

УДК 539.374

## ТЕЧЕНИЕ УПРУГОВЯЗКОПЛАСТИЧЕСКОГО МАТЕРИАЛА МЕЖДУ ВРАЩАЮЩИМИСЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКИМИ ПОВЕРХНОСТЯМИ В УСЛОВИЯХ НЕЖЕСТКОГО СЦЕПЛЕНИЯ

А. С. Бегун<sup>\*,\*\*</sup>, А. А. Буренин<sup>\*\*\*</sup>, Л. В. Ковтанюк<sup>\*</sup>

\* Институт автоматизации и процессов управления ДВО РАН,  
690041 Владивосток, Россия

\*\* Владивостокский государственный университет экономики и сервиса,  
690014 Владивосток, Россия

\*\*\* Институт машиноведения и металлургии ДВО РАН,  
681005 Комсомольск-на-Амуре, Россия  
E-mails: ustinova@iacp.dvo.ru, burenin@iacp.dvo.ru, lk@iacp.dvo.ru

С использованием теории больших деформаций построены точные решения последовательности одномерных краевых задач о возникновении, развитии и последующем торможении вискозиметрического течения несжимаемого упруговязкопластического материала, расположенного в зазоре между жесткими вращающимися коаксиальными цилиндрическими поверхностями. В квазистатическом приближении с учетом возможности проскальзывания материала на его жестких границах определены условия зарождения течения в деформируемом материале и закономерности движения по этому материалу граничных поверхностей течения как при его развитии, так и при торможении. Вычислены параметры напряженно-деформированных состояний в областях обратимого деформирования и течения на всех стадиях процесса включая прекращение течения и полную разгрузку при вращении жесткой границы в противоположном направлении.

**Ключевые слова:** упругость, вязкопластичность, большие деформации, вискозиметрические течения.

Вязкость конструкционных материалов может быть измерена в ходе вискозиметрических экспериментов. При обработке результатов таких испытаний обычно используется точное решение соответствующей модельной краевой задачи. В механике вязких и вязкопластических сред такие решения являются классическими [1–4]. В случае конструкционных материалов или эластичных жидкостей, когда упругими свойствами испытываемых материалов невозможно пренебречь, задачи о вискозиметрических течениях существенно усложняются. В областях течения указанных материалов деформации нельзя считать малыми, поэтому адекватной вискозиметрическому эксперименту простейшей математической моделью является модель больших деформаций сред с упругими, вязкими и пластическими свойствами. Разработано большое количество замкнутых геометрически и термодинамически непротиворечивых математических моделей пластического те-

---

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 13-01-00283), Совета по грантам Президента РФ для государственной поддержки молодых российских ученых (грант № МК-2879.2014.1) и Министерства образования и науки РФ в рамках государственного задания вузам на выполнение научно-исследовательской работы (код проекта 2014/292).

© Бегун А. С., Буренин А. А., Ковтанюк Л. В., 2015

чения, в которых учитываются большие упругопластические деформации (см., например, [5–11]). При использовании данных моделей при постановке и решении задач о пластическом течении наряду с существенной нелинейностью краевых задач возникает проблема, обусловленная движением по деформируемой среде упругопластических границ как при активном нагружении, так и в процессе разгрузки. Расположение и закономерности движения граничных поверхностей, по разные стороны которых деформирование описывается различными системами модельных уравнений, определяются только в процессе решения задачи. Поэтому к настоящему времени получено небольшое количество точных решений задач теории больших упругопластических деформаций [12–15]. В [14] построено точное решение задачи, моделирующей вискозиметрическое течение среды в зазоре между жесткими цилиндрическими поверхностями. При этом полагалось, что на поверхности контакта испытываемого материала с жесткими цилиндрическими поверхностями выполняются условия прилипания. Однако в экспериментах добиться жесткого контакта испытываемого материала как с внутренним, так и с внешним вращающимся цилиндром достаточно сложно. Часто в начале эксперимента наблюдается проскальзывание в отсутствие развитого вязкопластического течения. В данной работе полученное ранее решение [14] обобщается на рассматриваемый случай.

**1. Основные соотношения используемой модели.** В качестве математической модели упруговязкопластической среды, допускающей большие деформации, будем использовать модель, предложенную в [10] и обобщенную в [16] на случай учета вязких свойств материала на стадии его пластического течения. В соответствии с термодинамическим подходом к построению модели больших деформаций упругопластических сред [11] в декартовой прямоугольной системе пространственных координат Эйлера  $x_i$  обратимая  $e_{ij}$  и необратимая  $p_{ij}$  компоненты тензора деформаций определяются уравнениями изменения (переноса) [10]

$$\begin{aligned} \frac{De_{ij}}{Dt} &= \varepsilon_{ij} - \varepsilon_{ij}^p - \frac{1}{2}((\varepsilon_{ik} - \varepsilon_{ik}^p + z_{ik})e_{kj} + e_{ik}(\varepsilon_{kj} - \varepsilon_{kj}^p - z_{kj})), \\ \frac{Dp_{ij}}{Dt} &= \varepsilon_{ij}^p - p_{ik}\varepsilon_{kj}^p - \varepsilon_{ik}^p p_{kj}, \quad \frac{Dn_{ij}}{Dt} = \frac{dn_{ij}}{dt} - r_{ik}n_{kj} + n_{ik}r_{kj}, \\ \varepsilon_{ij} &= \frac{1}{2}(v_{i,j} + v_{j,i}), \quad r_{ij} = \frac{1}{2}(v_{i,j} - v_{j,i}) + z_{ij}(\varepsilon_{sk}, e_{sk}), \\ v_i &= \frac{du_i}{dt} = \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_{i,j}v_j, \quad u_{i,j} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}. \end{aligned} \tag{1.1}$$

Здесь  $u_i, v_i$  — компоненты векторов перемещений и скоростей;  $\varepsilon_{ij}^p$  — компоненты тензора скоростей пластических деформаций (источник в уравнении переноса для тензора необратимых деформаций). Выполнение условия неизменности тензора необратимых (пластических) деформаций при обратимом деформировании и разгрузке ( $\varepsilon_{ij}^p = 0$ ) привело [10] к введению объективной производной по времени специального вида, записанной в (1.1) для произвольного тензора с компонентами  $n_{ij}$ . В отсутствие нелинейной составляющей  $z_{ij}$  тензора вращений  $r_{ij}$  данная производная является производной Яумана. Явные зависимости для компонент тензора  $z_{ij} = z_{ij}(\varepsilon_{ij}, e_{ij})$  вследствие их громоздкости не приводятся (см. [10, 17]). Компоненты  $d_{ij}$  тензора полных деформаций Альманси вычисляются в соответствии с (1.1) следующим образом:

$$d_{ij} = e_{ij} + p_{ij} - \frac{1}{2} \varepsilon_{ik}e_{kj} - e_{ik}p_{kj} - p_{ik}e_{kj} + e_{ik}p_{ks}e_{sj}. \tag{1.2}$$

Согласно (1.2) тензором обратимых деформаций является тензор с компонентами  $s_{ij} = e_{ij} - e_{ik}e_{kj}/2$ . Введение линейной составляющей данного тензора позволяет записать

аналог известной в нелинейной теории упругости формулы Мурнагана [18] для случая пластически деформируемой среды. В предположении, что термодинамический потенциал (свободная энергия) не зависит от величины накопленных необратимых деформаций, а определяется только внутренним параметром (температурой) и обратимыми деформациями, данная формула с уравнением баланса энтропии непосредственно следует из дифференциальной формулировки закона сохранения энергии [10, 17]. Запишем аналог формулы Мурнагана для рассматриваемого случая несжимаемой уругопластической среды:

$$\sigma_{ij} = \begin{cases} -p\delta_{ij} + \frac{\partial W}{\partial d_{ik}} (\delta_{kj} - 2d_{kj}), & p_{ij} \equiv 0, \\ -p_1\delta_{ij} + \frac{\partial W}{\partial e_{ik}} (\delta_{kj} - e_{kj}), & p_{ij} \neq 0. \end{cases} \quad (1.3)$$

Здесь  $\sigma_{ij}$  — компоненты тензора напряжений Эйлера — Коши;  $p, p_1$  — добавочные гидростатические давления;  $W = W(e_{ij})$  — упругий потенциал (плотность распределения свободной энергии), для которого принимается следующее выражение [18]:

$$W = -2\mu J_1 - \mu J_2 + bJ_1^2 + (b - \mu)J_1 J_2 - \chi J_1^3, \\ J_k = \begin{cases} L_k, & p_{ij} \equiv 0, \\ I_k, & p_{ij} \neq 0 \end{cases} \quad (k = 1, 2), \quad (1.4)$$

$$L_1 = d_{kk}, \quad L_2 = d_{ik}d_{ki}, \quad I_1 = s_{jj}, \quad I_2 = s_{ik}s_{kj}$$

( $\mu$  — модуль сдвига испытываемого материала;  $b, \chi$  — модули упругости более высокого порядка). С целью учета вязкости при пластическом течении в качестве пластического потенциала примем обобщенное условие пластичности Треска [16, 19]

$$\max |\sigma_i - \sigma_j| = 2k + 2\eta \max |\varepsilon_k^p|, \quad (1.5)$$

где  $\sigma_i, \varepsilon_k^p$  — главные значения тензоров напряжений и скоростей пластических деформаций;  $k, \eta$  — предел текучести и вязкость соответственно. Скорости необратимых деформаций  $\varepsilon_{ij}^p$  связаны с напряжениями с использованием принципа максимума Мизеса ассоциированным законом пластического течения

$$\varepsilon_{ij}^p = \lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}, \quad f(\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}^p) = k, \quad \lambda > 0. \quad (1.6)$$

Соотношения (1.1)–(1.6) с уравнениями равновесия представляют собой замкнутую систему уравнений изотермического квазистатического деформирования сред с упругими и пластическими свойствами, учитывающую вязкость среды при ее пластическом течении.

**2. Постановка задачи. Начальное упругое деформирование.** Пусть материал, свойства которого описаны выше, представляет собой слой, расположенный между недеформируемыми цилиндрами, уравнения которых в цилиндрической системе координат  $(r, \varphi, z)$  имеют вид  $r = r_0, r = R$  ( $r_0 < R$ ). Полагаем, что внутренний цилиндр закреплен, а внешняя стенка ( $r = R$ ) равноускоренно поворачивается:  $\omega_R = \alpha t, \theta_R = \alpha t^2/2$  ( $\omega_R, \theta_R$  — угловая скорость и угол поворота жесткой стенки соответственно). Считаем, что до момента начала воздействия ( $t \leq 0$ ) деформации в слое отсутствуют, а напряженное состояние, вызванное начальным поджатием, задается одним параметром, например  $\sigma_{rr} = \sigma_0$  при  $r = r_0$ . Контакт материала с жесткими стенками происходит в соответствии с законом сухого трения

$$|\sigma_{r\varphi}| \leq \gamma |\sigma_{rr}|, \quad r = r_0, R, \quad (2.1)$$

где  $\gamma$  — коэффициент трения покоя. Условие несжимаемости среды задает ее кинематику:

$$\begin{aligned} u_r &= r(1 - \cos \theta(r, t)), & u_\varphi &= r \sin \theta(r, t), \\ d_{rr} &= -\frac{1}{2} r^2 \left( \frac{\partial \theta}{\partial r} \right)^2, & d_{r\varphi} &= \frac{1}{2} r \frac{\partial \theta}{\partial r}. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Здесь  $\theta(r, t)$  — неизвестный центральный угол закручивания. При начальном обратимом деформировании согласно (1.3), (1.4) для компонент тензора напряжений имеем

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} = \sigma_{zz} &= -(p + 2\mu) - \frac{1}{2} (b + \mu) r^2 \left( \frac{\partial \theta}{\partial r} \right)^2 \equiv -s, \\ \sigma_{\varphi\varphi} &= -s + \mu r^2 \left( \frac{\partial \theta}{\partial r} \right)^2, & \sigma_{r\varphi} &= \mu r \frac{\partial \theta}{\partial r}. \end{aligned} \quad (2.3)$$

В (2.3) компоненты тензора напряжений записаны с точностью до слагаемых второго порядка по упругим деформациям. Таким образом, обратимые деформации считаются настолько малыми, что их третьим порядком можно пренебречь.

Считая скорости деформирования и течения достаточно малыми и поэтому пренебрегая силами инерции, путем интегрирования уравнений равновесия

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}}{r} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_{r\varphi}}{\partial r} + 2 \frac{\sigma_{r\varphi}}{r} = 0 \quad (2.4)$$

с учетом (2.2), (2.3) и граничных условий получаем решение задачи

$$\begin{aligned} \sigma_{r\varphi} &= \frac{c}{r^2}, & \sigma_{rr} = \sigma_{zz} &= \frac{c^2}{4\mu} \left( \frac{1}{r_0^4} - \frac{1}{r^4} \right) + \sigma_0, \\ \sigma_{\varphi\varphi} &= \frac{c^2}{4\mu} \left( \frac{1}{r_0^4} - \frac{3}{r^4} \right) + \sigma_0, & \theta &= \frac{c}{2\mu} \left( \frac{1}{r_0^2} - \frac{1}{r^2} \right), \\ \omega &= \frac{\dot{c}}{2\mu} \left( \frac{1}{r_0^2} - \frac{1}{r^2} \right), & \dot{c} = \frac{dc}{dt}, & c = c(t) = \frac{\alpha \mu t^2}{r_0^{-2} - R^{-2}}. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Данные зависимости справедливы лишь на начальном этапе деформирования. В момент времени  $t = t_0$  либо начнется проскальзывание, либо возникнет вязкопластическое течение материала в окрестности жесткой граничной поверхности  $r = r_0$ . При  $\gamma\sigma_0 < k$  проскальзывание начнется до момента возникновения течения. Поэтому начиная с момента времени  $t = t_0$  краевое условие (2.1) при  $r = r_0$  должно быть заменено условием

$$|\sigma_{r\varphi}| = \gamma |\sigma_{rr}| + \xi |\omega|, \quad t > t_0 = \sqrt{\frac{\gamma\sigma_0}{\alpha\mu} \left( 1 - \frac{r_0^2}{R^2} \right)}, \quad (2.6)$$

где  $\xi$  — постоянная вязкого трения. Граничное условие (2.6) приводит к изменению функции  $c(t)$  в (2.5). Согласно (2.6) для этой функции имеет место дифференциальное уравнение

$$\frac{\dot{c}}{2\mu} \left( \frac{1}{r_0^2} - \frac{1}{R^2} \right) + \frac{c}{r_0^2 \xi} = \alpha t + \frac{\gamma\sigma_0}{\xi},$$

решением которого является функция

$$\begin{aligned} c(t) &= \frac{r_0^2}{2\mu R^2} \left( 2\alpha \xi R^2 t + \alpha \xi^2 (r_0^2 - R^2) + \right. \\ &\quad \left. + \exp \left( \frac{2\mu R^2 (t - t_0)}{\xi (r_0^2 - R^2)} \right) \alpha \xi [\xi (R^2 - r_0^2) - 2t_0 \mu R^2] + 2\mu \gamma \sigma_0 R^2 \right). \end{aligned} \quad (2.7)$$

Для угла поворота и угловой скорости частиц деформируемой среды с радиусом  $r$  в любой момент времени  $t > t_0$  получаем зависимости

$$\theta = \frac{c}{2\mu} \left( \frac{1}{R^2} - \frac{1}{r^2} \right) + \frac{\alpha t^2}{2}, \quad \omega = \frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\dot{c}}{2\mu} \left( \frac{1}{R^2} - \frac{1}{r^2} \right) + \alpha t. \quad (2.8)$$

Напряжения вычисляются по зависимостям, аналогичным (2.5). Различие заключается в том, что в (2.5) функция  $c = c(t)$  определена согласно (2.7). Это решение справедливо только в интервале времени с момента  $t_0$  до момента  $t_1$ , в который возникает вязкопластическое течение.

**3. Вязкопластическое течение.** Условия возникновения в момент времени  $t = t_1$  на граничной поверхности  $r = r_0$  течения следуют из (1.5) и в рассматриваемом случае имеет вид

$$\sigma_{r\varphi}(r_0, t_1) = k, \quad c(t_1) = k r_0^2. \quad (3.1)$$

При  $t > t_1$  вязкопластическое течение занимает область  $r_0 \leq r \leq r_1(t)$  (область II), где  $r_1(t)$  — координата движущейся по материалу границы данной области, отделяющей ее от области упругого деформирования  $r_1(t) \leq r \leq R$  (область I). Момент времени  $t_1$  вычисляется по формулам (2.7), (3.1). С учетом кинематических соотношений используемой модели (1.1), (1.2) в данном случае можно записать

$$v_\varphi = r \frac{\partial \theta}{\partial t}, \quad \varepsilon_{r\varphi} = \frac{\partial d_{r\varphi}}{\partial t} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} - \frac{v_\varphi}{r} \right) = \frac{1}{2} r \frac{\partial^2 \theta}{\partial r \partial t},$$

$$\varepsilon_{r\varphi} = \varepsilon_{r\varphi}^e + \varepsilon_{r\varphi}^p = \frac{\partial e_{r\varphi}}{\partial t} + \frac{\partial p_{r\varphi}}{\partial t}, \quad (3.2)$$

$$\varepsilon_{rr}^p = \frac{\partial p_{rr}}{\partial t} + 2p_{r\varphi}(r_{\varphi r} + \varepsilon_{r\varphi}^p), \quad \varepsilon_{\varphi\varphi}^p = \frac{\partial p_{\varphi\varphi}}{\partial t} + 2p_{r\varphi}(r_{r\varphi} + \varepsilon_{r\varphi}^p),$$

$$\varepsilon_{rr}^p = -\varepsilon_{\varphi\varphi}^p = -2\varepsilon_{r\varphi}^p e_{r\varphi}, \quad p_{\varphi\varphi} = 2e_{r\varphi} p_{r\varphi}, \quad p_{rr} = 2d_{r\varphi}(e_{r\varphi} - d_{r\varphi}).$$

Для области упругого деформирования  $r_1(t) \leq r \leq R$ , интегрируя уравнения равновесия (2.4) при условиях прилипания на поверхности  $r = R$ , находим

$$\sigma_{r\varphi} = \frac{c(t)}{r^2}, \quad \theta = \theta^I(r, t) = A(c(t), r, R) + \frac{\alpha t^2}{2}, \quad A(c(t), r, R) = \frac{c(t)}{2\mu} \left( \frac{1}{R^2} - \frac{1}{r^2} \right). \quad (3.3)$$

Здесь, как и выше,  $c(t)$  — неизвестная функция интегрирования.

В области течения  $r_0 \leq r \leq r_1(t)$  компоненты напряжений вычисляются через обратимые деформации по зависимостям, следующим из (1.3), (1.4):

$$\sigma_{rr} = \sigma_{zz} - (p_1 + 2\mu) - \frac{1}{2}(b + \mu)e_{r\varphi}^2 = -s_1(t), \quad \sigma_{\varphi\varphi} = -s_1(t) + 4\mu e_{r\varphi}^2, \quad \sigma_{r\varphi} = 2\mu e_{r\varphi}. \quad (3.4)$$

В то же время в результате интегрирования уравнений равновесия в этой области получаем зависимости  $\sigma_{r\varphi} = m(t)r^{-2}$ ,  $e_{r\varphi} = 0,5m(t)\mu^{-1}r^{-2}$ . Из условий непрерывности компонент напряжений на упругопластической границе  $r = r_1(t)$  следует  $m(t) = c(t)$ ,  $s_1(t) = s(t)$ , а из ассоциированного закона течения (1.6) с условием пластичности (1.5) — соотношения

$$\sigma_{r\varphi} = k + \eta \varepsilon_{r\varphi}^p, \quad \lambda = \varepsilon_{r\varphi}^p / (k + \eta \varepsilon_{r\varphi}^p). \quad (3.5)$$

Из зависимостей (3.4), (3.5) с учетом (3.2) можно вычислить скорость пластической деформации  $\varepsilon_{r\varphi}^p$  и компоненту  $p_{r\varphi}$  тензора необратимых деформаций:

$$\varepsilon_{r\varphi}^p = \frac{1}{\eta} \left( \frac{c(t)}{r^2} - k \right), \quad p_{r\varphi} = \frac{1}{\eta} \left( \frac{c_1(t)}{r^2} - kt \right) + g(r), \quad c_1(t) = \int_{t_1}^t c(\tau) d\tau. \quad (3.6)$$

Здесь  $g(r)$  — неизвестная функция интегрирования. На упругопластической границе  $r = r_1(t)$  скорости пластических деформаций равны нулю, поэтому  $c(t) = kr_1^2(t)$ . Таким образом, с учетом граничных условий на поверхности  $r = r_0$  и условия непрерывности скоростей на упругопластической границе  $r = r_1(t)$  для распределения в каждый момент времени угловых скоростей по радиусу  $r_0 < r < R$  получаем следующие выражения:

— в упругой области I

$$\omega = F(c(t), r_1, r_0) + A(\dot{c}(t), r_1, r_0) + H(r_1);$$

— в области течения II

$$\omega = F(c(t), r, r_0) + A(\dot{c}(t), r, r_0) + H(r_1).$$

Здесь

$$F(c(t), r, r_0) = \frac{2}{\eta} \left( k \ln \frac{r_0}{r} + \frac{c(t)}{2} \left( \frac{1}{r_0^2} - \frac{1}{r^2} \right) \right), \quad H(r_1) = \frac{kr_1^2}{\xi r_0^2} - \frac{\gamma \sigma_0}{\xi}.$$

Положение упругопластической границы  $r = r_1(t)$  в каждый момент времени задается обыкновенным дифференциальным уравнением, следующим из условия на поворачивающейся поверхности  $r = R$ :

$$F(kr_1^2, r_1, r_0) + A(2kr_1r_1, R, r_0) + H(r_1) = \alpha t. \quad (3.7)$$

Из условия равенства нулю пластических деформаций на движущейся упругопластической границе получаем задачу Коши для системы дифференциальных уравнений

$$\eta r g' - 2k\tau - 2g = 0, \quad \mu \tau' (\alpha \tau - F(kr^2, r, r_0) - H(r)) = kr(r_0^{-2} - R^{-2}),$$

$$g = g(r), \quad \tau = \tau(r), \quad g' = \frac{dg}{dr}, \quad \tau' = \frac{d\tau}{dr}$$

с начальными условиями

$$\tau(r_0) = t_1,$$

$$g(r_0) = \frac{1}{\eta} \left( -kt_1 + \alpha \mu^{-2} r_0^{-2} \{ 3\xi [2\mu^2(t_1^2 - t_0^2) - 2t_1\mu\xi + \xi^2] + 4\mu^3 R^2 t_0^3 (R^2 - r_0^2)^{-1} + 3\xi^2 r_0^2 R^{-4} [2R^2(\mu t_1 - \xi) + \xi r_0^2] \} + 3 \exp \left( \frac{2\mu R^2(t_1 - t_0)}{\xi(r_0^2 - R^2)} \right) \alpha \xi^2 r_0^{-2} (R^2 - r_0^2) (2t_0\mu + \xi(r_0^2 - R^2)) + 12\gamma \sigma_0 r_0^{-2} (t_1 - t_0) \right).$$

Из решения данной системы находим неизвестную функцию  $g(r)$  в (3.6). При решении упругопластических задач должно быть выполнено условие непрерывности перемещений на упругопластической границе [20]. В соответствии с (3.2), (3.6) запишем дифференциальное уравнение для  $\theta(r, t)$  в области течения, справедливое в любой момент времени:

$$\frac{1}{2} r \frac{\partial \theta}{\partial r} = \frac{1}{\eta} \left( -kt + \frac{c_1(t)}{r^2} \right) + \frac{c(t)}{2\mu r^2} + g(r).$$

Интегрируя это уравнение, находим

$$\theta = \theta^{\text{II}}(r, t) = \frac{2}{\eta} \left( -kt \ln r - \frac{c_1(t)}{2r^2} \right) - 2 \frac{c(t)}{\mu r^2} + \int \frac{2g(r)}{r} dr. \quad (3.8)$$

Неизвестная функция времени, появляющаяся после вычисления неопределенного интеграла в правой части последнего равенства, определяется условием непрерывности перемещений на упругопластической границе  $r = r_1(t)$ :  $\theta^{\text{II}}(r_1, t) = \theta^{\text{I}}(r_1, t)$ . Таким образом

устраняется разрыв перемещений на упругопластической границе. Более того, при развитии течения в некоторый момент времени  $t = t^* > t_1$  может начаться проскальзывание материала на граничной поверхности  $r = R$ . Чтобы избежать этого, будем полагать, что начиная с момента времени  $t = t_2 < t^*$  скорость вращения цилиндрической поверхности  $r = R$  становится постоянной:

$$\omega_R = \alpha t_2, \quad \theta_R = \alpha t_2 t - \alpha t_2^2 / 2.$$

При  $t > t_2$  область деформирования разбивается на три области: область  $r_2(t) \leq r \leq R$  (область I), в которой происходит обратимое деформирование, и две области вязкопластического течения, в которых пластические деформации рассчитываются по разным формулам: область  $r_1(t_2) \leq r \leq r_2(t)$  (область II) и область  $r_0 \leq r \leq r_1(t_2)$  (область III). Развитие области необратимого деформирования обусловлено движением упругопластической границы  $r = r_2(t)$ . Для области I обратимого деформирования получаем

$$\theta^I(r, t) = A(c(t), r, R) + \alpha t_2 t - 0,5 \alpha t_2^2, \quad \omega^I(r, t) = A(\dot{c}(t), r, R) + \alpha t_2.$$

В областях вязкопластического течения распределения угловых скоростей в любой момент времени  $t > t_2$  одни и те же:

$$\omega^{\text{II}} = \omega^{\text{III}} = F(c(t), r, r_0) + A(\dot{c}(t), r, r_0) + H(r_2), \quad c(t) = k r_2^2(t).$$

Положение движущейся упругопластической границы при  $t > t_2$  задается решением дифференциального уравнения, следующего из условия непрерывности скоростей при  $r = r_2(t)$ , при начальном условии  $r_2(t_2) = r_1(t_2)$ . Данное уравнение аналогично уравнению (3.7), в котором  $r_1(t)$  следует заменить на  $r_2(t)$ , а  $\alpha t$  — на  $\alpha t_2$ . Таким образом, кинематика пластического течения определяется решением системы уравнений

$$\begin{aligned} p_{r\varphi}^{\text{III}} &= \frac{1}{\eta} \left( \frac{c_1(t)}{r^2} - kt \right) + g(r), & p_{r\varphi}^{\text{II}} &= \frac{1}{\eta} \left( \frac{c_1(t)}{r^2} - kt \right) + h(r), \\ \eta r h' - 2k\tau - 2h &= 0, & \mu \tau' (\alpha t_2 - F(kr^2, r, r_0) - H(r)) &= k r (r_0^{-2} - R^{-2}), \\ h(r_1) = g(r_1), & \tau(r_1) = t_2, & \theta^{\text{II}} &= \frac{2}{\eta} \left( -kt \ln r - \frac{c_1(t)}{2r^2} \right) - \frac{c(t)}{2\mu r^2} + 2 \int \frac{h(r)}{r} dr, \\ \theta^{\text{II}}(r_2, t) &= \theta^{\text{I}}(r_2, t), & \theta^{\text{III}}(r_1, t) &= \theta^{\text{II}}(r_1, t). \end{aligned} \quad (3.9)$$

При этом следует учитывать, что  $\theta^{\text{III}} = \theta$ , где  $\theta$  вычисляется согласно зависимостям (3.8). По определенной выше кинематике напряжения в различных зонах деформирования вычисляются аналогично тому, как это было выполнено выше. При этом используются условия равенства напряжений на стационарной границе  $r = r_1(t_2)$  и движущейся упругопластической границе  $r = r_2(t)$ . На рис. 1 показана зависимость координаты границы области вязкопластического течения от времени. Зависимости  $r_1(\tau)$ ,  $r_2(\tau)$  получены при следующих значениях безразмерных параметров задачи:  $r_0/R = 0,5$ ,  $\eta\sqrt{\alpha}/\mu = 0,004$ ,  $\xi\sqrt{\alpha}/\mu = 0,01$ ,  $k/\mu = 0,00621$ ,  $\gamma\sigma_0/\mu = 0,005$ .

Область течения развивается при ускоренном вращении граничной поверхности, но после того как вращение становится равномерным (при  $t \geq t_2$ ), координата упругопластической границы  $r = r_2(t)$  асимптотически приближается к предельному значению и далее область течения не развивается. Момент времени, при котором завершается развитие области течения, соответствует моменту обращения в нуль производной функции  $r = r_2(t)$  по времени.

**4. Торможение и разгрузка.** Пусть начиная с некоторого момента времени  $t = t_*$  ( $t_* > t_2$ ) вращение поверхности  $r = R$  замедляется по закону

$$\omega_R = \alpha t_2 - \beta(t - t_*), \quad \theta_R = \alpha t_2 t - \alpha t_2^2 / 2 - \beta(t - t_*)^2 / 2. \quad (4.1)$$

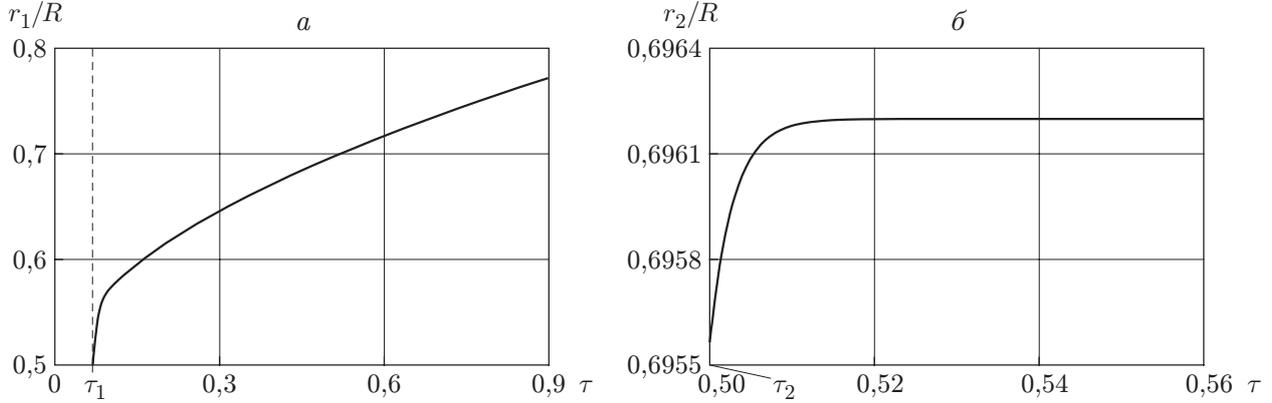


Рис. 1. Зависимость координаты границы области вязкопластического течения от времени:  
 а — равноускоренное вращение жесткой поверхности, б — вращение жесткой поверхности с постоянной скоростью

Изменение режима нагружения приводит к возникновению новой упругопластической границы  $r = r_3(t)$ , которая движется к оси симметрии от стационарной поверхности  $r = r_2(t_*)$ . Деформируемая область  $r_0 \leq r \leq R$  разбивается теперь на четыре области: в областях  $r_0 \leq r \leq r_1(t_2)$  (область IV) и  $r_1(t_2) \leq r \leq r_3(t)$  (область III) продолжается вязкопластическое течение, в области  $r_3(t) \leq r \leq r_2(t_*)$  (область II) пластические деформации прекращают изменяться, в области  $r_2(t_*) \leq r \leq R$  (область I) по-прежнему происходит обратимое деформирование ( $r_3(t)$  — координата движущейся границы, отделяющей область течения от области с постоянными пластическими деформациями).

Для области обратимого деформирования (область I), используя граничные условия (4.1), получаем

$$\begin{aligned} \theta^I(r, t) &= A(c(t), r, R) + \alpha t_2 t - \alpha t_2^2 / 2 - \beta(t - t_*)^2 / 2, \\ \omega^I(r, t) &= A(\dot{c}(t), r, R) + \alpha t_2 - \beta(t - t_*), \end{aligned} \tag{4.2}$$

для области с неизменяющимися пластическими деформациями (область II) имеем

$$\varepsilon_{r\varphi}^p = 0, \quad p_{r\varphi} = y(r), \quad \omega^{II} = A(\dot{c}(t), r, R) + \alpha t_2 - \beta(t - t_*), \quad c(t) = kr_3^2, \tag{4.3}$$

для областей вязкопластического течения (области III, IV) получаем соотношения

$$\begin{aligned} \omega^{III} = \omega^{IV} &= F(c(t), r, r_0) + A(\dot{c}(t), r, r_0) + H(r_3), \quad \varepsilon_{r\varphi}^p = \frac{1}{\eta} \left( \frac{c(t)}{r^2} - k \right), \\ p_{r\varphi}^{IV} &= \frac{1}{\eta} \left( \frac{c_1(t)}{r^2} - kt \right) + g(r), \quad p_{r\varphi}^{III} = \frac{1}{\eta} \left( \frac{c_1(t)}{r^2} - kt \right) + h(r). \end{aligned}$$

Положение неизвестной движущейся границы  $r_3(t)$  определяется из решения уравнения

$$\alpha t_2 - \beta(t - t_*) = F(kr_3^2, r_3, r_0) + A(2kr_3 \dot{r}_3, R, r_0) + H(r_3). \tag{4.4}$$

Для определения угла поворота в областях II–IV и неизвестной функции  $y(r)$  имеем систему уравнений

$$\begin{aligned} y' r \eta - 2k\tau - 2y &= 0, \quad \mu \tau' (\alpha t_2 - \beta(\tau - t_*)) - F(kr^2, r, r_0) - H(r) = kr(r_0^{-2} - R^{-2}), \\ y(r_3) &= h(r_3), \quad \tau(r_2) = t_*, \quad \theta^{II} = -\frac{c(t)}{2\mu r^2} + \int \frac{2y(r)}{r} dr, \end{aligned}$$

$$\theta^{\text{II}}(r_2, t) = \theta^{\text{I}}(r_2, t), \quad \theta^{\text{III}}(r_3, t) = \theta^{\text{II}}(r_3, t), \quad \theta^{\text{IV}}(r_1, t) = \theta^{\text{III}}(r_1, t),$$

где угол  $\theta^{\text{III}}$  равен углу  $\theta^{\text{II}}$  в (3.9), а угол  $\theta^{\text{IV}}$  — углу  $\theta$  в (3.8).

Граница  $r_3(t)$  движется по направлению к внутреннему жесткому цилиндру  $r = r_0$  и в момент времени  $t = t_3$  достигает поверхности  $r = r_1$ . Начиная с этого момента область деформирования разбивается на четыре области: область обратимого деформирования  $r_2 \leq r \leq R$  (область I), области с неизменяющимися пластическими деформациями  $r_1(t) \leq r \leq r_2$  (область II) и  $r_3(t) \leq r \leq r_1$  (область III) и область, в которой продолжается вязкопластическое течение:  $r_0 \leq r \leq r_3(t)$  (область IV). В этом случае функция  $r_3(t)$  определяется из решения уравнения (4.4). Для области обратимого деформирования (область I) и области с неизменяющимися пластическими деформациями (область II) справедливы соотношения (4.2), (4.3) соответственно. Для областей III, IV имеем

$$\begin{aligned} \varepsilon_{r\varphi}^p &= 0, & p_{r\varphi}^{\text{III}} &= q(r), & \omega^{\text{III}} &= A(\dot{c}(t), r, R) + \alpha t_2 - \beta(t - t_*), \\ \omega^{\text{IV}} &= F(c(t), r, r_0) + A(\dot{c}(t), r, r_0) + H(r_3), & \varepsilon_{r\varphi}^p &= \frac{1}{\eta} \left( \frac{c(t)}{r^2} - k \right), \\ p_{r\varphi}^{\text{IV}} &= \frac{1}{\eta} \left( \frac{c_1(t)}{r^2} - kt \right) + g(r). \end{aligned}$$

Угол поворота в областях II–IV получаем из системы уравнений

$$\begin{aligned} q'r\eta - 2k\tau - 2q &= 0, & \mu\tau'(\alpha t_2 - \beta(\tau - t_*)) - F(kr^2, r, r_0) - H(r) &= kr(r_0^{-2} - R^{-2}), \\ q(r_3) &= y(r_3), & \tau(r_1) &= t_3, & \theta^{\text{II}}(r_2, t) &= \theta^{\text{I}}(r_2, t), & \theta^{\text{III}} &= -\frac{c(t)}{2\mu r^2} + \int \frac{2q(r)}{r} dr, \\ \theta^{\text{III}}(r_1, t) &= \theta^{\text{II}}(r_1, t), & \theta^{\text{IV}}(r_3, t) &= \theta^{\text{III}}(r_3, t). \end{aligned}$$

В зависимости от свойств материала граница  $r_3(t)$  достигает поверхности  $r = r_0$  либо до момента времени, в который жесткий цилиндр останавливается, либо после него. В рассматриваемом случае скорость внешнего жесткого цилиндра  $\omega_R$  становится равной нулю до того момента, когда координата границы  $r_3(t)$  станет равной  $r = r_0$  (до момента времени  $t_4 = (\alpha/\beta)t_2 + t_*$ ). Как и выше, уравнения равновесия необходимо проинтегрировать начиная с момента времени  $t_4$  в каждой рассматриваемой области: области обратимого деформирования  $r_2 \leq r \leq R$  (область I), областях с неизменяющимися пластическими деформациями  $r_1(t) \leq r \leq r_2$  (область II),  $r_3(t) \leq r \leq r_1$  (область III) и  $r_3(t_4) \leq r \leq r_3(t)$  (область IV) и области вязкопластического течения  $r_0 \leq r \leq r_3(t)$  (область V). Для первых трех областей имеют место те же соотношения, что и выше. Для областей IV, V с использованием условий непрерывности перемещений, скоростей, деформаций и напряжений находим

$$\begin{aligned} \varepsilon_{r\varphi}^p &= 0, & p_{r\varphi}^{\text{IV}} &= b(r), & \omega_4^{\text{IV}} &= A(\dot{c}(t), r, R), & \varepsilon_{r\varphi}^p &= \frac{1}{\eta} \left( \frac{c(t)}{r^2} - k \right), \\ \omega^{\text{V}} &= F(c(t), r, r_0) + A(\dot{c}(t), r, r_0) + H(r_3), & p_{r\varphi}^{\text{V}} &= \frac{1}{\eta} \left( \frac{c_1(t)}{r^2} - kt \right) + g(r), \\ b'r\eta - 2k\tau - 2b &= 0, & F(kr^2, r, r_0) + \frac{kr}{\mu\tau'} \left( \frac{1}{r_0^2} - \frac{1}{R^2} \right) + H(r) &= 0, \\ b(r_3) &= q(r_3), & \tau(r_3(t_4)) &= t_4, & \theta^{\text{IV}} &= -\frac{c(t)}{2\mu r^2} + \int \frac{2b(r)}{r} dr, \\ \theta^{\text{IV}}(r_3(t_4), t) &= \theta^{\text{III}}(r_3(t_4), t), & \theta^{\text{V}}(r_3, t) &= \theta^{\text{IV}}(r_3, t). \end{aligned}$$

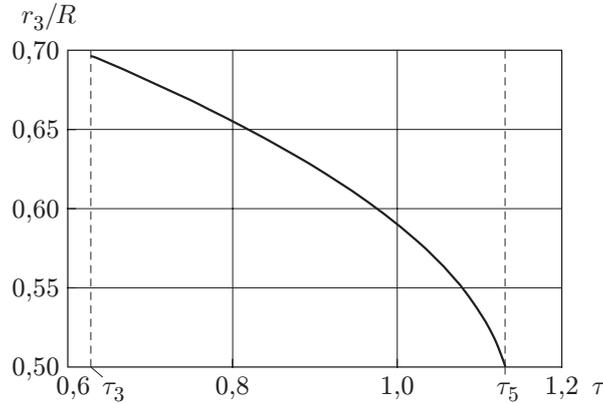


Рис. 2. Зависимость координаты границы области вязкопластического течения от времени в процессе торможения и разгрузки

В данном случае для определения координаты движущейся границы  $r_3(t)$  следует использовать уравнение  $F(kr_3^2, r_3, r_0) + A(2kr_3\dot{r}_3, R, r_0) + H(r_3) = 0$ . На рис. 2 приведена зависимость  $r_3(\tau)$  при торможении и разгрузке.

В момент времени  $t = t_5$  граница  $r_3(t)$  достигает внутренней жесткой поверхности  $r = r_0$  и пластические деформации прекращают изменяться во всей области деформирования. Далее напряжения уменьшаются по абсолютной величине, до тех пор пока на внутренней поверхности  $r = r_0$  не будет выполняться первое условие (2.6) (момент времени  $t = t_6$ ). В этом случае неизвестную функцию  $c(t)$  можно найти из решения дифференциального уравнения

$$\frac{\dot{c}}{2\mu} \left( \frac{1}{r_0^2} - \frac{1}{r^2} \right) + \frac{c}{r_0^2 \xi} - \frac{\gamma \sigma_0}{\xi} = 0, \quad c(t_5) = kr_0^2,$$

интегрируя которое получаем

$$c(t) = r_0^2 \left( \gamma \sigma_0 + (k - \gamma \sigma_0) \exp \left( \frac{2\mu R^2 (t - t_5)}{\xi (r_0^2 - R^2)} \right) \right). \quad (4.5)$$

При определении параметров напряженно-деформированного состояния в областях I–IV функцию  $c(t)$  нужно заменить функцией  $c(t)$  из (4.5).

Начиная с момента времени  $t = t_6$  напряжения, деформации и перемещения не изменяются. Для осуществления дальнейшей разгрузки жесткий цилиндр необходимо поворачивать в противоположном направлении. В конечный момент разгрузки  $t = t_7$  напряжение  $\sigma_{r\varphi} = 0$ , следовательно, и  $c(t) = 0$  во всей области деформирования.

На рис. 3 показана зависимость центрального угла закручивания  $\theta$  от радиуса  $r$  в различные моменты времени.

**5. Вязкопластическое течение при повороте внутреннего жесткого цилиндра.** Пусть внутренний цилиндр вращается равноускоренно, а внешний является жестко закрепленным:

$$\omega_R = 0, \quad \theta_R = 0.$$

Рассмотрим случай, когда пластическое течение и проскальзывание вблизи внутренней жесткой стенки возникают одновременно в момент времени  $t = t_0$ . Интегрируя уравнения равновесия и используя условие пластичности и граничные условия на внешнем и внутреннем жестких цилиндрах, для момента начала пластического течения получаем

$$\theta = \frac{c}{2\mu} \left( \frac{1}{R^2} - \frac{1}{r^2} \right), \quad \sigma_{r\varphi} = \frac{c}{r^2}, \quad \sigma_{rr} = \sigma_{zz} = \frac{c^2}{4\mu} \left( \frac{1}{r_0^4} - \frac{1}{r^4} \right) + \sigma_0,$$

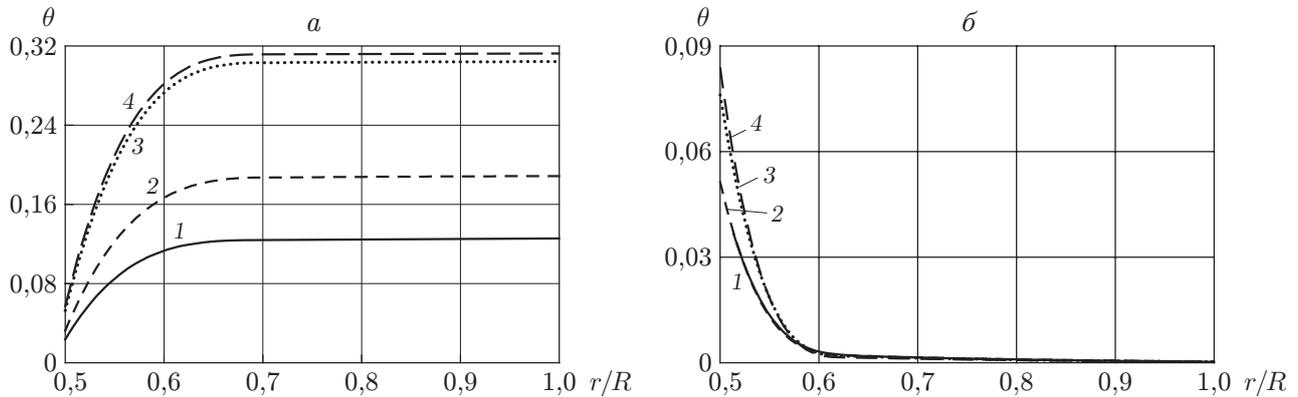


Рис. 3. Зависимость центрального угла закручивания от радиуса при повороте внешнего (а) и внутреннего (б) жестких цилиндров в различные моменты времени:

1 — момент  $t_2$ , когда скорость вращения жесткого цилиндра становится постоянной, 2 — момент  $t_3$ , когда граница  $r_3$  достигает поверхности  $r = r_1$ , 3 — момент  $t_3 < t'_3 < t_4$ , 4 — момент  $t_4$ , когда внешний жесткий цилиндр останавливается

$$\sigma_{\varphi\varphi} = \frac{c^2}{4\mu} \left( \frac{1}{r_0^4} - \frac{3}{r^4} \right) + \sigma_0, \quad c = -kr_0^2, \quad \sigma_0 = \frac{k}{\gamma}.$$

При увеличении угла поворота область вязкопластического течения (область II) будет ограничена поверхностями  $r = r_0$  и  $r = r_1(t)$ , область  $r_1(t) \leq r \leq R$  (область I) останется областью обратимого деформирования. Как и выше, кинематика среды определяется соотношениями (3.2). Интегрируя уравнения равновесия и используя граничные условия при  $r = R$ , для области I получаем

$$\sigma_{r\varphi} = \frac{c(t)}{r^2}, \quad \theta^I(r, t) = A(c(t), r, R), \quad \omega^I(r, t) = A(\dot{c}(t), r, R).$$

В этом случае для области вязкопластического течения (область II) имеем соотношения

$$\begin{aligned} \varepsilon_{r\varphi}^p &= \frac{1}{\eta} \left( \frac{c(t)}{r^2} + k \right), & p_{r\varphi} &= \frac{1}{\eta} \left( \frac{c_1(t)}{r^2} + kt \right) + g(r), \\ \omega^{II} &= F(c(t), r, r_1) + A(\dot{c}(t), r, R), \\ \theta^{II} &= \frac{2}{\eta} \left( kt \ln r - \frac{c_1(t)}{2r^2} \right) - \frac{c(t)}{2\mu r^2} + \int \frac{2g(r)}{r} dr, & c(t) &= -kr_1^2. \end{aligned}$$

Функция  $g(r)$  определяется из решения системы уравнений

$$\begin{aligned} g' r \eta + 2k\tau + 2g &= 0, & \mu\tau'(\alpha\mu - F(kr^2, r, r_0) - H_1(r)) &= kr(r_0^{-2} - R^{-2}), \\ H_1(r) &= \frac{k}{\xi} \left( \frac{r_1^2}{r_0^2} - 1 \right), & g' &= \frac{dg}{dr}, & \tau' &= \frac{d\tau}{dr}. \end{aligned}$$

Используя условия непрерывности скоростей и граничные условия на внешнем и внутреннем жестких цилиндрах, для координаты упругопластической границы получаем дифференциальное уравнение

$$\alpha t = F(kr_1^2, r_1, r_0) + A(2kr_1 r_1, R, r_0) + H_1(r_1).$$

При остановке, торможении и разгрузке внутреннего цилиндра картина течения такая же, как и при повороте внешнего цилиндра.

**Заключение.** В работе построено решение, с помощью которого можно качественно и количественно оценить влияние характера контакта упруговязкопластического материала с жесткими стенками цилиндрического вискозиметра на вискозиметрическое течение этого материала. Рассмотрены случаи сухого и вязкого трения. По сравнению со случаем жесткой спайки в случае проскальзывания течение возникает при больших угловых скоростях, а упругопластическая граница медленнее движется по материалу. Следует отметить, что при решении последовательности упругопластических задач, когда решение каждой задачи является начальным условием для постановки следующей, должны выполняться условия непрерывности перемещений на упругопластических границах. Это позволяет определить неизвестные функции времени, появляющиеся при интегрировании систем дифференциальных уравнений.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. **Кочин М. Е.** Теоретическая гидромеханика / М. Е. Кочин, И. А. Кибель, Н. В. Розе. М.: Гостехтеоретиздат, 1948. Т. 1.
2. **Бахшиян Ф. А.** Вращение жесткого цилиндра в вязкопластичной среде // Прикл. математика и механика. 1948. Т. 12, вып. 6. С. 650–661.
3. **Сафрончик А. И.** Вращение цилиндра с переменной скоростью в вязкопластичной среде // Прикл. математика и механика. 1959. Т. 23, вып. 6. С. 998–1014.
4. **Огибалов П. М.** Нестационарные движения вязкопластических сред / П. М. Огибалов, А. Х. Мирзаджанзаде. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1970.
5. **Lee E. N.** Elastic-plastic deformation at finite strains // Trans ASME. J. Appl. Mech. 1969. V. 36, N 1. P. 1–6.
6. **Кондауров В. И.** Об уравнениях упруговязкопластической среды с конечными деформациями // ПМТФ. 1982. № 4. С. 133–139.
7. **Левитас В. И.** Большие упругопластические деформации материалов при высоком давлении. Киев: Наук. думка, 1987.
8. **Быковцев Г. И., Шитиков А. В.** Конечные деформации упругопластических сред // Докл. АН СССР. 1990. Т. 311, № 1. С. 59–62.
9. **Роговой А. А.** Определяющие соотношения для конечных упруго-неупругих деформаций // ПМТФ. 2005. Т. 46, № 45. С. 138–149.
10. **Буренин А. А., Быковцев Г. И., Ковтанюк Л. В.** Об одной простой модели для упругопластической среды при конечных деформациях // Докл. АН. 1996. Т. 347, № 2. С. 199–201.
11. **Мясников В. П.** Уравнения движения упругопластических материалов при больших деформациях // Вестн. ДВО РАН. 1996. № 4. С. 8–13.
12. **Ковтанюк Л. В.** О продавливании упруговязкопластического материала через жесткую круговую цилиндрическую матрицу // Докл. АН. 2005. Т. 400, № 6. С. 764–767.
13. **Буренин А. А., Ковтанюк Л. В., Мазелис А. Л.** Продавливание упруговязкопластического материала между жесткими коаксиальными цилиндрическими поверхностями // Прикл. математика и механика. 2006. Т. 70, № 3. С. 481–489.
14. **Буренин А. А., Ковтанюк Л. В., Устинова А. С.** Об учете упругих свойств неньютоновского материала при его вискозиметрическом течении // ПМТФ. 2008. Т. 49, № 2. С. 143–151.
15. **Буренин А. А., Устинова А. С.** Развитие и торможение винтового вязкопластического течения с расчетом упругого отклика после остановки течения и разгрузки // Успехи механики сплошных сред: К 70-летию акад. В. А. Левина: Сб. науч. тр. Владивосток: Дальнаука, 2009. С. 91–102.

16. **Ковтанюк Л. В., Шитиков А. В.** О теории больших упругопластических деформаций материалов при учете температурных и реологических эффектов // Вестн. ДВО РАН. 2006. № 4. С. 87–93.
17. **Буренин А. А.** Упругие эффекты при интенсивном необратимом деформировании / А. А. Буренин, Л. В. Ковтанюк. Владивосток: Дальневост. гос. техн. ун-т, 2011.
18. **Лурье А. И.** Нелинейная теория упругости. М.: Наука, 1980.
19. **Знаменский В. А., Ивлев Д. Д.** Об уравнениях вязкопластического тела при кусочно-линейных потенциалах // Изв. АН СССР. Отд-ние техн. наук. Механика и машиностроение. 1963. № 6. С. 114–118.
20. **Ивлев Д. Д.** Три дискуссии // Вестн. Чуваш. гос. пед. ун-та им. И. Я. Яковлева. Сер. Механика предельного состояния. 2007. № 1. С. 157–163.

*Поступила в редакцию 28/VIII 2013 г.,  
в окончательном варианте — 3/III 2014 г.*

---