УДК 519.632.4

О ВЫЧИСЛЕНИИ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ УРАВНЕНИЯ ПЕРЕНОСА

С. Д. Алгазин

Институт проблем механики РАН, 119526 Москва

Рассматривается задача на собственные значения для уравнения переноса с переменными коэффициентами в произвольной области с гладкой границей. Построен численный алгоритм без насыщения. Приведены примеры численных расчетов, которые подтверждают эффективность методики.

Ключевые слова: уравнение переноса, фильтрация, вычисление собственных значений.

Введение. В [1] рассматриваются задачи на собственные значения для оператора Лапласа в произвольной гладкой области с постоянными коэффициентами. Однако ряд задач математической физики приводит к задачам на собственные значения для уравнения второго порядка с переменными коэффициентами (см. ниже). Для решения этих задач существует метод наискорейшего спуска [2, с. 572, 586], который, в частности, сводит решение самосопряженного уравнения второго порядка к последовательности решения задач для уравнения Пуассона в этой же области. Этот метод применяется также для решения нелинейных уравнений [3]. Однако рассмотренные в [3] примеры численных расчетов не вызывают оптимизма относительно быстроты сходимости метода. В настоящей работе построен численный алгоритм без насыщения (по поводу терминологии см. [4]) в задаче на собственные значения для эллиптического уравнения второго порядка с переменными коэффициентами. Для примера рассмотрено краевое условие Неймана. По ходу изложения будет пояснено, как рассмотреть другие краевые условия.

1. Постановка задачи фильтрации газа в пористой среде. Искомое уравнение имеет вид

$$\frac{\partial(m\rho)}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \boldsymbol{v}) = 0, \qquad (1.1)$$

где $m = V_{\text{пор}}/V$ — пористость (для реальных пластов лежит в пределах $0{,}15 \div 0{,}22$); $m\rho$ — концентрация; $\boldsymbol{v}$ — скорость фильтрации (а не скорость жидкости).

Это уравнение получается из закона сохранения массы

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{V_{\text{пор}}} \rho\, d\tau = \frac{d}{dt}\int\limits_{V} \rho m\, d\tau = 0, \qquad (1.2)$$

где $V_{\text{пор}}$ — объем пор; V — полный объем, причем оба объема подвижные. Из (1.2), применяя формулу дифференцирования по подвижному объему [5], получаем уравнение (1.1).

Закон Дарси справедлив для медленных движений жидкости в изотропной пористой среде, т. е. для малых значений числа Рейнольдса Re ($\mathrm{Re} < \mathrm{Re}_{\text{кр}}$), и имеет вид

$$\boldsymbol{v} = -(\hat{k}/\mu)\operatorname{grad} p, \qquad (1.3)$$

где $\hat{k}$ — коэффициент проницаемости, измеряемый в дарси (1 Д $= 10^{-8}/0{,}981$ см^2); μ — динамическая вязкость. Для реальных пористых сред $\hat{k} = 100 \div 1000$ мД (1 мД $= 10^{-3}$ Д).

Проницаемость — геометрическая характеристика пористой среды, т. е. определяется размерами частиц, их формой и упаковкой.

Уравнение состояния имеет вид

$$\rho = \frac{M}{RT}\,\frac{p}{z(p)},$$

где M — молярный вес газа; R — универсальная газовая постоянная; T — абсолютная температура; $z(p)$ определяется экспериментально ($z(p) = 1$ для совершенного газа), т. е. это баротропный газ.

Уравнение (1.1) относится к случаю, когда в пласте нет источников газа (скважин). В общем случае уравнение неразрывности имеет вид

$$\frac{\partial\,(m\rho)}{\partial t} + \operatorname{div}\,(\rho\boldsymbol{v}) = f(z,t), \qquad z \in G, \tag{1.4}$$

где $f(z,t)$ — заданная функция; G — двумерная область с гладкой границей $\partial G \in C^\infty$. Пусть $z = \varphi(\zeta)$, $\zeta = r\,\mathrm{e}^{i\theta}$ — конформное отображение единичного круга на область G. Выпишем уравнение (1.4) в новых переменных [5, с. 180]:

$$ds^2 = (dr^2 + r^2\,d\theta^2)|\varphi'(\zeta)|^2 \quad\Rightarrow\quad g_{11} = |\varphi'(\zeta)|^2, \quad g_{22} = r^2|\varphi'(\zeta)|^2, \quad \sqrt{g} = |\varphi'(\zeta)|^2 r,$$

$$\operatorname{grad} p\big|_r = \frac{1}{|\varphi'(\zeta)|}\,\frac{\partial p}{\partial r}, \qquad \operatorname{grad} p\big|_\theta = \frac{1}{|\varphi'(\zeta)|r}\,\frac{\partial p}{\partial \theta}.$$

Тогда получим

$$\frac{\partial\,(m\rho)}{\partial t} = |\varphi'(\zeta)|^{-2}L(w) + f(\zeta,t), \qquad \zeta = r\,\mathrm{e}^{i\theta}, \quad 0 \leqslant r \leqslant 1, \quad 0 \leqslant \theta < 2\pi, \quad |\zeta| \leqslant 1; \tag{1.5}$$

$$L(w) = \frac{1}{r}\,\frac{\partial}{\partial r}\Big(rk(r,\theta)\,\frac{\partial w}{\partial r}\Big) + \frac{1}{r^2}\,\frac{\partial}{\partial \theta}\Big(k(r,\theta)\,\frac{\partial w}{\partial \theta}\Big). \tag{1.6}$$

Здесь введены обозначения: $m = m(r,\theta)$ — пористость (известная функция координат); $p = p(r,\theta,t)$— давление (неизвестная функция координат и времени); $\hat{k} = \hat{k}(r,\theta,p) = k(r,\theta)\psi(p)$ — проницаемость (известная функция координат и давления); $\rho = \rho(p)$ — плотность (известная функция давления); $\mu = \mu(p)$ — вязкость (известная функция давления); $w(p) = \displaystyle\int \frac{\rho(p)\psi(p)}{\mu(p)}\,dp$.

Величины m, θ, ψ — безразмерные; величины p, ρ, μ имеют размерности $[p] = M/(LT^2)$, $[\rho] = M/L^3$, $[\mu] = M/(LT)$, $[k] = L^2$, $[w] = M/(L^3T)$, $[r] = L$, где M — единица массы; L — единица длины; T — единица времени. Функция $f(\zeta,t) = f(r,\theta,t)$ — плотность отбора газа, т. е. масса газа, выделяющаяся в единицу времени в единице объема в пласте. Если ввести мощность пласта $h = h(x,y)$ (т. е. высоту пласта в точке $(x,y) \in G$ рассматриваемой области), то вид уравнения (1.5) не изменится, если заменить m на mh, а k на kh. В этом последнем случае $[f] = M/(L^2T)$, т. е. массе, выделяющейся из пласта в единицу времени и с единицы площади.

Таким образом, уравнение (1.5) с учетом (1.6) — искомая постановка задачи фильтрации. К этому уравнению нужно добавить граничное условие

$$\frac{\partial p}{\partial n}\Big|_{\partial G} = 0, \tag{1.7}$$

которое означает отсутствие потока газа через границу области ∂G (см. (1.3)). Заметим, что функция w также удовлетворяет этому граничному условию.

2. Дискретизация по пространственным переменным. Для дискретизации задачи (1.5)–(1.7) проведем вначале дискретизацию оператора $L(w)$. Рассмотрим спектральную задачу

$$L(w) + \lambda w = 0, \qquad \frac{\partial w}{\partial r}\Big|_{r=1} = 0. \tag{2.1}$$

Заметим, что

$$-\int\limits_{|\zeta|\leqslant 1} L(w)w\,d\zeta = \int\limits_{|\zeta|\leqslant 1} \Big[k\Big(\frac{\partial w}{\partial r}\Big)^2 + \frac{k}{r^2}\Big(\frac{\partial w}{\partial \theta}\Big)^2\Big]\,d\zeta.$$

Таким образом, краевая задача (2.1) эквивалентна следующей экстремальной задаче:

$$J(w) = \int\limits_{|\zeta|\leqslant 1} \Big[k\Big(\frac{\partial w}{\partial r}\Big)^2 + \frac{k}{r^2}\Big(\frac{\partial w}{\partial \theta}\Big)^2 - \lambda w^2\Big]\,d\zeta \to \min. \tag{2.2}$$

Действительно, δJ (вариация функционала J) есть главная линейная часть приращения $J(w+h) - J(w)$, где h — произвольная гладкая функция. Нетрудно получить, что

$$\delta J = 2\int\limits_{|\zeta|\leqslant 1} \Big[k w_r h_r + \frac{k}{r^2}\, w_\theta h_\theta - \lambda w h\Big]\,d\zeta =$$

$$= 2\Big\{k r w_r h\Big|_{r=1} - \int\limits_{|\zeta|\leqslant 1} \Big[\frac{1}{r}\,\frac{\partial}{\partial r}\,(r k w_r) + \frac{1}{r^2}\,\frac{\partial}{\partial \theta}\,(k w_\theta) + \lambda w\Big] h\,d\zeta\Big\} = 0.$$

Так как h — произвольная функция, отсюда следуют соотношения (2.1). Итак, при поиске минимума функционала (2.2) не нужно заранее удовлетворять краевому условию Неймана, т. е. это краевое условие естественное.

Для дискретизации функционала (2.2) применим квадратурную формулу [1]:

$$\begin{gathered}\int\limits_{|\zeta|\leqslant 1} f(\zeta)\,d\sigma = \sum_{\nu,l} c_{\nu l} f_{\nu l}, \qquad f_{\nu l} = f(r_\nu\,\mathrm{e}^{i\theta_l}),\\ r_\nu = \cos\frac{(2\nu-1)\pi}{4m}, \quad \nu = 1,2,\ldots,m; \qquad \theta_l = \frac{2\pi l}{N}, \quad l = 0,1,\ldots,2n; \quad N = 2n+1.\end{gathered} \tag{2.3}$$

Эта квадратурная формула получается, если заменить подынтегральную функцию интерполяционной формулой для функции двух переменных в круге [4]:

$$\begin{aligned}(P_M f)(r,\theta) &= \sum_{l=0}^{2n}\sum_{\nu=1}^{m} f_{\nu l} L_{\nu l}(r,\theta), \qquad f_{\nu l} = f(r_\nu, \theta_l),\\ L_{\nu l}(r,\theta) &= \frac{2T_{2m}(r)}{N T'_{2m}(r_\nu)}\Big(\frac{D_n(\theta-\theta_l)}{r-r_\nu} - \frac{D_n(\theta-\theta_l+\pi)}{r+r_\nu}\Big),\\ D_n(\theta) &= \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}\cos k\theta, \qquad T_m(r) = \cos\,(m\arccos r).\end{aligned} \tag{2.4}$$

Интерполяционная формула (2.4) обладает нужными свойствами. Действительно, она точна на многочленах от двух переменных степени $\omega = \min\,(n, m-1)$. Обозначим множество этих многочленов P_ω, а E_ω обозначим наилучшее приближение функции $f \in C[D]$ (D — единичный круг) многочленом из P_ω. Тогда определен проектор

$$P_M\colon \qquad C[D] \to L^M, \qquad L^M = L(L_1,\ldots,L_M)$$

и справедливо классическое неравенство

$$|f(r,\theta) - (P_M f)(r,\theta)| \leqslant (1 + |P_M|_\infty) E_\omega(f), \tag{2.5}$$

в котором $|P_M|_\infty$ — норма проектора P_M. Так же как в одномерном случае, неравенство (2.5) показывает, что соответствующая интерполяционная формула не имеет насыщения. Норма проектора P_M удовлетворяет соотношению

$$|P_M|_\infty = O(\ln^2 M),$$

причем не составляет труда уточнить эту оценку. Делая некоторые предположения о гладкости класса интерполируемых функций, можно оценить скорость убывания наилучшего приближения E_ω при $M \to \infty$ и получить конкретные оценки погрешности интерполяционной формулы (2.4).

Пусть

$$f(r,\theta) = (P_M f)(r,\theta) + \rho_M(r,\theta; f),$$

где $\rho_M(r,\theta; f)$ — погрешность интерполяционной формулы (2.4) (остаток). Тогда справедлива следующая теорема К. И. Бабенко [4].

Теорема. *Рассмотрим класс функций $H_\infty^M(K; D) \subset C(D)$, удовлетворяющих в круге D условиям*

$$\Big|\frac{\partial^{k+l} f}{\partial x^k\, \partial y^l}\Big| \leqslant K, \qquad k + l \leqslant \mu,$$

тогда, если $f \in H_\infty^M(K; D)$, то

$$|\rho_M(\,\cdot\,; f)|_\infty \leqslant c_\mu K M^{-\mu/2} \log^2 M, \tag{2.6}$$

где c_μ — константа, зависящая от μ.

Таким образом, из рассмотрения формулы (2.6) видно, что при одинаковом числе узлов интерполяции M скорость убывания погрешности интерполяционной формулы (2.4) возрастает с ростом μ, т. е. с ростом гладкости интерполируемой функции f. Это означает, что полученная интерполяционная формула не имеет насыщения.

Основываясь на интерполяционной формуле (2.4), легко построить квадратурную формулу для вычисления определенных интегралов, когда областью интегрирования является круг. В самом деле, заменяя подынтегральную функцию выражением (2.4), получим квадратурную формулу (2.3), где $d\sigma$ — элемент площади; $c_{\nu l}$ — весовые коэффициенты; $\delta(f)$ — погрешность. Для коэффициентов $c_{\nu l}$ имеем

$$c_{\nu l} = \int\limits_D L_{\nu l}(r,\theta)\, d\sigma,$$

и они не зависят от l. Введем в рассмотрение блочно-диагональную матрицу

$$C = \operatorname{diag}(c_1, c_2, \ldots, c_m),$$

где c_ν ($\nu = 1, 2, \ldots, m$) — диагональные матрицы размера $N \times N$ с одинаковыми числами на диагонали. Для погрешности квадратурной формулы имеем следующую оценку [4]:

$$|\delta(f)| \leqslant 2\pi E_\omega(f).$$

Заметим, что все $c_{\nu l}$ положительны при достаточно большом числе узлов интерполяции.

Для коэффициентов квадратурной формулы (2.3) имеем выражение

$$c_\nu = \frac{4\pi r_\nu}{m(2n_\nu + 1)} \Big(\frac{\cos\psi_\nu}{2} + \sum_{s=3(2)}^{m-1} t_s \cos s\psi_\nu\Big),$$

$$t_s = \frac{1}{1 + (-1)^{(s-1)/2} s}, \qquad \psi_\nu = \frac{(2\nu - 1)\pi}{4m}, \qquad s \geqslant 1 \text{ — нечетно}$$

и

$$\Big(\frac{\partial w}{\partial r}\Big)_{\zeta=\zeta_{\nu l}} = \sum_{\mu,p} H_{\nu l,\mu p} w_{\mu p}, \qquad \Big(\frac{\partial w}{\partial \theta}\Big)_{\zeta=\zeta_{\nu l}} = \sum_{p=1}^{N} B_{lp} w_{\nu p}.$$

Матрицы B и H получаются дифференцированием интерполяционной формулы (2.4)

$$B_{lp} = \frac{2}{N} \sum_{k=1}^{n} k \sin k \, \frac{2\pi(l-p)}{N}.$$

Для получения матрицы H продифференцируем по r интерполяционную формулу (2.4). Обозначим

$$A^{(1)}_{\mu\nu} = \frac{d}{dr}\Big(\frac{T_{2m}(r)}{(r - r_\nu)T'_{2m}(r_\nu)}\Big)_{r=r_\mu} = \frac{1}{m} \sum_{s=1}^{2m-1} \frac{s \cos s\psi_\nu \sin s\psi_\mu}{\sin \psi_\mu},$$

$$A^{(2)}_{\mu\nu} = \frac{d}{dr}\Big(\frac{T_{2m}(r)}{(r + r_\nu)T'_{2m}(r_\nu)}\Big)_{r=r_\mu} = -\frac{1}{m} \sum_{s=1}^{2m-1} \frac{s(-1)^s \cos s\psi_\nu \sin s\psi_\mu}{\sin \psi_\mu}.$$

Дифференцируя (2.4) по r, получим

$$\frac{du(r,\theta)}{dr}\Big|_{\substack{r=r_\mu \\ \theta=\theta_p}} = \sum_{\nu=1}^{m} \Big(A^{(1)}_{\mu\nu} u_{\nu p} - \frac{2}{N} \sum_{l=0}^{2n} A^{(2)}_{\mu\nu} D_n(\theta_p + \pi - \theta_l) u_{\nu l}\Big),$$

где

$$D_n(\theta_p + \pi - \theta_l) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \cos k(\theta_p - \theta_l) \quad \Rightarrow \quad H_{\mu p,\nu l} = A^{(1)}_{\mu\nu} \delta_{pl} - \frac{2}{N} A^{(2)}_{\mu\nu} D_n(\theta_p + \pi - \theta_l).$$

Нетрудно видеть, что H — h-матрица [1], и, следовательно, она представляется в виде

$$H = \frac{2}{N} {\sum_{k=0}^{n}}' \Lambda_k \otimes h_k, \tag{2.7}$$

где штрих у знака суммы означает, что слагаемое при $k = 0$ берется с коэффициентом $1/2$; Λ_k $(k = 0, 1, \dots, n)$ — матрица размера $m \times m$; h_k $(k = 0, 1, \dots, n)$ — матрица размера $N \times N$:

$$h_{kij} = \cos\left(2\pi k(i - j)/N\right), \qquad i, j = 1, 2, \dots, N,$$

через $\otimes$ обозначено кронекерово произведение матриц. Матрицы Λ_k в данном случае имеют вид

$$\Lambda_{k\mu\nu} = (-1)^{k+1} A^{(2)}_{\mu\nu} + A^{(1)}_{\mu\nu}.$$

Итак,

$$\Lambda_{2k,\mu\nu} = \frac{2}{m} \sum_{s=2(2)}^{2m-1} \frac{s \cos s\psi_\nu \sin s\psi_\mu}{\sin \psi_\mu}, \qquad \Lambda_{2k+1,\mu\nu} = \frac{2}{m} \sum_{s=1(2)}^{2m-1} \frac{s \cos s\psi_\nu \sin s\psi_\mu}{\sin \psi_\mu}.$$

Ниже будем обозначать эти матрицы через $\Lambda^{(k)}_{\mu\nu}$. Распишем формулу (2.7) подробно:

$$H_{\nu l,\mu p} = \frac{2}{N} \sum_{k=0}^{n}{}' \Lambda^{(k)}_{\nu\mu} \cos k\, \frac{2\pi(p-l)}{N}, \qquad H_{\nu l,\tilde{\mu}\tilde{l}} = \frac{2}{N} \sum_{q=0}^{n}{}' \Lambda^{(q)}_{\nu\tilde{\mu}} \cos q\, \frac{2\pi(l-\tilde{l})}{N}.$$

Используя квадратурную формулу (2.3), функционал (2.2) преобразуем в квадратичную форму:

$$J(w) = \sum_{\nu,l} c_{\nu l}\Big[k_{\nu l}\Big(\frac{\partial w}{\partial r}\Big)^2_{\zeta=\zeta_{\nu l}} + \frac{k_{\nu l}}{r_\nu^2}\Big(\frac{\partial w}{\partial \theta}\Big)^2_{\zeta=\zeta_{\nu l}} + \lambda w_{\nu l}^2\Big]. \qquad (2.8)$$

Дифференцируя (2.8) по $w_{\tilde{\mu}\tilde{l}}$, получим

$$\sum_{\mu,p} B_{\tilde{\mu}\tilde{l},\mu p} w_{\mu p} + \sum_{p=1}^{N} A^{\tilde{\mu}}_{\tilde{l}p} w_{\tilde{\mu}p} - \lambda c_{\tilde{\mu}} w_{\tilde{\mu}\tilde{l}} = 0,$$

где

$$B_{\tilde{\mu}\tilde{l},\mu p} = \frac{4}{N^2} \sum_{k=0}^{n}{}' \sum_{q=0}^{n}{}' \Big\{\sum_{\nu=1}^{m} c_\nu \Lambda^{(k)}_{\nu\mu} \Lambda^{(q)}_{\nu\tilde{\mu}} \sum_{l=0}^{2n} k_{\nu l} \cos k\, \frac{2\pi(p-l)}{N} \cos q\, \frac{2\pi(l-\tilde{l})}{N}\Big\},$$

$$A^{\tilde{\mu}}_{\tilde{l}p} = \frac{4}{N^2} \frac{c_{\tilde{\mu}}}{r^2_{\tilde{\mu}}} \sum_{k=1}^{n} \sum_{q=1}^{n} kq \Big\{\sum_{l=1}^{N} k_{\tilde{\mu}l} \sin k\, \frac{2\pi(l-p)}{N} \sin q\, \frac{2\pi(l-\tilde{l})}{N}\Big\}.$$

Это есть дискретный аналог задачи на собственные значения

$$\operatorname{div}(k \operatorname{grad} w) + \lambda w = 0, \qquad r < 1, \qquad \frac{\partial w}{\partial r}\Big|_{r=1} = 0.$$

Оценка погрешности описанной дискретизации может быть получена по схеме, описанной в [1] (см. также [6]).

3. Результаты численных экспериментов. Проводились расчеты задачи (2.1) в круге ($k = 1$), возмущенном круге (эпитрохоида, $k = 1$, $k \neq 1$). Для круга собственные значения $\sqrt{\lambda_i}$ ($i = 1, 2, \dots$) известны — нули производной функции Бесселя. Сравнение вычисленных для круга значений $\sqrt{\lambda_i}$ с точными показывает, что даже на сетке 3×7 у них совпадают по 4 знака после запятой. Однако эта точность хуже, чем получаемая по методике, описанной в [1] для уравнения с постоянными коэффициентами. Проводился также расчет для эпитрохоиды ($\varphi(\zeta) = \zeta(1 + \varepsilon\zeta^n)$, $\varepsilon = 0{,}0625$, $n = 12$), для которой в [1] в табл. (3.9) приведены вычисленные значения собственных чисел. Результаты расчетов по данной методике представлены в табл. 1 (выписаны все знаки, совпавшие с расчетами из [1]).

Еще один расчет проводился для той же эпитрохоиды для функции

$$k(r,\theta) = k_0(0{,}1 + r^2)(\sin 12\theta + 1{,}1), \qquad k_0 = 10^{-13}/0{,}981 \text{ м}^2 = 0{,}1 \text{ Д}.$$

Результаты этого расчета представлены в табл. 2.

Таблица 1

Размерность	$\sqrt{\lambda_2}$	$\sqrt{\lambda_6}$	$\sqrt{\lambda_{11}}$	$\sqrt{\lambda_{16}}$
8×11	1,76	3,77	5,2	6,9
10×21	1,7751	3,72	5,16	6,5
15×31	1,776 235 57	3,7317	5,1770	6,4787

Таблица 2

Размерность	$\sqrt{\lambda_2}\cdot 10^{-7}$	$\sqrt{\lambda_6}\cdot 10^{-7}$	$\sqrt{\lambda_{11}}\cdot 10^{-7}$	$\sqrt{\lambda_{16}}\cdot 10^{-7}$	$\sqrt{\lambda_{21}}\cdot 10^{-6}$
8×11	2,8451	5,8268	9,2409	1,2075	1,4927
10×21	2,5447	6,5814	9,3812	1,3895	1,5927
15×31	2,4840	7,0164	10,0838	1,1905	1,4384
20×41	2,5558	7,1376	9,5192	1,0873	1,4266

Таким образом, можно констатировать, что точность вычисления собственных значений удовлетворительная и дискретизация по пространственным переменным построена правильно.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Алгазин С. Д.** Численные алгоритмы без насыщения в классических задачах математической физики. М.: Научный Мир, 2002.
2. **Канторович Л. В., Акилов Г. П.** Функциональный анализ. М.: Наука, 1984.
3. **Кошелев А. И.** Регулярность решений эллиптических уравнений и систем. М.: Наука, 1986.
4. **Бабенко К. И.** Основы численного анализа. 2-е изд. М.; Ижевск: НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”, 2002.
5. **Седов Л. И.** Механика сплошной среды. М.: Наука, 1970. Т. 1.
6. **Алгазин С. Д.** О локализации собственных значений замкнутых линейных операторов // Сиб. мат. журн. 1983. Т. 24, № 2. С. 3–8.

Поступила в редакцию 11/VIII 2003 г.,
в окончательном варианте — 3/XII 2003 г.