

УДК 536.46

## О СТРУКТУРЕ АВТОМОДЕЛЬНЫХ ДЕТОНАЦИОННЫХ ВОЛН В ЗАРЯДАХ ТРОТИЛА

А. Л. Кул

Ливерморская национальная лаборатория им. Э. Лоуренса, 94551 Ливермор, Калифорния, США  
kuhl2@llnl.gov

Предложен метод фазовой плоскости для моделирования полей течения, связанных с детонационными волнами, распространяющимися с постоянной скоростью в зарядах тротила. Для формулировки задачи на фазовой плоскости переменных «безразмерная скорость звука  $Z$  — радиальная скорость  $F$ » использовались преобразования подобия. Получено два связанных обыкновенных дифференциальных уравнения, которые решаются совместно. Решение соответствует интегральной кривой  $Z(F)$  на фазовой плоскости, начинающейся из точки Чепмена — Жуге и заканчивающейся в особой точке  $A$  — звуковой точке за фронтом волны. Система замыкается соотношениями для термодинамических переменных вдоль изоэнтропы расширения, проходящей через точку Чепмена — Жуге. В результате формируется полное уравнение состояния термодинамической системы. Параметры в точке Чепмена — Жуге и на изоэнтропе рассчитаны с применением термодинамического кода Cheetah. Получены решения для плоской, цилиндрической и сферической детонационных волн. Рассчитаны профили концентраций компонентов продуктов взрыва, основным компонентом ( $\approx 10$  моль/кг) оказался углерод в форме графита. Для инициализации одномерного газодинамического моделирования использовано автомодельное решение, которое описывает начальную стадию расширения продуктов детонации и формирование взрывной волны в воздухе. Подобное моделирование обеспечивает проникновение в суть термодинамических состояний и распределений компонентов продуктов взрыва, которые в начальный момент ответственны за оптическое излучение огненного шара при взрыве заряда тротила.

Ключевые слова: детонационные волны в тротиле, метод фазовой плоскости, автомодельное решение, условие Чепмена — Жуге, концентрация компонентов продуктов взрыва.

### ВВЕДЕНИЕ

Применение методов подобия для моделирования взрывов имеет длинную и престижную историю. В 1941 г. Дж. Тэйлор использовал переменную подобия для преобразования уравнений газовой динамики в частных производных в систему обыкновенных дифференциальных уравнений теории взрывной волны [1, 2]. Он предположил, что скорость детонации в заряде тротила (ТНТ) постоянна и, используя уравнение состояния для продуктов взрыва ТНТ, развитое Джонсом и Миллером [3], рассчитал профили давления и скорости плоской и сферической волн за фронтом детонации [1, 2]. Он впервые показал, что скорость обращается в нуль во внутренней половине детонационной волны. Продолжение этих исследований детонации ТНТ Тэйлор опубликовал в 1958 г. в Принстонской серии по высокоскоростной аэро-

динамике [2]. Подход подобия был формализован как метод фазового пространства Л. И. Седовым в 1958 г. в его монографии [4] и применен им для широкого ряда взрывных и сходящихся задач. В 1960 г. К. П. Станюкович использовал методы подобия для описания разлета продуктов детонации в вакууме [5], продукты моделировались изоэнтропическим степенным законом ( $\Gamma = 3$ ). Г. И. Баренблатт развил методы масштабирования [6] и распространил метод подобия на промежуточный асимптотический режим [7]. Общее описание теории детонационных волн приведено в монографии Я. Б. Зельдовича и А. С. Компанейца [8]. Недавний исчерпывающий обзор представлен в книге Дж. Ли [9].

Методы подобия большую популярность приобрели при моделировании взрыва в газах, чем в твердых телах<sup>1</sup>. Метод фазового про-

© Kuhl A. L., 2015.

Lawrence Livermore National Laboratory, Livermore, CA, USA.

<sup>1</sup>Это обусловлено тем, что газы можно аккуратно описывать моделями с постоянным отношением удельных теплоемкостей  $\gamma$ , в то время как для описания продуктов детонации твердых ВВ требуются более слож-

странства был использован А. К. Оппенгеймом с коллегами для получения всех возможных решений, связанных с сильной ударной волной [10] или сильной детонацией [11], детонацией с переменным выделением энергии во фронте [12], волнами давления, генерируемыми установившимися пламенами [13].

В настоящей работе развита модель фазового пространства для детонационных волн в твердых телах, которая использует полную термодинамическую модель для продуктов детонации ТНТ, основанную на термодинамическом коде Cheetah в трактовке Л. Е. Фрейда [14].

### ТЕРМОДИНАМИКА ДЕТОНАЦИИ ТРОТИЛА

Энергетика продуктов детонации ТНТ описывается как положение состояний (годограф) на плоскости Ле Шателье — зависимости удельной внутренней энергии  $u$  от температуры  $T$  (рис. 1). Годограф начинается из точки Чепмена — Жуге (CJ) и расширяется по изоэнтропе до точки 300 К. Годограф и условия CJ предсказаны при помощи кода Cheetah. Расчетные точки приближены квадратичной функцией  $u_i(T) = a_i T^2 + b_i T + c_i$  (кружки на рис. 1). Константы приближения приведены в табл. 1. На рис. 1 переменная глобальной энергии  $u$  представляет собой абсолютную удельную внутреннюю энергию, которая включает в себя энергию формирования молекул ТНТ. В используемом масштабе при  $T = 300$  К энергия реагентов составляет  $u_r^0 = -66.5$  кал/г, энергия продуктов детонации  $u_p^0 = -1079.3$  кал/г. Их разница и есть теплота детонации  $\Delta H_d \equiv u_r^0 - u_p^0 = 1012.8$  кал/г. Это значение находится в хорошем соответствии с теплотой реакции ТНТ  $1093 \pm 11$  кал/г (при  $\rho_0 = 1.533$  г/см<sup>3</sup>), измеренной в калориметрической бомбе [15]. Энергия при нулевой температуре

ные уравнения состояния (например, JWL-модель), которые выходят за рамки формулировок большинства методов подобия.

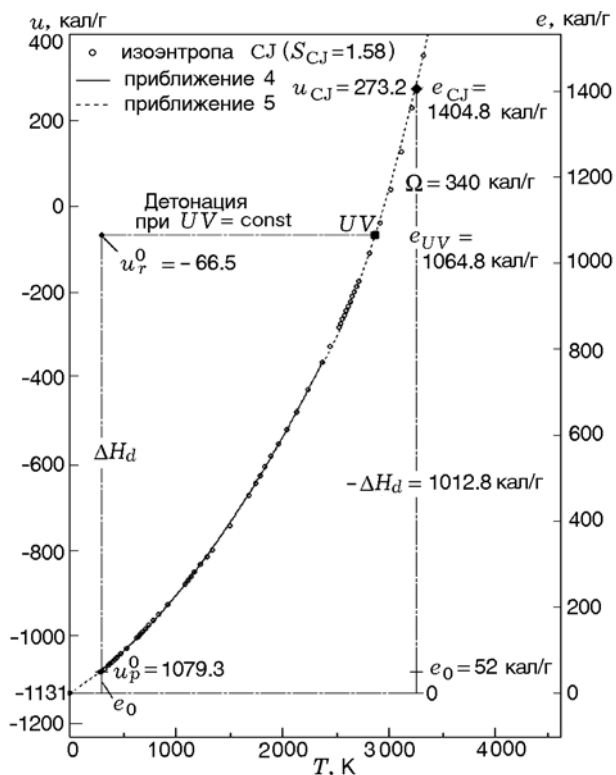


Рис. 1. Диаграмма Ле Шателье, иллюстрирующая расширение продуктов детонации ТНТ из точки CJ до точки, в которой  $T = 0$ :

шкалы для абсолютной и относительной энергии связаны соотношением  $e \equiv u + 1131$  кал/г; решение иллюстрирует условие скачка энергии при переходе через детонационный фронт:  $e_{CJ} \equiv e_0 + |\Delta H_d| + \Omega$ , здесь  $\Omega = W_{CJ}^2 / 2(\Gamma + 1)^2$  — поток кинетической энергии через фронт

$u = -1131$  кал/г показывает, что энергия газообразных продуктов детонации при комнатной температуре равна  $e_0 = 52$  кал/г. Рис. 1 имеет дополнительную ось по энергии  $e$  ( $e = 0$  при  $T = 0$ ). Она связана с абсолютной энергией соотношением  $e \equiv u + 1131$ . Точка UV на рис. 1 соответствует детонации при постоянных значениях энергии и объема. По энер-

Таблица 1  
Константы в квадратичной функции  $u_i(T) = a_i T^2 + b_i T + c_i$  для ТНТ

Приближение	$T$ , К	$a_i$	$b_i$	$c_i$
4	$300 < T < 2357$	$6.9982 \cdot 10^{-5}$	0.16051	-1.131
5	$2118 < T < 3700$	$35.227 \cdot 10^{-5}$	-1.2316	579

Таблица 2  
Состояния в точках CJ и UV для ТНТ  
( $\rho_0 = 1.654 \text{ г/см}^3$ )

Переменная	Состояние в точке CJ	Состояние в точке UV
$p$ , кбар	197.59759	90.13
$\rho$ , г/см <sup>3</sup>	2.1616	1.654
$e$ , кал/г*	1352.46	1064.8
$u$ , кал/г	273.16	-66.5
$T$ , К	3237.875	2866.9
$s$ , кал/(г·К)	1.58447	1.623
$u_r$ , км/с	1.68595	0
$W$ , км/с	7.18	0
$a$ , км/с	5.4939	4.0593
$\Gamma = W_{CJ}/u_{r,CJ} - 1$	3.2586	—

\* $e \equiv u + 1131 \text{ кал/г}$ .

гетической шкале  $e$  теплота детонации равна  $\Delta H_d \equiv e_{UV} - e_0 = 1012.8 \text{ кал/г}$ . Увеличение параметров при переходе от точки UV к точке CJ обусловлено потоком кинетической энергии, пересекающей фронт детонации,  $\Omega = W_{CJ}^2 / 2(\Gamma + 1)^2 = 340 \text{ кал/г}$ , где  $W_{CJ}$  — скорость детонационной волны,  $\Gamma = W_{CJ}/u_{r,CJ} - 1$  — показатель изоэнтропы. Видно, что энергия в точке CJ равна 273.2 и 1404.8 кал/г по шкалам абсолютной и дополнительной энергии соответственно. Таким образом, энергетические характеристики газообразных продуктов детонации тротила полностью характеризуются диаграммой Ле Шателье, приведенной на рис. 1.

Другие термодинамические величины также были рассчитаны вдоль изоэнтропы CJ и обезразмерены на их значения в точке CJ: температура  $\Theta = T/T_{CJ}$ , давление  $P = p/p_{CJ}$ , энергия  $E = e/e_{CJ}$ , плотность  $R = \rho/\rho_{CJ}$ , скорость звука  $A = (a/a_{CJ})^2$ , показатель изоэнтропы  $G = \Gamma/\Gamma_{CJ}$  (см. в табл. 2 значения в точке CJ). Их зависимости вдоль изоэнтропы CJ от отношения<sup>2</sup> плотностей  $R$  приведены на рис. 2. Подчеркнем, что это термодинамическое решение является общим (например, сво-

<sup>2</sup>Выбор безразмерной переменной  $R$  как ординаты предпочтителен, потому что  $R$  является одной из двух зависимых переменных в представленной ниже формулировке модели фазовой плоскости.

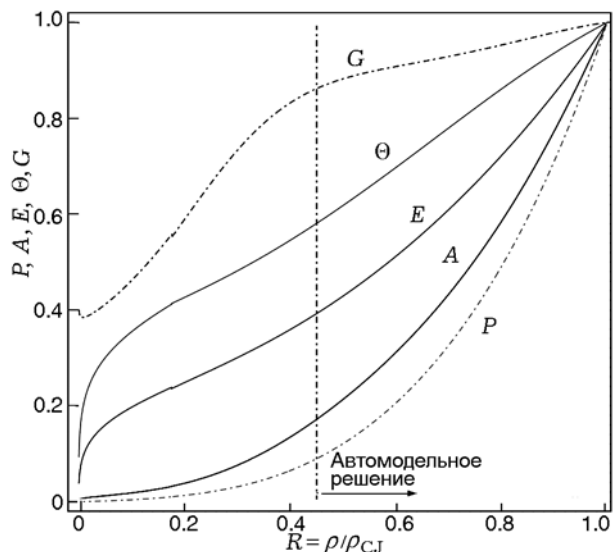


Рис. 2. Соотношения между безразмерными термодинамическими переменными вдоль изоэнтропы CJ для ТНТ ( $S_{CJ} = 1.58 \text{ кал/(г·К)}$ )

бодным от любых ограничений на постоянную  $\Gamma$  и пр.). Оно получено минимизацией свободной энергии Гиббса термодинамической системы для ТНТ и автоматически удовлетворяет первому закону термодинамики вдоль изоэнтропы CJ. При подобных обстоятельствах использование закона сохранения энергии для газовой динамики становится излишним (избыточным).

Соответствующие концентрации компонентов продуктов детонации ТНТ приведены на рис. 3 как функции температуры. Преобладает углерод в форме графита, далее следуют оксид и диоксид углерода, двухатомный азот, вода и метан. Это решение  $C_i = f_i(T, S_{CJ})$ , скомбинированное с автомодельным решением, используется далее при анализе детонационной волны.

### МЕТОД ФАЗОВОЙ ПЛОСКОСТИ

Мы принимаем, что заряд инициируется в точке  $r = t = 0$ , процесс распространяется с постоянной скоростью детонации  $W_{CJ}$  и удовлетворяет условию CJ. Тогда траектория детонационного фронта описывается линейным соотношением

$$r_{CJ} = W_{CJ}t_{CJ}, \quad (1)$$

а время и пространственные координаты связаны как

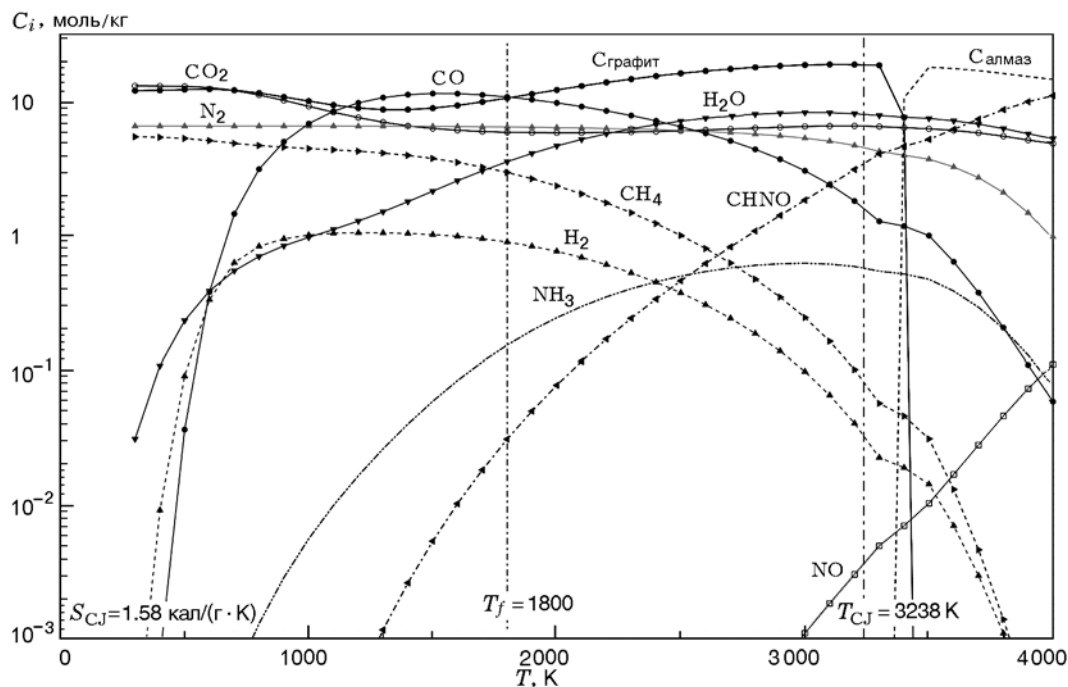


Рис. 3. Концентрация компонентов в продуктах взрыва ТНТ вдоль изоэнтропы СД

$$dt = dr/W_{CJ}. \quad (2)$$

Таким образом, можно определить переменную подобия [10, 11]:

$$x = r/r_{CJ}. \quad (3)$$

Затем уравнения газовой динамики в частных производных можно преобразовать в систему обыкновенных дифференциальных уравнений теории взрывной волны, которые являются функцией переменной подобия  $x$  [16]. Полезно определить следующие переменные на фазовой плоскости:

$$F \equiv \frac{u}{xW_{CJ}}, \quad Z \equiv \frac{a^2}{x^2W_{CJ}^2}. \quad (4)$$

Как показано в приложении, основные уравнения могут быть преобразованы в систему двух связанных обыкновенных дифференциальных уравнений для зависимых переменных  $x$  и  $R$  как функции независимой переменной  $F$ :

$$\frac{d \ln x}{dF} = \frac{-1}{F} \frac{x^{-2}A(R)Z_{CJ} - (1-F)^2}{(j+1)x^{-2}A(R)Z_{CJ} - (1-F)^2}, \quad (5)$$

$$\frac{d \ln R}{dF} = \frac{j(1-F)}{(j+1)x^{-2}A(R)Z_{CJ} - (1-F)^2}. \quad (6)$$

Здесь  $j = 0$  соответствует случаю плоского течения,  $j = 1$  — цилиндрического,  $j =$

2 — сферически-симметричного. Эти уравнения дополняются функцией уравнения состояния  $A(R)$ , показанной на рис. 2.

Приведенные выше уравнения интегрируются на фазовой плоскости от точки СД с координатами  $\{F_{CJ} = 1/(\Gamma+1), Z_{CJ} = [\Gamma/(\Gamma+1)]^2\}$ , где  $x = R = 1$ , до точки сингулярности  $A$  с координатами  $\{F = 0; Z = 1\}$ . Профили решения  $x(F)$  и  $R(F)$  для плоского, цилиндрического и сферически-симметричного течений показаны на рис. 4,а, их интегральные кривые на фазовой плоскости  $Z-F$  — на рис. 4,б. Плоский случай представляет сингулярное решение  $Z = (1-F)^2$ , лежащее на кривой  $D = 0$ ; это решение было найдено в [11].

## РЕШЕНИЕ

Преобразуя решение (5) для получения  $F(x)$  и комбинируя с решением (6), получаем

$$u/u_{CJ} \equiv U(x) = xF(x)/F_{CJ}, \quad (7)$$

$$\rho/\rho_{CJ} = R(F(x)). \quad (8)$$

Таким образом, профили скорости и плотности следуют прямо из кривых решения  $x(F)$  и  $R(F)$  соответственно. Профили термодинамических величин вытекают из решений, которые выражаются через соотношения  $P = P(R)$ ,  $\Theta =$

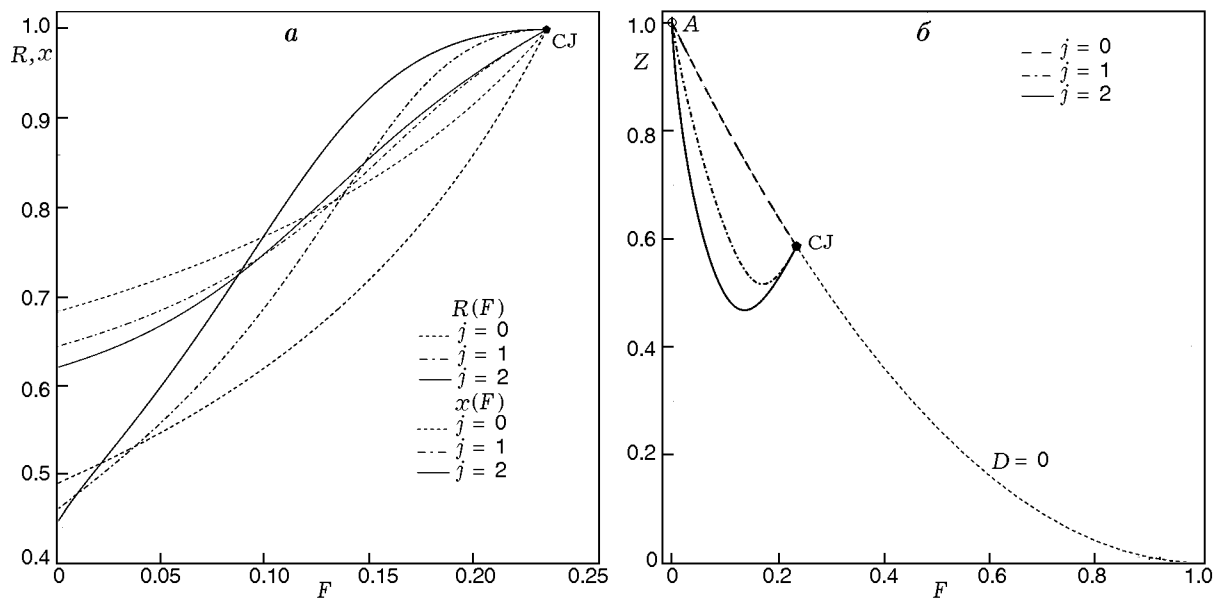


Рис. 4. Автомоделные решения для плоской ( $j = 0$ ), цилиндрической ( $j = 1$ ) и сферической ( $j = 2$ ) детонационных волн Чепмена — Жуге в ТНТ

$\Theta(R)$ ,  $E = E(R)$ ,  $A = A(R)$ ,  $G = G(R)$  из уравнения состояния, представленные на рис. 2. Профили характеристик течения за плоской, цилиндрической и сферической детонационными волнами Чепмена — Жуге в зарядах ТНТ приведены на рис. 5. Видно, что поле скоростей

стремится к нулю при  $x = r/r_{CJ} \approx 0.5$  (положение особой точки  $A$ ); внутри состояния в точке  $A$  поток неподвижен<sup>3</sup> и термодинамические величины постоянны. Для сферического и цилиндрического случаев наклон профилей характеристик течения становится бесконечным по мере приближения к фронту. Это является следствием того, что граничное условие CJ лежит вблизи (на) линии сингулярности  $D = 0$ <sup>4</sup>. Отметим также, что показатель изоэнтропии изменяется, он уменьшается до  $G(x < 0.5) \approx 0.8$  за фронтом волны.

Используя температурное поле  $T(x)$  и функции концентраций  $C_i(T)$ , можно рассчитать поля концентраций компонентов  $C_i(x)$ ; результаты для случая сферической детонации представлены на рис. 6. Концентрации компонентов изменяются за фронтом в соответствии с уменьшением температуры. Отметим также профиль концентрации электронов, он был рассчитан исходя из концентрации углерода в форме графита и температуры в соответствии с моделью Ершова [17].

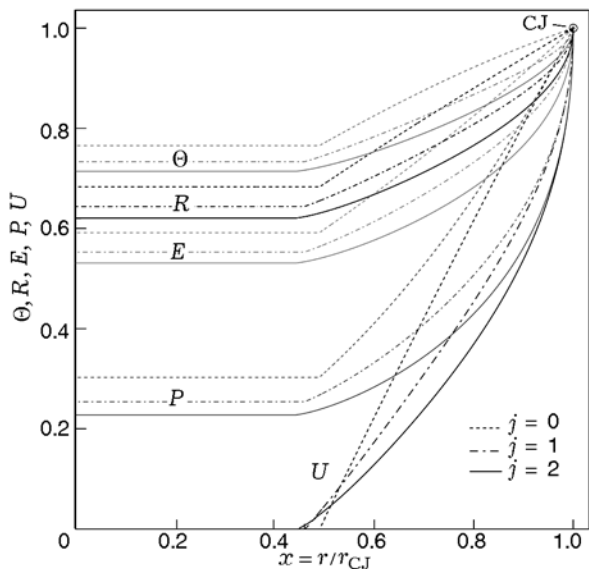


Рис. 5. Профили характеристик течения для плоской ( $j = 0$ ), цилиндрической ( $j = 1$ ) и сферической ( $j = 2$ ) детонационных волн Чепмена — Жуге в ТНТ (автомоделные решение)

<sup>3</sup>Предсказано впервые Дж. Тейлором в 1941 и 1950 гг. [1].

<sup>4</sup>Как показано в приложении,  $d \ln F / d \ln x = -(jZ + D) / D \rightarrow \infty$  при  $D = 0$ .

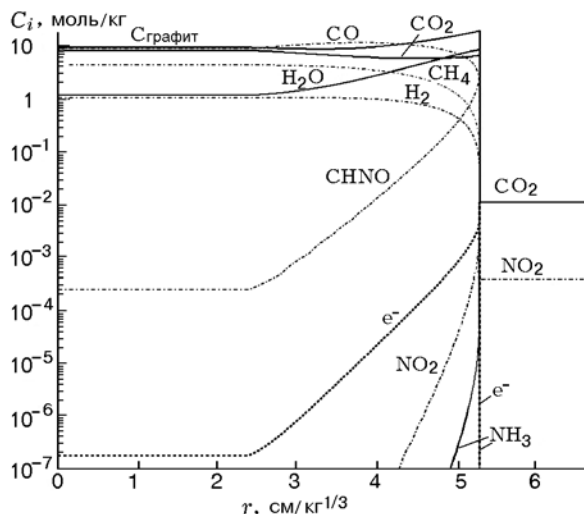


Рис. 6. Профили концентраций компонентов в газообразных продуктах сферической детонации Чепмена — Жуге для ТНТ

## ОБСУЖДЕНИЕ

### Интегралы массы и энергии

Важно проверить, что в полученном решении (см. рис. 5) действительно сохраняются масса и энергия. Для того чтобы это сделать, определим массу  $M$  и полную энергию  $E$  следующим образом:

$$M_j \equiv k_j \int_0^{R_c} \rho_j(r) r^j dr, \quad (9)$$

$$E_j \equiv k_j \int_0^{R_c} [e_j(r) + u_{r,j}^2(r)/2] \rho_j(r) r^j dr, \quad (10)$$

где  $R_c$  — радиус заряда,  $k_j = 4\pi, 2\pi$  и  $1$  для  $j = 2, 1$  и  $0$ . Интегралы были рассчитаны квадратурным методом второго порядка. Исследования с измельчением сетки показали сходимость при числе расчетных точек  $10^4$ . Результаты для заряда ТНТ массой  $1$  кг ( $R_c = 5.24556$  см/кг $^{1/3}$ ) приведены в табл. 3. Погрешность измерения массы варьирует от  $-0.05\%$  до  $+0.009\%$  ( $-0.5 \div +0.06$  г), энергии — от  $0.14$  до  $0.18\%$  (или  $1.5 \div 1.9$  кал/г). Мы полагаем, что достигнутая точность адекватна решаемой задаче и функции решения должны рассчитываться на конечной сетке, при этом наклоны профилей бесконечны на фронте. В табл. 3 также показаны пиковые значения  $e$ ,  $T$  и  $\rho$  (на расчетной сетке) в сравнении с состоянием в точке СЖ. Построенное поле течения используется для инициализации одномерного расчета взрывной волны.

### Решение с постоянным показателем $\Gamma$

В отличие от настоящей работы, в предыдущих исследованиях [10] предполагалось, что газ — совершенный, с постоянным отношением удельных теплоемкостей  $\gamma$ ; энтропия изменяется во взрывной волне, так что приближение изоэнтропичности неприменимо; сохраняется полная энергия газовой динамики. В этих условиях метод фазового пространства приводит к одному обыкновенному дифференциальному уравнению [18]

$$\frac{d \log Z}{d \log F} = \frac{2D + j(\gamma - 1)(1 - F)F}{jZ + D}. \quad (11)$$

Его решение дает интегральную кривую на фазовой плоскости  $Z-F$ , которая выражается

Таблица 3

Точность решения в сравнении с теорией для детонационных волн в ТНТ

Переменная	Теория	Автомодельное решение			$\Gamma = 3.25$ $j = 2$
		$j = 0$	$j = 1$	$j = 2$	
$M_0$ , кг	1.0000	1.00006	0.99947	1.00009	1.01165
$E_0$ , кал/г	1 064.8	1 063.3	1 062.3	1 062.9	1 085.5
$e_{\max}$ , кал/г	1 404.8	1 402.5	1 391.3	1 386.9	1 387.6
$T_{\max}$ , К	3 237.9	3 227.4	3 216.5	3 212.3	3 213.0
$\rho_{\max}$ , г/см $^3$	2.1616	2.1612	2.1485	2.1405	2.1415

уравнением

$$\frac{d \log x}{d \log F} = \frac{-D}{jZ + D}, \quad (12)$$

в котором квадратура производит дополнительную функцию  $x(F)$  [18]. Эти уравнения дополняются определениями

$$\frac{u}{u_{CJ}} = \frac{x F}{F_{CJ}}, \quad \frac{T}{T_{CJ}} = \frac{x^2 Z}{Z_{CJ}} \quad (13)$$

и соотношениями с постоянным значением  $\gamma$

$$\frac{\rho}{\rho_{CJ}} = \left( \frac{T}{T_{CJ}} \right)^{1/(\gamma-1)}, \quad \frac{p}{p_{CJ}} = \left( \frac{\rho}{\rho_{CJ}} \right)^\gamma. \quad (14)$$

Уравнения (11), (12) были проинтегрированы от точки CJ до особой точки A при  $\gamma = \Gamma_{CJ} = 3.2586$  и  $j = 2$ . Результирующие профили решения представлены на рис. 7 в сравнении с решением с переменным значением  $\Gamma$  из предыдущей части (см. рис. 5). Эти два решения похожи, но имеются и различия: все профили для случая с  $\Gamma = \text{const}$  лежат выше профилей с переменным  $\Gamma$ . Это результат неустрашимых погрешностей в глобальных интегралах массы и энергии. Из табл. 3 видно, что погрешность по массе составляет 1.1 %, по энергии — 1.9 % для решения с  $\Gamma = \text{const}$ .

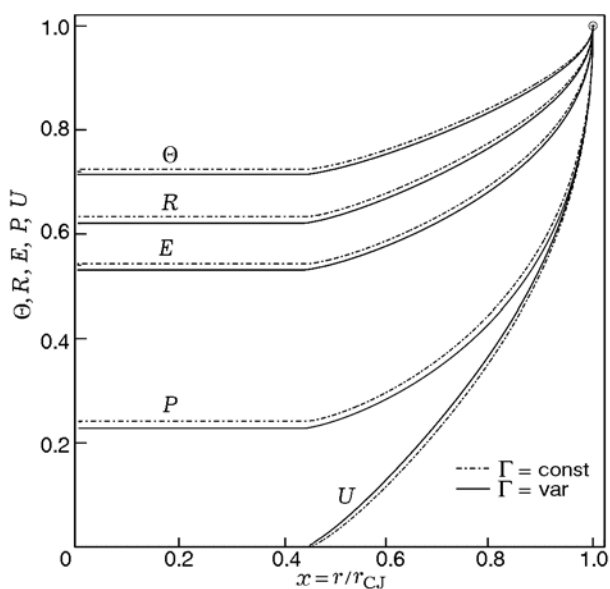


Рис. 7. Сравнение решения с  $\Gamma = 3.2586$  с изоэнтропическим решением CJ ( $S = 1.58$  кал/(г·К)) для сферического случая ( $j = 2$ )

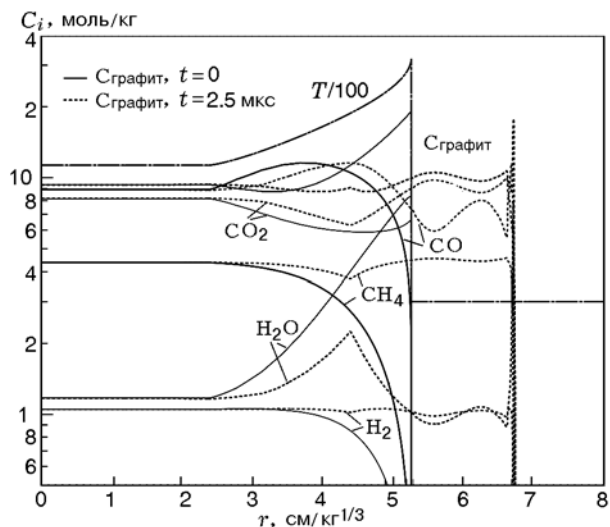


Рис. 8. Распределение температуры и концентраций компонентов в газообразных продуктах взрыва ТНТ за фронтом сферической детонационной волны CJ при  $t = 0$  и 2.5 мкс

### Профили параметров взрывной волны, генерируемой при взрыве заряда ТНТ в воздухе

Автомодельное решение с переменным показателем  $\Gamma$  для сферической детонационной волны CJ было использовано для инициализации одномерного газодинамического расчета. Распределения температуры и концентраций компонентов в газообразных продуктах взрыва ТНТ при  $t = 0$  и 2.5 мкс за фронтом сферической детонационной волны CJ приведены на рис. 8. Доминирует углерод в виде графита (9.9 моль/кг); оксиды  $\text{CO}_2$  (8.9 моль/кг) и  $\text{CO}$  (7.5 моль/кг) преобладают над  $\text{CH}_4$  (4.5 моль/кг),  $\text{H}_2$  (1 моль/кг) и  $\text{H}_2\text{O}$  (1 моль/кг) на начальных стадиях расширения газообразных продуктов детонации при  $t = 2.5$  мкс.

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предложена модель фазовой плоскости для описания параметров течения, связанных с детонационными волнами в сферической, цилиндрической и плоской геометрии. Модель основана на двух связанных обыкновенных дифференциальных уравнениях для  $d \ln x / dF$  и  $d \ln R / dF$ . Система замыкается термодинамическими соотношениями  $P(R)$ ,  $\Theta(R)$ ,  $E(R)$ ,  $A(R)$ ,  $G(R)$  и  $C_i(T)$ , соответствующими равновесному решению вдоль изоэнтропы CJ для

рассматриваемой термодинамической системы. В действительности, эти соотношения способствуют сохранению энергии вдоль изоэнтропы, исключая необходимость применения уравнения сохранения энергии газовой динамики для этой отдельной задачи. Результатом решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений являются функции  $x(F)$  и  $R(F)$ , из которых следуют профили скорости  $U(x)$  и плотности  $R(x)$  за фронтом волны. Совместно с термодинамическими соотношениями они позволяют построить профили термодинамических величин  $P(x)$ ,  $\Theta(x)$ ,  $E(x)$ ,  $A(x)$  и  $C_i(x)$  за фронтом волны. В предсказываемом решении сохраняются вся масса (с погрешностью 0.05 %) и вся глобальная энергия (с погрешностью 0.2 %) при мелкой расчетной сетке интегралов ( $10^4$  ячеек).

В предложенной формулировке задачи центральную роль играет годограф внутренней энергии  $u(T)$  на плоскости Ле Шателье (см. рис. 1). Он дает не только уникальную связь внутренней энергии и температуры, но и полностью характеризует calorические свойства системы. Кроме того, точка Чепмена — Жуге сама обладает почти магическими свойствами: (i) определяет условия на скачке при переходе через фронт детонации, (ii) контролирует сохранение массы и энергии за фронтом, (iii) сама по себе является особой точкой для системы обыкновенных дифференциальных уравнений, приводя к бесконечному наклону профилей характеристик течения за фронтом волны.

Подобное моделирование обеспечивает уникальное проникновение в суть термодинамических состояний и распределений компонентов продуктов взрыва, которые обуславливают появление оптического излучения огненного шара при взрыве ТНТ. Этот подход может быть полезным при изучении структуры и излучательных свойств детонационных волн и других зарядов мощных ВВ.

Работа выполнена в Ливерморской национальной лаборатории им. Э. Лоуренса при поддержке Департамента энергетики США (контракт DE-AC52-07NA27344) и Департамента отечественной безопасности S&T (контракт HSHQPM-10-X-00070).

## ЛИТЕРАТУРА

1. **Taylor G. I.** The dynamics of the combustion products behind plane and spherical detonation fronts in explosives // Proc. Roy. Soc. A. — 1950. — V. 200. — P. 235–247.
2. **Taylor G. I., Tankin R. S.** Chapter 3: Gas dynamical aspects of detonation // Fundamentals of Gas Dynamics. — V. III: High Speed Aerodynamics and Jet Propulsion. — Princeton: Princeton Univ. Press, 1958. — P. 622–686.
3. **Jones H., Miller A. R.** The detonation of solid explosives: the equilibrium conditions in the detonation wave-front and the adiabatic expansion of the products of detonation // Proc. Roy. Soc. A. — 1948. — V. 194, N 1039. — P. 480–507.
4. **Седов Л. И.** Методы подобия и размерности в механике. — М.; Л.: Гостехиздат, 1944.
5. **Stanyukovich K. P.** Unsteady Motion of Continuous Media. — London: Pergamon Press, 1960.
6. **Barenblatt G. I.** Scaling. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2003.
7. **Barenblatt G. I.** Scaling, Self-Similarity and Intermediate Asymptotics. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1996.
8. **Zel'dovich Ya. B., Kompaneets A. S.** Theory of Detonation. — New York: Academic Press, 1960.
9. **Lee J. H. S.** The Detonation Phenomenon. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2008.
10. **Oppenheim A. K., Kuhl A. L., Lundstrom E. A., Kamel M. M.** A parametric study of self-similar blast waves // J. Fluid Mech. — 1972. — V. 52, Pt A. — P. 657–682.
11. **Oppenheim A. K., Kuhl A. L., Kamel M. M.** On self-similar blast waves headed by the Chapman — Jouguet detonation // J. Fluid Mech. — 1972. — V. 55, N 2. — P. 257–270.
12. **Barenblatt G. I., Guirguis R. H., Kamel M. M., Kuhl A. L., Oppenheim A. K., Zel'dovich Ya. B.** Self-similar explosion waves of variable energy at the front // J. Fluid Mech. — 1980. — V. 99, Pt 4. — P. 841–858.
13. **Kuhl A. L., Kamel M. M., Oppenheim A. K.** Pressure waves generated by steady flames // Fourteenth Symp. (Intern.) on Combustion. — Pittsburgh: The Combustion Inst., 1973. — P. 1201–1215.
14. **Fried L. E.** CHEETAH 1.22 User's manual // Report N UCRL-MA-117541, LLNL. — 1995.
15. **Ornellas D. L.** Calorimetric determination of the heat and products of detonation for explosives: october 1961 to april 1982 // Report N UCRL-52821, LLNL. — 1982.
16. **Oppenheim A. K., Lundstrom E. A., Kuhl A. L., Kamel M. M.** A systematic exposition of the conservation equations for blast waves // J. Appl. Mech. — December 1971. — P. 783–794.
17. **Ершов А. П.** Ионизация при детонации конденсированных ВВ // Физика горения и взрыва. — 1975. — Т. 11, № 6. — С. 938–945.
18. **Kuhl A. L., Seizew M. R.** Analysis of ideal, strong, Chapman — Jouguet detonations // TRW Report 78.4735.9-13. — Redondo Beach, CA, 1978.



## ПРИЛОЖЕНИЕ

Из нашей предыдущей работы по систематическому исследованию уравнений сохранения для взрывных волн [14] следует

$$-D \frac{d \ln F}{d \ln x} = D + jZ = (j+1)Z - (1-F)^2, \quad (\text{A1})$$

где  $Z \equiv x^{-2} \Gamma g/h$  и  $D = Z - (1-F)^2$ . Можно показать, что

$$\begin{aligned} -D \frac{d \ln h}{d \ln x} &= \\ &= \frac{F}{1-F} [D + jZ - (j+1)D] = jF(1-F). \quad (\text{A2}) \end{aligned}$$

Переписывая уравнения в терминах  $F$  как независимой переменной и заменяя  $h = \rho/\rho_a$  на  $R \equiv \rho/\rho_{\text{CJ}}$ , находим

$$\frac{d \ln x}{dF} = \frac{-1}{F} \frac{Z - (1-F)^2}{(j+1)Z - (1-F)^2}, \quad (\text{A3})$$

$$\frac{d \ln R}{dF} = \frac{j(1-F)}{(j+1)Z - (1-F)^2}. \quad (\text{A4})$$

Выразим  $Z$  в виде  $Z = x^{-2} A Z_{\text{CJ}}$ , где  $A \equiv (a/a_{\text{CJ}})^2$  — безразмерная скорость звука, являющаяся функцией  $R$  из термодинамического решения вдоль изоэнтропы CJ (т. е.  $A = A(R)$ ,

как показано на рис. 2). После этого получаем два связанных обыкновенных дифференциальных уравнения:

$$\begin{aligned} \frac{d \ln x}{dF} &= \\ &= \frac{-1}{F} \frac{x^{-2} A(R) Z_{\text{CJ}} - (1-F)^2}{(j+1)x^{-2} A(R) Z_{\text{CJ}} - (1-F)^2}, \quad (\text{A5}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d \ln R}{dF} &= \\ &= \frac{j(1-F)}{(j+1)x^{-2} A(R) Z_{\text{CJ}} - (1-F)^2}. \quad (\text{A6}) \end{aligned}$$

Они должны быть проинтегрированы по области  $0 < F \leq F_{\text{CJ}}$ . Плоский случай ( $j = 0$ ) имеет особенность (т. е.  $d \ln R/dF = 0$ ) и требует иного подхода. В этом случае мы используем инвариант Римана. В переменных фазовой плоскости он принимает форму

$$F(R) = F_{\text{CJ}} - \sqrt{Z_{\text{CJ}}} \int_r^1 \sqrt{A(R)} d \ln R. \quad (\text{A7})$$

Уравнение (A7) обеспечивает необходимое соотношение между  $F$  и  $R$  и заменяет (A6) для плоского случая.

*Поступила в редакцию 29/V 2014 г.*