

УДК 532.526

АКУСТИЧЕСКОЕ ВОЗБУЖДЕНИЕ ВОЛН ТОЛЛИНА — ШЛИХТИНГА В СЖИМАЕМОМ ПОГРАНИЧНОМ СЛОЕ НА ШЕРОХОВОЙ ПЛАСТИНЕ*

Г.В. ПЕТРОВ

*Институт теоретической и прикладной механики СО РАН,
Новосибирск*

Задача нелинейного взаимодействия возмущений сжимаемого пограничного слоя, вызванных звуком и шероховатостью поверхности пластины, приводится к линейной задаче параболизированных неоднородных уравнений для амплитудных функций с неоднородными граничными условиями на невозмущенной стенке. Численное решение, в том числе и расчет зависимости волнового числа от продольной координаты, осуществляется методом, используемым для решения задачи устойчивости. Исследована зависимость параметра, определяющего способность к возбуждению волн неустойчивости (коэффициента восприимчивости), от углов падения звуковой волны и наклона фронта волны шероховатости. При сверхзвуковом обтекании наибольшая восприимчивость соответствует углу между фронтом волны шероховатости и направлением потока, равному углу Маха.

Исследования восприимчивости пограничного слоя к внешним воздействиям ограничены малыми дозвуковыми скоростями течения [1]. В теоретических работах, относящихся, в частности, к возбуждению волн Толлмина — Шлихтинга при взаимодействии возмущений, вызванных звуком и шероховатостью поверхности пластины [2], жидкость считается несжимаемой. В данной работе расчеты проведены для чисел Маха $M = 0,6-2$.

Анализ ограничен косыми синусоидальными волнами звука и шероховатости. Другие решения могут быть получены суперпозицией с весом, равным произведению Фурье-образов звуковой волны и рельефа шероховатости. Представленные численные результаты определяют область спектра внешних возмущений, ответственную за возбуждение волны Толлмина — Шлихтинга.

1. УРАВНЕНИЯ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ДВУХ ВОЗМУЩЕНИЙ

Уравнения, содержащие только линейные и квадратичные члены возмущения сжимаемого пограничного слоя на пластине, получены в [3]:

$$\begin{aligned}(\partial_1 + h_1)\hat{u} + \partial_2\hat{v} + \partial_3\hat{w} &= \hat{e} + \hat{e}, \\ (\hat{d} + \rho d)\hat{v} + h_1(\rho u\hat{v} + \rho\hat{u}v + u\hat{v} - \hat{t}_{12}) &= -\partial_2\hat{p} + (h_1 + \partial_1)\hat{t}_{12} + \partial_2(\hat{t}_{22} + \hat{t}_{22}) + \partial_3\hat{t}_{23},\end{aligned}$$

* Работа выполнена при финансовой поддержке Президента РФ (проект НШ-9642003.1) и РФФИ (гранты № 02-01-00051, 02-01-00142).

$$\begin{aligned}
& (\hat{d} + \rho d)\hat{u} + (\rho + \hat{\rho})\hat{\partial}u + (\hat{\rho} + \check{\rho})u\partial_1 u - h_1(\rho\hat{v}^2 - \hat{\tau}_{22} - \check{\tau}_{22}) = -\partial_1\hat{p} + \\
& \quad + (h_1 + \partial_1)(\hat{\tau}_{11} + \check{\tau}_{11}) + \partial_2\hat{\tau}_{12} + \partial_3(\hat{\tau}_{13} + \check{\tau}_{13}), \\
& (\hat{d} + \rho d)\hat{w} = -\partial_3\hat{p} + (h_1 + \partial_1)(\hat{\tau}_{13} + \check{\tau}_{13}) + \partial_2\hat{\tau}_{23} + \partial_3(\hat{\tau}_{33} + \check{\tau}_{33}), \\
& (\hat{d} + \rho d)(\hat{h} + u\hat{w}) + (\rho + \hat{\rho})\hat{\partial}H + (\hat{\rho} + \check{\rho})u\partial_1 H + \rho d(\hat{u}^2 + \hat{v}^2 + \hat{w}^2)/2 = \\
& \quad = \partial_t\hat{p} + (h_1 + \partial_1)(\hat{q}_1 + \check{q}_1) + \partial_2\hat{q}_2 + \partial_3(\hat{q}_3 + \check{q}_3), \\
& \hat{\tau}_{12} = (\mu + \hat{\mu})(\partial_2\hat{u} + \partial_1\hat{v} - h_1\hat{v}) + (\hat{\mu} + \check{\mu})\partial_2 u, \quad \hat{\tau}_{23} = (\mu + \hat{\mu})(\partial_2\hat{w} + \partial_3\hat{v}), \quad (1) \\
& \hat{q}_2 = (\lambda + \hat{\lambda})\partial_2\hat{T} + (\hat{\lambda} + \check{\lambda})\partial_2 T + \lambda\partial_2\check{T} + u\hat{\tau}_{12} + \tau_{12}\hat{u} + \tau_{22}\hat{v} + \hat{\tau}_{12}\hat{u} + \hat{\tau}_{22}\hat{v} + \hat{\tau}_{23}\hat{w}, \\
& \rho\hat{e} = -\rho d\hat{r} - \hat{\partial}\rho, \quad \check{e} = \hat{r}d\hat{r} - \hat{\partial}\hat{r} - d\hat{r}, \quad \hat{\tau}_{13} = \mu(\partial_1\hat{w} + \partial_3\hat{u}), \quad \check{\tau}_{13} = \hat{\mu}\hat{\tau}_{13}/\mu, \\
& \hat{\tau}_{kk} = \mu\hat{s}_{kk} + s_{kk}\hat{\mu}, \quad \check{\tau}_{kk} = s_{kk}\check{\mu} + \hat{\mu}s_{kk} - 2\mu\check{e}/3, \quad \hat{s}_{11} = 2(\partial_1\hat{u} - \hat{e}/3), \\
& \hat{s}_{22} = 2(h_1\hat{u} + \partial_2\hat{v} - \hat{e}/3), \quad \hat{s}_{33} = 2(\partial_3\hat{w} - \hat{e}/3), \quad \hat{q}_1 = \lambda\partial_1\hat{T} + \hat{\lambda}\partial_1 T + u\hat{\tau}_{11} + \tau_{11}\hat{u} + \tau_{12}\hat{v}, \\
& \hat{q}_3 = \lambda\partial_3\hat{T} + u\hat{\tau}_{13} + \tau_{33}\hat{w}, \quad \check{q}_1 = \check{\lambda}\partial_1 T + \lambda\partial_1\check{T} + \hat{\lambda}\partial_1\hat{T} + u\check{\tau}_{11} + \hat{\tau}_{11}\hat{u} + \hat{\tau}_{12}\hat{v} + \hat{\tau}_{13}\hat{w}, \\
& \check{q}_3 = \lambda\partial_3\check{T} + \hat{\lambda}\partial_3\hat{T} + u\check{\tau}_{13} + \hat{\tau}_{13}\hat{u} + \hat{\tau}_{23}\hat{v} + \hat{\tau}_{33}\hat{w},
\end{aligned}$$

где $\hat{r} = \hat{\rho}/\rho$, $\check{r} = \check{\rho}/\rho$, $H = h + u^2/2$, $e = (h_1 + \partial_1)u$, $\tau_{12} = \mu\partial_2 u$, $s_{11} = 2(\partial_1 u - e/3)$, $s_{22} = 2(h_1 u - e/3)$, $s_{33} = -2e/3$; \hat{T} , $\hat{\rho}$, $\hat{\mu}$, $\hat{\lambda}$ и \check{T} , $\check{\rho}$, $\check{\mu}$, $\check{\lambda}$ — линейные и квадратичные члены возмущений температуры, плотности, вязкости и теплопроводности газа, как функций от возмущений давления \hat{p} и энтальпии \hat{h} . Дифференциальные операторы:

$$\begin{aligned}
\partial_t &= \partial/\partial t, \quad \partial_1 = \partial/\partial \xi, \quad \partial_2 = \rho u \partial/\partial \psi, \quad \partial_3 = \partial/\partial z, \\
\hat{\partial} &= \hat{u}\partial_1 + \hat{v}\partial_2 + \hat{w}\partial_3, \quad d = \partial_t + u\partial_1, \quad \tilde{d} = \rho\hat{\partial} + \hat{\rho}d,
\end{aligned}$$

где t — время, z — расстояние вдоль кромки пластины, определены в ортогональной системе координат (ξ, ψ, z) , связанной с линиями тока невозмущенного пограничного слоя (ψ — функция тока). Векторы скорости, потока тепла и тензор вязких напряжений имеют физические компоненты (u, v, w) , q_i , τ_{ik} вдоль линий тока и по нормальям к ним. Здесь имеются в виду параметры возмущенного течения, в уравнениях (1) обозначения без надстрочных символов относятся лишь к основному течению, поэтому уравнения не содержат v и w . Принято, что на поверхности пластины значение ξ равно расстоянию x от ее кромки.

Уравнения (1), не дополненные уравнениями состояния, не меняются в результате введения следующих единиц измерения: v_∞/u_∞^2 для t , v_∞/u_∞ для ξ и z , u_∞ для (u, v, w) , u_∞^2 для h , $\rho_\infty u_\infty^2$ для ρ и τ_{ik} , $\rho_\infty u_\infty^3$ для q_i , T_∞ для T , ρ_∞ для ρ , μ_∞ для μ и ψ , $\mu_\infty u_\infty^2/T_\infty$ для λ . Индекс ∞ относится к значениям величин в набегающем потоке, $v_\infty = \mu_\infty/\rho_\infty$. Толщина пограничного слоя δ равна по порядку $R = \sqrt{\xi}$. При $R \rightarrow \infty$ значение ξ с точностью до R^{-2} равно $u_\infty x/v_\infty$.

Уравнения для $R \rightarrow \infty$, как и в линейных теориях, выводятся для амплитудных функций, которые медленно меняются вдоль потока. В представляющем интерес диапазоне длин волн асимптотические оценки позволяют произвести пред-

варительное упрощение системы (1) также и непосредственно для возмущений. Рассмотрим нелинейные члены, ниже линейная часть заимствована из [3]. Выполненные ранее расчеты показали, что возмущения в сверхзвуковом пограничном слое, вызванные как звуком, так и шероховатостью, наиболее интенсивны на расстоянии порядка длины волны от кромки пластины, и здесь применимы оценки для собственных возмущений первой моды в начальной стадии роста по x : $\hat{p}, \hat{u}, \hat{w}, \hat{h} = O(1)$, $\hat{v}, \hat{\tau}_{12}, \hat{\tau}_{23}, \hat{q}_2, \partial_2 = O(R^{-1})$, $\partial_1, \partial_3, \partial_t = O(R^{-2})$. Для значений R , при которых толщина пограничного слоя сопоставима с длиной волны, используем иные оценки $\hat{v} = O(1)$, $\partial_1, \partial_3, \partial_t = O(R^{-1})$; в первом приближении им соответствуют уравнения невязкой теории устойчивости. Сохраняя в них только те нелинейные члены, которые либо по первой, либо по второй асимптотике имеют наибольший порядок по R относительно главных линейных членов, получим

$$\begin{aligned} \partial_2 \hat{v} - \hat{L}_v = \hat{r} \hat{d} \hat{r} - \hat{d} \hat{r} - \hat{d} \hat{r}, \quad \partial_2 (\hat{p} - \hat{\tau}_{22}) - \hat{L}_p = -\hat{d} \hat{v}, \quad \partial_2 \hat{\tau}_{12} - \hat{L}_{12} = \hat{d} \hat{u} + \rho (\hat{r} \hat{d} \hat{u} + u \hat{r} \partial_1 u), \\ \partial_2 \hat{\tau}_{23} - \hat{L}_{23} = \hat{d} \hat{w}, \quad \partial_2 \hat{q} - \hat{L}_q = \hat{d} (\hat{h} + u \hat{u}) + \rho \left[\hat{r} \hat{d} H + u \hat{r} \partial_1 H + d (\hat{u}^2 + \hat{v}^2 + \hat{w}^2) / 2 \right], \\ \partial_2 \hat{u} - \hat{L}_u = -(\hat{\mu} / \mu) \partial_2 \hat{u} - (\hat{\mu} / \mu) \partial_2 u, \quad \partial_2 \hat{w} - \hat{L}_w = -(\hat{\mu} / \mu) \partial_2 \hat{w}, \\ \partial_2 \hat{T} - \hat{L}_T = -(\hat{\lambda} / \lambda) \partial_2 \hat{T} - \partial_2 \hat{T} - (\hat{\lambda} / \lambda) \partial_2 T - (\hat{u} \hat{\tau}_{12} + \hat{w} \hat{\tau}_{23}) / \lambda, \end{aligned} \quad (2)$$

где $\hat{q} = \hat{q}_2$; $\hat{L}_v, \hat{L}_p, \dots$ — не содержащие ∂_2 линейные выражения. Правая часть второго уравнения в (2) определяется второй асимптотикой. Правые части трех последних уравнений заданы первой асимптотикой: эти уравнения определяют возмущения вязких напряжений и тепловых потоков, которые для второй асимптотики в остальных, главных, уравнениях имеют порядок R^{-1} . Нелинейные части определены с точностью до R^{-2} на расстояниях от кромки пластины порядка длины волны, и R^{-1} , когда с длиной волны сопоставима толщина пограничного слоя.

В случае совершенного газа $\rho T = 1$, $T = (\gamma - 1) M^2 h$, $\hat{r} = \gamma M^2 \hat{p} - \rho \hat{T}$, $\hat{r} = \rho \hat{r} \hat{T}$, $\hat{T} = 0$, где $\gamma = c_p / c_v$ — отношение теплоемкостей, M — число Маха. Предполагая также, что число Прандтля $Pr = \text{const}$, получим

$$\begin{aligned} \partial_2 \hat{v} - \hat{L}_v = (\hat{r} - \rho \hat{T}) \hat{d} \hat{r} - \hat{d} \hat{r} + u \hat{\rho} \hat{T} \partial_1 \ln T - \hat{\rho} \hat{d} \hat{T}, \quad \partial_2 (\hat{p} - \hat{\tau}_{22}) - \hat{L}_p = -\hat{d} \hat{v}, \\ \partial_2 \hat{\tau}_{12} - \hat{L}_{12} = \hat{N}_{\tau_{12}}, \quad \partial_2 \hat{\tau}_{23} - \hat{L}_{\tau_{23}} = \hat{d} \hat{w}, \\ \partial_2 \hat{q} - \hat{L}_q = u \hat{N}_{\tau_{12}} + \hat{d} \hat{h} + \hat{d} h + \rho \{ \hat{u} [(\hat{u} + u \hat{r}) \partial_1 + \hat{v} \partial_2] u + \hat{u} \hat{d} \hat{u} + \hat{v} \hat{d} \hat{v} + \hat{w} \hat{d} \hat{w} \}, \\ \partial_2 \hat{u} - \hat{L}_u = -\mu_h \hat{h} \partial_2 \hat{u} - \mu_{hh} \hat{h}^2 \partial_2 u, \quad \partial_2 \hat{w} - \hat{L}_w = -\mu_h \hat{h} \partial_2 \hat{w}, \\ \partial_2 \hat{h} - \hat{L}_h = -\mu_h \hat{h} \partial_2 \hat{h} - \mu_{hh} \hat{h}^2 \partial_2 h - Pr (\hat{u} \hat{\tau}_{12} + \hat{w} \hat{\tau}_{23}) / \mu, \end{aligned} \quad (3)$$

где $\hat{N}_{\tau_{12}} = \hat{d} \hat{u} + \hat{d} u$, $\hat{d} = \hat{\rho} [(\hat{u} + u \hat{r}) \partial_1 + \hat{v} \partial_2]$, $\mu_h = d \ln \mu / dh$, $\mu_{hh} = (d^2 \mu / dh^2) / (2\mu)$.

Уравнения имеют вид $\mathbf{K} \hat{\mathbf{Z}} = \hat{\mathbf{N}}(\hat{\mathbf{Z}})$, где $\hat{\mathbf{Z}} = (\hat{v}, \hat{p}, \hat{\tau}_{12}, \hat{\tau}_{23}, \hat{q}, \hat{u}, \hat{w}, \hat{h})$ — вектор, составленный из возмущений основных параметров; \mathbf{K} , $\hat{\mathbf{N}}$ — линейный (матрица 8×8) и нелинейный дифференциальные операторы. Представляя решение в виде суммы $\hat{\mathbf{Z}} = \hat{\mathbf{Z}}_1 + \hat{\mathbf{Z}}_2$, где $\hat{\mathbf{Z}}_1 + \hat{\mathbf{Z}}_2$ — суперпозиция линейных возмущений

($\mathbf{K}\widehat{\mathbf{Z}}_j = 0$), инициируемых звуком $j = 1$ и шероховатостью $j = 2$, для поправки $\widehat{\mathbf{Z}}$ на нелинейность получим уравнение

$$\mathbf{K}\widehat{\mathbf{Z}} = \widehat{\mathbf{N}}(\widehat{\mathbf{Z}}_1 + \widehat{\mathbf{Z}}_2), \quad (4)$$

т. е. нелинейное уравнение приводится к линейному неоднородному. Его решение представляет сумму решений четырех уравнений, правые части которых соответствуют разным комбинациям векторов $\widehat{\mathbf{Z}}_1, \widehat{\mathbf{Z}}_2$, образующим квадратичные члены в уравнении (4), из них в данном случае нужны только перекрестные комбинации $\widehat{a}\widehat{b} = \widehat{a}_1\widehat{b}_2 + \widehat{a}_2\widehat{b}_1$.

Для синусоидальных внешних возмущений амплитудные функции линейных решений вида $\widehat{\mathbf{Z}}_j = \text{Re}[\widetilde{\mathbf{Z}}_j \exp(i\varphi_j)]$ (где $\varphi_j = \alpha_j \xi + \beta_j z - \omega_j t; j = 1, 2; \omega_1 = \omega; \omega_2 = 0; \text{Re}$ — вещественная часть) определяются уравнениями $\mathbf{L}_j \widetilde{\mathbf{Z}}_j = 0$ с операторами \mathbf{L}_j , в которые преобразуется \mathbf{K} при заменах $\partial_1, \partial_3, \partial_t$ на $i\alpha_j + \partial_1, i\beta_j, -i\omega_j$. Также учитывается, что оператор ∂_1 теперь действует на амплитудную функцию, а не на само возмущение, и имеет оценку R^{-2} для обеих асимптотик.

Амплитудные функции решения уравнения (4), которое ищется в виде $\widehat{\mathbf{Z}} = \text{Re}\left\{\widetilde{\mathbf{Z}} \exp\left[i\left(\int \alpha d\xi + \beta z - \omega t\right)\right]\right\}$ ($\beta = \beta_1 + \beta_2$), удовлетворяют уравнению $\mathbf{L}\widetilde{\mathbf{Z}} = 0,5\widetilde{\mathbf{N}} \exp\left[i\int(\alpha_3 - \alpha)d\xi\right]$, где $\alpha_3 = \alpha_1 + \alpha_2$, $\widetilde{\mathbf{N}}$ образуется заменой $\widehat{a}\widehat{b}$ в правой части уравнений (3) на $\widetilde{a}_j\widetilde{b}_k = \widetilde{a}_1\widetilde{b}_2 + \widetilde{a}_2\widetilde{b}_1$ и указанных выше замен производных:

$$\widetilde{N}_v = \left\{u_{cj}\widetilde{r}_j + \rho[(\partial_1\eta)u\rho T' - u_{c3}]\widetilde{T}_j + u(\widetilde{r}_j - \rho\widetilde{T}_j)\partial_1 - \widetilde{d}_j\right\}\widetilde{r}_k - u\widetilde{\rho}_j\partial_1\widetilde{T}_k,$$

$$\widetilde{N}_p = -(\widetilde{d}_{0j} + \rho\widetilde{v}_j\partial_2)\widetilde{v}_k,$$

$$\widetilde{N}_{\tau 12} = u'\widetilde{N}'_{\tau} + \widetilde{d}_j\widetilde{u}_k, \quad \widetilde{N}_{\tau 23} = \widetilde{d}_j\widetilde{w}_k,$$

$$\widetilde{N}_q = u\widetilde{N}_{\tau 12} + h'\widetilde{N}'_{\tau} + \widetilde{d}_j\widetilde{h}_k +$$

$$+ \rho\left\{u'\left[(\partial_2\eta)\widetilde{v}_j + (\partial_1\eta)\left(\widetilde{u}_j + u\widetilde{r}_j\right)\right]\widetilde{u}_k + u_{cj}\left(\widetilde{u}_j\widetilde{u}_k + \widetilde{v}_j\widetilde{v}_k + \widetilde{w}_j\widetilde{w}_k\right) + u\left(\widetilde{u}_j\partial_1\widetilde{u}_k + \widetilde{w}_j\partial_1\widetilde{w}_k\right)\right\},$$

$$\widetilde{N}_u = -\mu_h\widetilde{h}_j\partial_2\widetilde{u}_k - u'\widetilde{N}'_{\mu}, \quad \widetilde{N}_w = -\mu_h\widetilde{h}_j\partial_2\widetilde{w}_k,$$

$$\widetilde{N}_h = -\mu_h\widetilde{h}_j\partial_2\widetilde{h}_k - h'\widetilde{N}'_{\mu} - \text{Pr}(\widetilde{u}_j\widetilde{r}_{12k} + \widetilde{w}_j\widetilde{r}_{23k})/\mu,$$

где

$$\widetilde{N}'_{\tau} = [(\partial_2\eta)\widetilde{v}_j + (\partial_1\eta)(\widetilde{u}_j + u\rho\widetilde{T}_j)]\widetilde{\rho}_k,$$

$$\widetilde{N}'_{\mu} = \mu_{hh}\widetilde{h}_j\widetilde{h}_k\partial_2\eta, \quad \widetilde{d}_j = \widetilde{d}_{0j} + \rho[(\widetilde{u}_j + u\widetilde{r}_j)\partial_1 + \widetilde{v}_j\partial_2],$$

$\widetilde{d}_{0j} = i\rho[(\alpha_3 - \alpha_j)\widetilde{u}_j + (\beta - \beta_j)\widetilde{w}_j] + (u_{c3} - u_{cj})\widetilde{\rho}_j$, $u_{cj} = i(u\alpha_j - \omega_j)$, η — переменная подобия пограничного слоя ($d\eta/df = 1/u$, $f = \psi/R$; с точностью до R^{-2} $\eta = \sqrt{u_{\infty}/(v_{\infty}x)} \int_0^y (\rho/\rho_{\infty}) dy$).

Переход к переменной подобия невозмущенного пограничного слоя осуществляется с помощью формул $\partial_1 = R^{-1}(\partial + f_1 \partial_\eta)$, $\partial_2 = R^{-1} \rho \partial_\eta$, где $f_1 = -f_0 u$; $f_0 = f / (2Ru^2)$; $\partial = 0,5 \partial / \partial R$; $\partial_\eta = \partial / \partial \eta$. Используя линейный оператор, определенный в [4] с точностью до R^{-2} для обеих асимптотик, и вводя переменную $\tilde{\pi} = \tilde{p} - \tilde{\tau}_{22}$, получим

$$\begin{aligned} \tilde{v}' &= \tilde{v}^* - g_m u T \partial \tilde{\pi} - T \partial \tilde{u} + g_{m1} u \partial \tilde{h} - g_m f_2 T \tilde{\pi}^* - f_3 \tilde{u}^* + g_{m1} f_2 \tilde{h}^* + \\ &+ \Sigma \left\{ [c_j \tilde{r}_j + (f_2 T' - c_3) \rho \tilde{T}_j - u (\partial \tilde{T}_j) - f_2 \tilde{T}'_j - \tilde{\delta}_j] \tilde{r}_k - (u \tilde{r}_j - \tilde{a}_{0j}) (T \partial \tilde{r}_k + f_3 \tilde{r}'_k) - \tilde{v}_j \tilde{r}'_k \right\}, \\ \tilde{\pi}' &= \tilde{\pi}^* - u \partial \tilde{v} - f_2 \tilde{v}^* - \Sigma \tilde{d}_{0j} \tilde{v}_k, \\ \tilde{\tau}'_{12} &= \rho u' \tilde{v} + T \partial \tilde{\pi} + (i_c + f_1 u' + u \partial) \tilde{u} + i_x \tilde{p} + f_2 u' \tilde{r} - \tilde{i}_T + f_3 \tilde{\pi}^* + f_2 \tilde{u}^* + \tilde{N}_{\tau 12}, \\ \tilde{u}' &= \tilde{u}^* - u \tilde{N}_\mu^* + \Sigma \tilde{\mu}_j \tilde{u}'_k, \\ \tilde{\tau}'_{23} &= (i_c + u \partial) \tilde{w} + i_z \tilde{p} - i_x \tilde{\tau}_{13} - i_z \tilde{\tau}_{33} + f_2 \tilde{w}^* + \Sigma \tilde{d}_j \tilde{w}_k, \\ \tilde{w}' &= \tilde{w}^* + \Sigma \tilde{\mu}_j \tilde{w}'_k, \\ \tilde{q}' &= (\rho H' - \mu_x u') \tilde{v} + (i_c u + f_1 H' + f_2 u' + u^2 \partial) \tilde{u} + [i_c - (i_x^2 + i_z^2) \mu_R / \text{Pr} + u \partial] \tilde{h} + \\ &+ i_w \tilde{p} + f_2 H' \tilde{r} - u \tilde{i}_T + f_2 (u \tilde{u}^* + \tilde{h}^*) + u \tilde{N}_{\tau 12} + h' \tilde{N}_\tau^* + \\ &+ \Sigma [\tilde{d}_j \tilde{h}_k + u \tilde{a}_{2j} \tilde{u}_k + \rho c_j (\tilde{u}_j \tilde{u}_k + \tilde{v}_j \tilde{v}_k + \tilde{w}_j \tilde{w}_k) + u (\tilde{u}_j \partial \tilde{u}_k + \tilde{w}_j \partial \tilde{w}_k) + f_2 (\tilde{u}_j \tilde{u}'_k + \tilde{w}_j \tilde{w}'_k)], \\ \tilde{h}' &= \tilde{h}^* - h' \tilde{N}_\mu^* + \Sigma [\tilde{\mu}_j \tilde{h}'_k - \text{Pr} (\tilde{u}_j \tilde{\tau}_{12k} + \tilde{w}_j \tilde{\tau}_{23k}) / \mu_R], \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{v}^* &= \rho T' \tilde{v} - (i_x + f_0 u' T) \tilde{u} - i_z \tilde{w} - f_2 \rho T' \tilde{T} - i_c T \tilde{r}; \quad \tilde{u}^* = -i_x \tilde{v} + \tilde{\tau}_{12} / \mu_R - u' \mu_h \tilde{h}; \\ \tilde{r} &= \tilde{p} / \rho = g_m \tilde{p} - \rho \tilde{T}; \quad \tilde{\pi}^* = (f_1 u' - f_2 \rho T' - i_c) \tilde{v} + i_x \tilde{\tau}_{12} + i_z \tilde{\tau}_{23}; \quad \tilde{w}^* = -i_z \tilde{v} + \tilde{\tau}_{23} / \mu_R; \\ \tilde{h}^* &= -\text{Pr} u' \tilde{u} - h' \mu_h \tilde{h} + \text{Pr} (\tilde{q} - u \tilde{\tau}_{12}) / \mu_R; \quad \tilde{p} = \tilde{\pi} - \tilde{\tau}_{11} - \tilde{\tau}_{33}; \quad \tilde{i}_T = i_x \tilde{\tau}_{11} + i_z \tilde{\tau}_{13}; \\ \tilde{\tau}_{11} &= 2\mu_x \tilde{u} - \tilde{e}_3; \quad \tilde{\tau}_{33} = 2\mu_z \tilde{w} - \tilde{e}_3; \quad \tilde{\tau}_{13} = \mu_x \tilde{w} + \mu_z \tilde{u}; \quad \tilde{e}_3 = 2\mu_R [\rho T' \tilde{v} - i_c (g_m T \tilde{\pi} - \tilde{T})] / 3; \\ \tilde{T} &= g_{m1} \tilde{h}; \quad \tilde{N}_{\tau 12} = u' \tilde{N}_\tau^* + \Sigma \tilde{d}_j \tilde{u}_k; \quad \tilde{d}_j = \tilde{d}_{0j} + \tilde{a}_{1j} \partial; \quad \tilde{d}_{0j} = \rho [\tilde{\delta}_j + (c_3 - c_j) \tilde{r}_j] + \tilde{a}_{2j} \partial_\eta; \\ \tilde{\delta}_j &= (i_{x3} - i_{xj}) \tilde{u}_j + (i_z - i_{zj}) \tilde{w}_j; \quad \tilde{N}_\tau^* = \Sigma (\rho \tilde{v}_j + f_1 \tilde{a}_{0j}) \tilde{r}_k; \\ \tilde{N}_\mu^* &= [g_{m1}^2 (d^2 \mu / dT^2) / (2\mu)] \Sigma \tilde{h}_j \tilde{h}_k; \quad \tilde{a}_{0j} = \tilde{u}_j + u \rho \tilde{T}_j; \quad \tilde{a}_{1j} = \tilde{u}_j + u \tilde{r}_j; \\ \tilde{a}_{2j} &= \rho \tilde{v}_j + f_1 \tilde{a}_{1j}; \quad \tilde{\mu}_j = -\mu_h \tilde{h}_j; \quad \mu_x = i_x \mu_R; \quad \mu_z = i_z \mu_R; \quad \mu_R = \mu \rho / R; \\ \mu_h &= g_{m1} d \ln \mu / dT; \quad c_j = i_{xj} u - i_{wj}; \quad i_c = iR(u\alpha - \omega); \quad i_x = i\alpha RT; \quad i_z = i\beta RT; \\ i_w &= i\omega RT; \quad f_2 = f_1 u; \quad f_3 = f_1 T; \quad g_m = \gamma M^2; \quad g_{m1} = (\gamma - 1) M^2; \\ \Sigma &= 0,5 \exp \left[2i \int (\alpha_3 - \alpha) R dR \right] \sum_{j=1}^2 \quad ; \quad \text{штрих — производная по } \eta. \end{aligned}$$

2. ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ, МЕТОД РАСЧЕТА

Условия на поверхности пластины с заданным функцией $\hat{y}(x, z)$ рельефом шероховатости: $u + \hat{u} = 0$, $\hat{v} = \hat{w} = 0$, $T + \hat{T} = T_w$ при $y = \hat{y}$. Принято, что материал пластины достаточно теплопроводен для выравнивания неоднородностей температуры ее поверхности. На невозмущенной стенке $u = 0$, $T = T_w$ при $y = 0$. Используя ряд по степеням y и ограничиваясь при этом только линейными и квадратичными членами относительно возмущений, получаем $\hat{T} + \hat{y} \partial(T + \hat{T})/\partial y + \hat{y}^2 (\partial^2 T / \partial y^2) / 2 = 0$ при $y = 0$, откуда следует, что $\hat{T} = -\hat{y} \partial \hat{T}_1 / \partial y$, $\hat{T}_1 = 0$, $\hat{T}_2 = -\hat{y} \partial T / \partial y$ при $y = 0$. Для составляющих возмущения скорости условия аналогичны. При нормировке на комплексную амплитуду волны шероховатости $\tilde{y} = \text{const}$ условия на невозмущенной стенке для амплитудных функций имеют вид

$$\tilde{u} = \sigma \tilde{u}'_1, \quad \tilde{v} = \sigma \tilde{v}'_1, \quad \tilde{w} = \sigma \tilde{w}'_1,$$

$$\tilde{h} = \sigma \tilde{h}'_1 \quad (\sigma = -0,5 \rho \exp[2i \int (\alpha_3 - \alpha) R dR] / R) \quad \text{при } \eta = 0, \quad (6)$$

$\tilde{u}_1 = \tilde{v}_1 = \tilde{w}_1 = \tilde{h}_1 = 0$ (звук), $\tilde{u}_2 = -\rho u' / R$, $\tilde{v}_2 = \tilde{w}_2 = 0$, $\tilde{h}_2 = -\rho h' / R$ (шероховатость).

Уравнения (5) имеют вид

$$\partial \mathbf{Z} / \partial \eta = \mathbf{B}_1 \mathbf{Z} + \mathbf{B}_2 \partial \mathbf{Z} / \partial R + \mathbf{N}, \quad (7)$$

где $\mathbf{Z} = (\tilde{v}, \tilde{\pi}, \tilde{u}, \tilde{w}, \tilde{h}, \tilde{\tau}_{12}, \tilde{\tau}_{23}, \tilde{q})$.

Расчеты показывают, что амплитуды линейных возмущений внутри пограничного слоя достигают значений, во много раз больших, чем вне его. При выводе условий на границе пограничного слоя в уравнениях для возмущений внешнего течения пренебрегается членами нелинейного взаимодействия, а также производными от амплитудных функций (ВКБ-приближение). Линеаризованные уравнения Навье — Стокса для однородного потока имеют постоянные коэффициенты, следовательно, существует восемь решений вида $\mathbf{Y}_{k\infty} \exp[i(\alpha x + \kappa_k y + \beta z - \omega t)]$. Собственные значения определяются соотношениями (см. [3])

$$\kappa_k^2 = -A_k U_c - \alpha^2 - \beta^2, \quad \text{Im } \kappa_k > 0, \quad (8)$$

$U_c = i\alpha$, $A_{1,2} = 1$, $A_{3,4} = g_4 \pm \sqrt{g_4^2 - \text{Pr}(g - g_1)g_3}$, $g_4 = [\text{Pr} + g_3(g - 4\text{Pr}g_1/3)]/2$, $g_3 = 1/(1 + 4g/3)$, $g = g_m U_c$, $g_1 = g_{m1} U_c$. Неравенство в (8) ограничивает число собственных векторов $\mathbf{Y}_{k\infty} = (v_k, \pi_k, u_k, w_k, h_k, \tau_{12k}, \tau_{23k}, q_k)$ четырьмя, которые соответствуют затухающим при $y \rightarrow \infty$ возмущениям и используются здесь, как и в теории устойчивости, для постановки условий на границе пограничного слоя

$$\mathbf{Z} = \sum_{k=1}^4 C_k(R) \mathbf{Y}_{k\infty} \quad \text{при } \eta = \eta_e. \quad (9)$$

Компоненты этих векторов рассчитываются по формулам $u_1 = w_2 = -\kappa_1$; $u_2 = w_1 = 0$; $v_1 = \alpha$; $v_2 = \beta$; $p_{1,2} = h_{1,2} = 0$; $h_{3,4} = 1$; $p_{3,4} = 1 - A_{3,4}/\text{Pr}$; $(u_{3,4}, v_{3,4}, w_{3,4}) = (\alpha, \kappa_{3,4}, \beta) i(g_{m1} - g_{m1} p_{3,4}) / A_{3,4}$; $\pi_k = p_k + 2[i\alpha u_k + i\beta w_k + 2(gp_k - g_1 h_k)/3]$; $\tau_{12k} = i\alpha v_k + i\kappa_k u_k$; $\tau_{23k} = i\beta v_k + i\kappa_k u_k$; $q_k = i\kappa_k h_k / \text{Pr} + \tau_{12k}$.

Решение задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений $\mathbf{Z}' = \mathbf{AZ} + \mathbf{BZ}_0 + \mathbf{N}$, получаемых в результате аппроксимации $\partial\mathbf{Z}/\partial R = (\mathbf{Z} - \mathbf{Z}_0)/\Delta R$ ($\Delta R = R - R_0$ — шаг маршевой схемы), представляется как суперпозиция $\mathbf{Z} = \mathbf{Z}_N + \sum_{k=1}^4 C_k \mathbf{Z}_k$ решения, удовлетворяющего условию $\mathbf{Z}_N = 0$ на границе пограничного слоя, и решений однородных уравнений $\mathbf{Z}'_k = \mathbf{AZ}_k$ с условиями $\mathbf{Z}_k = \mathbf{Y}_{k\infty}$ при $\eta = \eta_e$. Численное интегрирование осуществляется от внешней границы пограничного слоя до стенки с использованием ортогонализаций, коэффициенты C_k определяются условиями (6).

Значение α на каждом шаге по R вычисляется методом Ньютона при выполнении требования $\partial\tilde{m}/\partial R = 0$ в точке максимума амплитуды A возмущения массового расхода $\tilde{m} = \rho\tilde{u} + u\tilde{\rho}$. В начальном сечении пограничного слоя \mathbf{Z} рассчитывается для $\alpha = \alpha_3$ с помощью локальных уравнений, получаемых исключением из (7) всех производных по R .

Условие (9) используется также и для расчета линейных возмущений, вызванных шероховатостью, а для возмущений, инициированных звуком, в это условие добавляется вектор, соответствующий собственному значению $\kappa_3 = -\kappa_4$, нормированный на $p_5 M$. Следовательно, с учетом нормировки для возмущений, определяемых шероховатостью, параметры квадратичных возмущений оказываются отнесенными к $\tilde{y}_w p_5 M$, а их вещественные амплитуды — к $\delta_w p_5 M$. Здесь $\delta_w = |\tilde{y}_w|$ — амплитуда волны шероховатости, а $p_s = |p_s|$ и $p_s M$ соответствуют амплитудам пульсаций давления и скорости в падающей звуковой волне.

3. РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТОВ

Расчеты выполнены для теплоизолированной пластины для $M = 0,6 - 2$ и температуры торможения $T_0 = 310$ К. Используется формула вязкости Сатерленда с постоянной $T_s = 110,4$ К; $\text{Pr} = 0,71$. Рассматриваются звуковые волны с фронтом, параллельным кромке пластины $\beta_1 = 0$. Положительное значение угла θ_1 между фронтом и направлением потока отсчитывается по ходу часовой стрелки. Расчеты для $M \leq 1,4$ ограничиваются двумерным случаем $\beta_2 = 0$.

Представленные результаты основываются на расчетах зависимости наибольшего по сечению пограничного слоя значения амплитуды массового расхода $A = \max|\tilde{m}(\eta)| \cdot \exp\left[-\int \text{Im}(\alpha) d\xi\right]$ от R . Инкременты $I = 0,5 d \ln A / dR$, приведенные на рис. 1 для $M = 0,6$; $\omega = 0,56 \cdot 10^{-4}$; $\alpha_1 = -0,7 \cdot 10^{-4}$ и разных значений α_2 , рассчитаны до конца интервала неустойчивости пограничного слоя, определяемого кривой 5. В диапазоне $\alpha_2 = (2,17 - 2,45) \cdot 10^{-4}$ возмущения при достаточно больших R с большой точностью идентифицируются с волной Толлмина — Шлихтинга, что демонстрируется сопоставлением кривых 1–3 с кривой 5. За пределами этого диапазона расхождение становится заметным, а затем возмущения и вовсе становятся затухающими (кривая 4, соответствующая $\alpha_2 = 2,1 \cdot 10^{-4}$).

Независящий от R параметр возбужденной волны Толлмина — Шлихтинга $K = A/\bar{A}_{TS}$, где \bar{A}_{TS} — вычисляемая теорией устойчивости относительная (с начала роста) амплитуда, определяет восприимчивость пограничного слоя к внешним воздействиям. Параметры возмущения, представленного кривой 1 на рис. 1, соответствуют наибольшей восприимчивости ($K = 94,2$). В системе отсчета, связанной

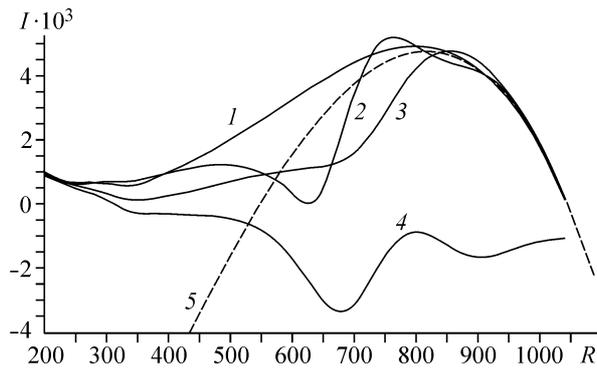


Рис. 1. Зависимость инкремента $I = 0,5 d \ln A/dR$ от R при $M = 0,6$; $\omega = 0,56 \cdot 10^{-4}$; $\beta_1 = \beta_2 = 0$. $\alpha_1 = -0,7 \cdot 10^{-4}$ ($\theta_1 = 67,8^\circ$); $\alpha_2 = 2,295 \cdot 10^{-4}$ (1), $2,45 \cdot 10^{-4}$ (2), $2,17 \cdot 10^{-4}$ (3), $2,1 \cdot 10^{-4}$ (4). Волна Толмина — Шлихтинга (5).

с потоком, положительным значениям θ_1 (в данном случае $\theta_1 = 67,8^\circ$) соответствуют положительные составляющие звукового волнового вектора в направлении движения пластины, т. е. догоняющие звуковые волны. Наибольшее значение K в диапазоне отрицательных углов соответствует $\theta_1 = -75,9^\circ$. Кривыми 1, 2 на рис. 2 представлены зависимости K от комбинационного волнового числа $\alpha_3 = \alpha_1 + \alpha_2$ для данных направлений распространения звука. Максимум в обоих случаях достигается при значениях α_3 , близких к волновому числу волны Толмина — Шлихтинга в начале интервала роста ее амплитуды $\alpha^* = 1,61 \cdot 10^{-4}$. Кривая 3 представляет данные работы [2] для $M = 0$. Сдвиг в сторону увеличения α_3 объясняется большим значением $\alpha^* = 1,73 \cdot 10^{-4}$. Если при $M = 0$ безразлично встречной или догоняющей является звуковая волна, то при $M = 0,6$ наибольшие коэффициенты восприимчивости для отрицательных и положительных углов θ_1 отличаются более чем в 2 раза.

Зависимость максимального по α_2 значения коэффициента восприимчивости от θ_1 представлена на рис. 3 кривыми 1 и 2 для $M = 0,6$ и $1,4$ соответственно. Промежутки между отрезками кривых соответствуют слишком малым или большим волновым числам внешних возмущений, когда параболизированные уравнения неприменимы. При сверхзвуковом обтекании звуковые волны с углом распространения, равным углу Маха $\theta_1 = \theta_M = \arcsin(1/M)$, стационарны относительно пластины $\omega = 0$,

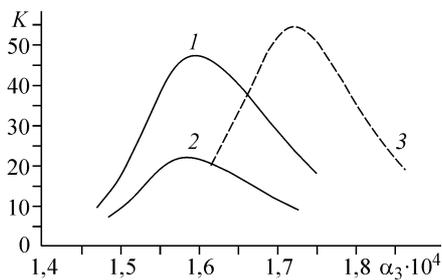


Рис. 2. Зависимость коэффициента восприимчивости K от комбинационного волнового числа $\alpha_3 = \alpha_1 + \alpha_2$ при $\omega = 0,56 \cdot 10^{-4}$; $\beta_1 = \beta_2 = 0$.

$M = 0,6$ (1, 2), $\alpha_1 = -0,7 \cdot 10^{-4}$ ($\theta_1 = 67,8^\circ$) (1), $0,206 \cdot 10^{-4}$ ($\theta_1 = -75,9^\circ$) (2), данные [2] для $M = 0$ (3).

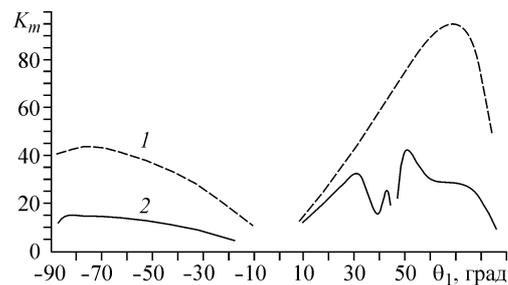


Рис. 3. Зависимость восприимчивости $K_m = \max K(\alpha_2)$ от угла между фронтом звуковой волны и направлением потока θ_1 при $\beta_1 = \beta_2 = 0$.

$M = 0,6$ (1), $1,4$ (2); $\omega = 0,56 \cdot 10^{-4}$ (1), 10^{-5} (2).

Рис. 4. Связь волнового числа α_1 с углом между фронтом звуковой волны и направлением потока θ_1 при $\beta_1 = \beta_2 = 0$.

$M = 0,6$ (1), $1,4$ (2); $\omega = 0,56 \cdot 10^{-4}$ (1), 10^{-5} (2).

следовательно, возмущений заданной частоты возбуждать не могут. В данном случае $\theta_M = 45,6^\circ$, с приближением θ_1 к этому значению восприимчивость уменьшается.

На рис. 4, где изображены функции $\alpha_1(\theta_1)$, видно, что если при $M = 0,6$ волновое число меняется в пределах $\omega M / (M \pm 1)$, соответствующих углам $\theta_1 = \mp 90^\circ$, то в случае $M = 1,4$ оно растет по модулю при $\theta_1 \rightarrow \theta_M$ (теоретически неограниченно). Следовательно, учитывая, что в связанной с потоком системе отсчета частота $\Omega_1 = |\omega_1 - \alpha_1|$, волны неустойчивости при сверхзвуковых скоростях могут возбуждаться высокочастотными звуковыми волнами $\Omega_1 \gg \omega$ во взаимодействии с коротковолновой шероховатостью $|\alpha_2| \equiv |\alpha_1 - \alpha^*| \gg \alpha^*$. Таким частотам соответствует второй пик кривой 2 рис. 3 при $\theta_1 > 0$.

Результаты для косых волн шероховатости $\beta_2 = 4 \cdot 10^{-5}$ и $2 \cdot 10^{-5}$, представленные кривыми 1, 2 на рис. 5, получены при $M = 2$; $\omega = 10^{-5}$. Волны взаимодействия внешних возмущений практически не отличаются от волн Толлмина — Шлихтинга,

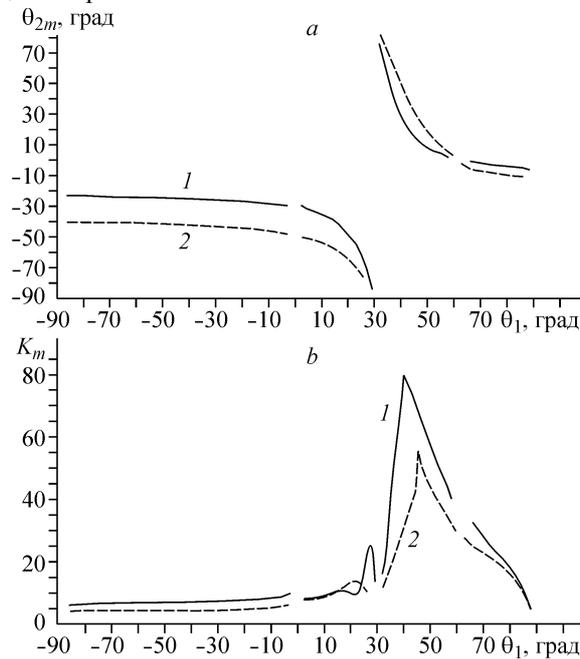


Рис. 5. Углы наибольшей восприимчивости θ_{2m} между фронтом волны шероховатости и направлением потока (а) и соответствующие коэффициенты восприимчивости K_m (б) в зависимости от угла между фронтом звуковой волны и направлением потока θ_1 при $M = 2$; $\beta_1 = 0$; $\omega = 10^{-5}$.

$\beta = \beta_2 = 0,4 \cdot 10^{-4}$ (1), $0,2 \cdot 10^{-4}$ (2).

начиная с $R \approx 2000$, и распространяются под углами, соответственно, 62 и 43° к направлению потока. Значение θ_{2m} (рис. 5, *a*) угла между фронтом волны шероховатости и направлением потока θ_2 соответствует при фиксированном значении θ_1 максимуму восприимчивости $K_m = \max K(\theta_2)$.

Сопоставление рис. 5, *a* и *b* показывает, что наибольшая восприимчивость достигается при угле наклона волны шероховатости, равному углу Маха $\theta_{2m} = \theta_M$ (здесь $\theta_M = 30^\circ$).

Решение, как и в двумерном случае, отсутствует при $\theta_1 = \theta_M$, причем $\theta_{2m} \rightarrow 90^\circ$ при $\theta_1 \rightarrow \theta_M$, а для фронта волны шероховатости, параллельного кромке пластины, также не должно существовать решения вида косой волны.

Итак, результаты расчетов показывают, что уже при достаточно больших дозвуковых скоростях обтекания восприимчивость пограничного слоя существенно зависит от направления распространения звука. При $M > 1$ волна Толлмина — Шлихтинга может возбуждаться возмущениями с длинами волн, много меньшими собственной. Другой особенностью сверхзвукового обтекания является то, что наибольшая восприимчивость соответствует углу между фронтом волны шероховатости и направлением потока, равному углу Маха.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Kachanov Y.S.** Three-dimensional receptivity of boundary layers // *Eur. J. Mech. B. — Fluids.* — 2000. — No. 19. — P. 723–744.
2. **Crouch J.D.** Theoretical studies on the receptivity of boundary layers // *AIAA Paper No. 94-2224. 25th AIAA Fluid Dynamic Conf., June 20–23, 1994 / Colorado Springs, CO.* — P. 1–16.
3. **Петров Г.В.** Порождение волны Толлмина — Шлихтинга в сверхзвуковом пограничном слое двумя синусоидальными акустическими волнами // *ПМТФ.* — 2002. — Т. 43, № 1. — С. 76–82.
4. **Петров Г.В.** Реакция сверхзвукового пограничного слоя на акустическое воздействие // *Теплофизика и аэромеханика.* — 2001. — Т. 8, № 1. — С. 77–86.

Статья поступила в редакцию 10 октября 2004 г.