5. С. 51–54.
8. **Фиников С. П.** Метод внешних форм Картана в дифференциальной геометрии. М.; Л.: Гостехтеоретиздат, 1948.
9. **Pommaret J. F.** Systems of partial differential equations and Lie pseudogroups. N. Y.; L.; P., 1978. (Mathematics and its applications; V. 14).
10. **Богоявленский О. И.** Методы качественной теории динамических систем в астрофизике и газовой динамике. М.: Наука, 1980.
11. **Сидоров А. Ф.** Об одном классе решений уравнений газовой динамики и естественной конвекции // Численные и аналитические методы решения задач механики сплошной среды: Сб. ст. Свердловск: Урал. науч. центр АН СССР, 1981. С. 101–117.
12. **Шапеев А. В., Шапеев В. П.** Разностные схемы повышенной точности для решения эллиптических уравнений в области с криволинейной границей // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2000. Т. 40, № 2. С. 223–232.

Поступила в редакцию 15/VI 2005 г.,
в окончательном варианте — 12/XII 2005 г.