

УДК 532.5+532.526

## **ВИЗУАЛИЗАЦИЯ ПОТОКА, ОБТЕКАЮЩЕГО СФЕРУ, ПРИ ЧИСЛАХ РЕЙНОЛЬДСА В ИНТЕРВАЛЕ ОТ 22 000 ДО 400 000**

**В. БАКИЧ<sup>1</sup>, М. ПЕРИЧ<sup>2</sup>**

<sup>1</sup>*Институт атомных наук “Винча”, Белград, Сербия и Черногория*

<sup>2</sup>*Вычислительная аэродинамика, Нюрнберг, Германия*

Проведены эксперименты по визуализации сложных течений в аэродинамической трубе и водяном канале. Определялись и исследовались структуры следа, отрыва и ламинарно-турбулентного перехода в оторвавшемся пограничном слое за обтекаемой сферой при числах Рейнольдса в интервале от 22 000 до 400 000.

### **ВВЕДЕНИЕ**

Проблема визуализации потока в гидромеханике представляет большой интерес, особенно визуализация сложных течений, используемая для проверки существующих теорий. Большинство объектов, имеющих практический интерес, относятся к классу затупленных тел. Сфера является типичным примером затупленного тела без острых краев, к которым обычно привязаны отрывные течения, и это напоминает ситуацию с течениями вокруг летательных аппаратов различного типа. В настоящей работе выполнены исследования по визуализации течения вокруг сферы при числах Рейнольдса в интервале от 22 000 до 400 000.

Основной характеристикой обтекания сферы является существование турбулентного следа с возвратным течением — главным фактором, определяющим силу сопротивления и подъемную силу для сферы. Протяженность этой области зависит от ориентации, формы и размера тела, скорости и вязкости среды, на нее также могут оказывать существенное воздействие различные небольшие возмущения потока, появляющиеся в силу разных причин.

Обтекание сферы, особенно при низких числах Рейнольдса, исследовалось во многих экспериментах. Структура течения в следе за сферой определяется числом Рейнольдса. В работе [1] спутная струя за сферой при  $5 < Re < 300$  исследовалась методом визуализации при помощи красителя. Было показано, что при числах Рейнольдса ниже 20 все течение является ламинарным и отрывное течение не наблюдается. Согласно экспериментальным результатам, отрыв от задней части сферы происходит при  $Re \approx 24$ , он приводит к генерации осесимметричного вихревого кольца. Такое устойчивое вихревое кольцо наблюдается при числах Рейнольдса в интервале от 20 до 400 [1, 2]. В экспериментах [3, 4] были получены те же кольцевые вихревые структуры, которые отмечены в [1]; но они сохраняли устойчивость и осесимметричность только до  $Re = 210$ . При этом числе Рейнольдса совершается переход от одиночной спутной струи к двойной. В интервале  $210 < Re < 270$  наблюдается устойчивая и несимметричная спутная струя (двойной спутный след).

При  $Re = 270$  наблюдаемая двойная спутная струя становится неустойчивой, и со сферы начинают сходиться вихревые кольца в форме так называемых шпилькообразных вихрей, которые образуют ламинарный след. Когда число Рейнольдса возрастает до 800, вихревые петли быстро рассеиваются и спутный поток становится турбулентным [5].

Первый эксперимент по визуализации обтекания сферы при больших числах Рейнольдса был проведен в 1914 г. в работе [6]. Это было продолжением опытов [7], которые показывали, что переход к турбулентности в пограничном слое существенно уменьшает ширину спутной струи. В работе [8] была получена более подробная картина обтекания сферы. Обнаружилось, что при числах Рейнольдса больше 1 500 с обтекаемого тела сходят кольцевые вихри с осями, параллельными направлению набегающего потока. Такая картина течения хорошо видна при числах Рейнольдса свыше 2 000. В [9] проанализировано влияние положения державки и интенсивности турбулентности в основном потоке на структуру течения вблизи поверхности сферы. При этом использовался метод масляной пленки для визуализации течения. Было показано, что при низкой степени турбулентности отрыв потока происходит при угле  $\alpha_s = 81^\circ$ , отсчитываемом от передней точки торможения, при докритическом основном и сверхкритическом потоках точка отрыва находится при угле  $\alpha_s = 102^\circ$ . Та же техника визуализации была применена в работе [10]. Было показано, что отрыв пограничного слоя происходит при  $\alpha_s = 80^\circ$  для  $Re = 23000$ , и зона отрыва остается почти неизменной в интервале  $10^4 < Re < 3,5 \cdot 10^5$ . Когда число Рейнольдса повышается до 350 000, то положение точки ламинарного отрыва смещается от  $91^\circ$  до  $110^\circ$ , а точки присоединения — с  $107^\circ$  до  $127^\circ$ ; точка турбулентного отрыва смещается с  $123^\circ$  до  $147^\circ$ . Надежно установлено существование критического числа Рейнольдса, при котором аэродинамическое сопротивление начинает резко уменьшаться (“кризис сопротивления”), при этом имеется затянутый отрыв и размер спутной струи также сокращается. Однако значение такого критического числа  $Re$  изменяется между 250 000 и 350 000 в зависимости от эксперимента. Также было выяснено, что более ранний переход в пограничном слое от ламинарного к турбулентному потоку (к примеру, из-за шероховатости поверхности или турбулизатора) приводит к более позднему отрыву и уменьшению сопротивления даже при более низких числах Рейнольдса — начиная с 15 000.

На тему схода вихрей со сферы было опубликовано много работ [2, 5, 8, 10, 11]. И хотя результаты для различных экспериментов весьма отличаются, все исследования подтвердили существование двух критических чисел Струхала — нижнего и верхнего. Авторы в [11] пытались объяснить эти два режима по числу Струхала мелкомасштабной нестабильностью отрыва сдвигового слоя и крупномасштабной нестабильностью в следе.

Настоящее исследование направлено на определение характеристик переходного процесса для оторвавшегося пограничного слоя и структуры спутной струи за сферой при числах Рейнольдса от 22 000 до 400 000 с применением методов визуализации течения.

## 1. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ УСТАНОВКА И МЕТОДЫ

Эксперименты по визуализации потока были выполнены в аэродинамической трубе и водяном канале. Аэродинамическая труба может работать в двух режимах: замкнутый контур или режим с открытым выходом за крыльчаткой и со входом через отстойную камеру. В наших экспериментах труба работала в режиме разомкнутого контура. Размеры выпускного отверстия составляли  $1,75 \times 1,05$  м.

За рабочим участком установлен участок сужения с параметром 10:1 с тремя сетками подавления турбулентности (перед сужением), общая протяженность участка сужения была 5,5 м. Скорость потока  $U_0$  в аэродинамической трубе изменялась в интервале 2 – 38 м/с. Уровень турбулентности в основном потоке был 0,89 %. Сфера диаметром  $D = 0,165$  м устанавливалась на державке (сзади) длиной  $5 D$  и диаметром  $d = 0,12 D$ .

Размер поперечного сечения водяного канала, использовавшегося в другой серии экспериментов по визуализации, составлял  $2,1 \times 1,1$  м. Сфера такого же диаметра прицеплялась к буксировочной лебедке и крепилась сзади на ту же державку, что и сфера в аэродинамической трубе. Коэффициент загроможденности составлял 1,15 % для аэродинамической трубы и 0,8 % для водяного канала. Лебедка была спроектирована так, чтобы минимизировать вибрации при буксировке. Объект вначале ускорялся, и после прохождения нескольких метров им достигалась окончательная постоянная скорость буксировки. Интервал скоростей для лебедки составлял от  $U_0 = 0,03 - 2,3$  м/с. Число Рейнольдса, рассчитанное по диаметру сферы и скорости потока воздуха в аэродинамической трубе (скорости буксировки в водяном канале), изменялось от  $2,2 \cdot 10^4$  до  $4 \cdot 10^5$  (в аэродинамической трубе) и от  $5 \cdot 10^3$  до  $4 \cdot 10^5$  (в водяном канале).

Визуализация потока в аэродинамической трубе проводилась через выпуск дыма в зону отрыва через отверстия в державке. Частицы дыма освещались световым ножом, полученным от когерентного лазерного луча и цилиндрических линз. В качестве источника света был взят 10-ваттный ионный аргоновый лазер, работающий в многополосном режиме, и при этом частицы дыма видны в ярко-зеленом цвете.

Что касается водяного канала, то в пограничный слой вводился краситель через отверстия диаметром  $d_h = 0,8$  мм в двух местах — при углах  $45^\circ$  и  $135^\circ$ , измеренных от положения передней точки торможения. Изображения следов дыма и красителя регистрировались высокоскоростной цифровой камерой MotionBlitz (500 кадров в секунду) с разрешением  $256 \times 228$  пикселей. В реальном эксперименте можно записать до 2964 кадра (6 секунд реального времени). Цифровые изображения (bitmap-формат) обрабатывались, чтобы получить картину анимации в других форматах (avi, mpg, и др.). Были получены цветные цифровые фотографии с разрешением  $1024 \times 768$  пикселей, а также были сняты цветные VHS фильмы со скоростью съемки 50 кадров в секунду.

## 2. ВИЗУАЛИЗАЦИЯ ПОТОКА В АЭРОДИНАМИЧЕСКОЙ ТРУБЕ

Частицы дыма освещались лазерным световым ножом, который можно было ориентировать в плоскостях  $(x, y)$ ,  $(x, z)$  или  $(y, z)$ , где  $x$  — направление потока.

Визуализация потока, обтекающего сферу в плоскости  $(x, y)$ , показана на рис. 1 для чисел Рейнольдса в интервале от 22 000 до 50 000. Наблюдаемая зона возвратного течения в хвостовой части сферы довольно обширна, и спутная струя совершает волновые поступательные движения. При низких числах Рейнольдса

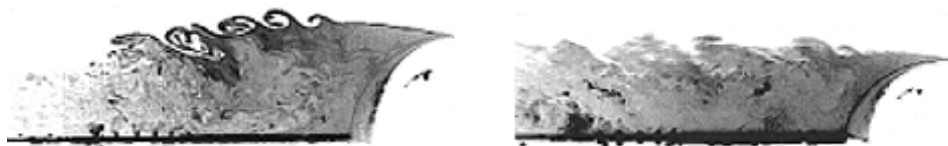


Рис. 1. Визуализация обтекания сферы с использованием дыма в аэродинамической трубе при  $Re = 22\ 000$  (слева) и  $50\ 000$  (справа).

явно видны крупные когерентные структуры. При  $Re > 175\ 000$  в водяном канале можно наблюдать процессы свертки и спаривания вихревых структур. При больших числах Рейнольдса турбулентные структуры в слое смешения становятся настолько мелкими, что для наблюдения этих процессов разрешения имеющейся цифровой камеры было не достаточно.

Для определения трехмерной структуры волнообразной спутной струи световой нож был расположен в плоскости, нормальной к направлению потока ( $y, z$ ), на расстоянии  $5,5 D$  позади обтекаемой сферы. На рис. 2 показаны изменения в картине вихревого течения за один характерный временной интервал  $D/U_0 = 82,5$  мс, при  $D = 0,165$  м и  $U_0 = 2$  м/с, что дает число  $Re = 22\ 000$ . В [2] из анализа данных анемометрии обнаружено, что точки отрыва вихря вращаются по сфере при числах Рейнольдса выше  $6\ 000$ . Это свидетельствует о конфигурации следа в виде одиночной спирали.

Существование системы спирального вихря не соответствует теореме Томпсона о циркуляции. Эта теорема утверждает, что если набегающий поток не имеет завихренности, то полный поток завихренности через плоскости по нормали к оси следа должен равняться нулю. Поэтому в [12] предложили сложную двойную спираль, которая закручена в противоположном направлении. Однако, как следует из рис. 2 и соответствующего фильма, нельзя заметить никакой регулярности во вращении вихрей, а также для  $Re = 50\ 000$  [13]. След за сферой не совсем заполнен дымом, поскольку его вводили через отверстия в верхней и нижней части державки. Видимый дым в сечении спутной струи (см. рис. 2) меняет свою форму и движется влево-вправо, вверх-вниз. Но по 6-секундной записи этого движения нельзя предположить какую-то закономерность для наблюдаемого потока. Это заключение об отсутствии системы в расположении и вращении вихрей в плоскости по нормали к оси следа согласуется с результатами, изложенными в [5, 10, 11].

При росте числа Рейнольдса с докритического уровня  $22\ 000$  до критического —  $350\ 000$ , точка отрыва пограничного слоя сдвигается с угла  $82^\circ$  до угла  $132^\circ$ . Вместе с тем, точка ламинарно-турбулентного перехода смещается к сфере, и частота сноса вихрей возрастает. Когда с ростом числа Рейнольдса точка перехода приближается к поверхности сферы, это вызывает турбулизацию пограничного слоя вверх по потоку; таким образом, ламинарный отрыв часто сопровождается турбулентным присоединением на небольшом расстоянии, и турбулентный пограничный слой остается на время присоединенным, пока не произойдет отрыв далее по потоку. Поэтому области рециркуляции в ближнем следе резко сокращаются, и волновые движения в таком следе исчезают. При числах Рейнольдса, превышающих  $400\ 000$ , становится видимым исчезновение поступательного волнового движения в следе за сферой. Как видно на рис. 3, переход к турбулентному потоку в пограничном слое резко уменьшает размер следа.

### 3. ВИЗУАЛИЗАЦИЯ ПОТОКА В ВОДЯНОМ КАНАЛЕ

Характеристики отрыва пограничного слоя и ламинарно-турбулентного перехода также изучались в водяном канале при числах Рейнольдса от  $5\ 000$  до  $380\ 000$ . Пограничный слой был подкрашен красителем. Благодаря разнице в кинематической вязкости, такие же числа Рейнольдса достигаются при меньшей скорости потока по сравнению с потоком воздуха в аэродинамической трубе, и поэтому эксперименты с камерой в  $500$  кадров в секунду дают более хорошее временное разрешение.

Эффекты отрыва, ламинарно-турбулентного перехода и роста отрывного сдвигового слоя зависят от многих факторов, и это изучалось во многих экспериментальных и теоретических работах. На рис. 4 показаны эти процессы при различных

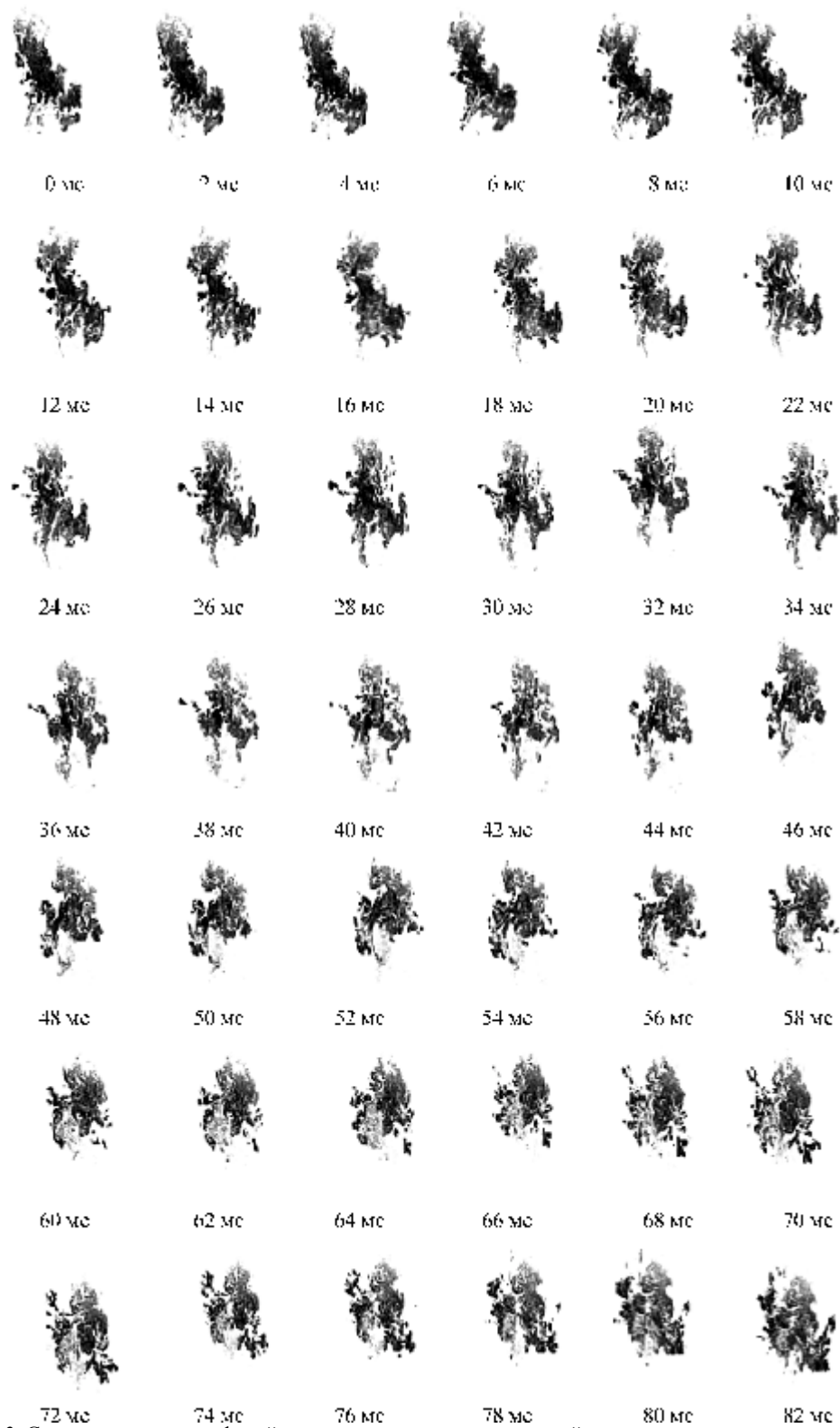
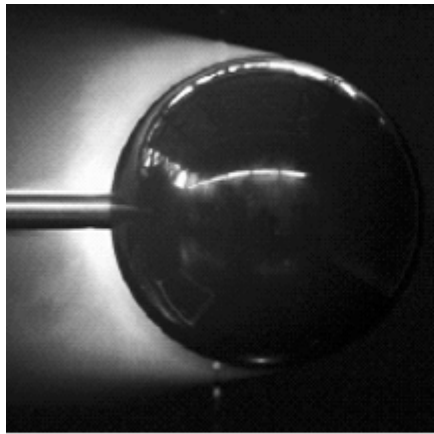
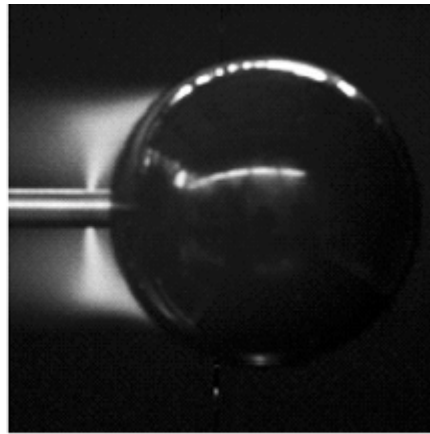


Рис. 2. Структура следа за сферой в плоскости, перпендикулярной оси течения, на расстоянии  $5,5 D$  за сферой при  $Re = 22\ 000$ .



$Re = 50\,000$



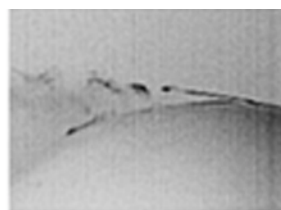
$Re = 400\,000$

Рис. 3. Визуализация обтекания сферы при долгой экспозиции для  $Re = 50\,000$  и  $400\,000$ .

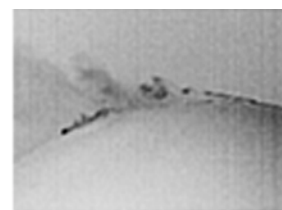
числах Рейнольдса. Сдвиговый слой, который формируется после отрыва пограничного слоя, подвержен неустойчивости Кельвина — Гельмгольца, которая вызывает сворачивание вихревых колец через почти одинаковые временные интервалы. Как оказалось, для всех случаев ламинарного отрыва два первых вихревых кольца являются ламинарными; третье кольцо — турбулентное, и далее по течению уже нельзя найти какую-либо регулярную структуру. Из фотографий и соответствующего фильма очевидно, что при росте числа Рейнольдса турбулентные структуры в слое смещения становятся мельче и переход в отрывном сдвиговом слое происходит ближе к точке отрыва. Для  $Re = 250\,000$  снятый фильм показал, что возле точки отрыва пограничный слой не совсем ламинарный. Случаются временные интервалы, когда пограничный слой турбулентен и отрыв происходит позднее. При критическом числе Рейнольдса около  $300\,000$ , переход от ламинарного к турбулентному пограничному слою происходит до отрыва и турбулентный пограничный слой отрывается намного позже, при угле близком к  $135^\circ$ . Похоже, что в турбулентном слое свернутые вихри начинают взаимодействовать со стеной



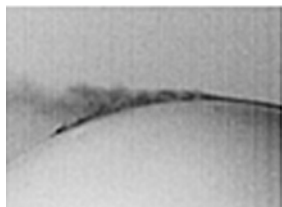
$Re = 50,00$



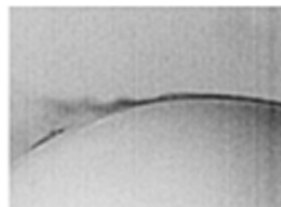
$Re = 100,00$



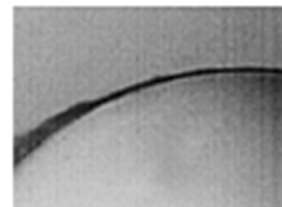
$Re = 150,00$



$Re = 200,00$



$Re = 250,00$



$Re = 300,00$

Рис. 4. Отрыв и переход пограничного слоя на сфере при различных числах Рейнольдса.

при достаточно больших числах Рейнольдса, так что переход происходит близко к точке отрыва. Такое можно наблюдать, начиная с  $Re = 200\,000$  и выше, что заставляет уже сошедший пограничный слой присоединиться и снова претерпеть отрыв далее по течению. Такое присоединение и последующий отрыв происходят при  $Re = 250\,000$  (см. рис. 4).

На рис. 5 видно, что кроме скрутки вихрей, в свободном сдвиговом слое вокруг сферы происходит также спаривание вихрей. Процесс скрутки включает в себя сворачивание, прокат и распад сплошной вихревой пелены на отдельные вихри; спаривание означает последовательное слияние этих вихрей в более крупные вихревые структуры. Если эксперимент выполнен точно и аккуратно, то можно получить ситуацию, когда более чем два вихря объединяются с образованием более крупных вихрей [14]. Процесс свертки сдвигового слоя происходит в положении, в котором фундаментальная частота (частота естественной неустойчивости) сохраняет максимальную амплитуду и затем происходит генерация субгармонической частоты, как описано в [15]. Наблюдаемые в этой работе процессы свертки и спаривания вихрей напоминают процессы в слоях смешения.

Процесс последовательного слияния пары соседних вихрей, подкрашенных красителем, виден на рис. 5. В процессе спаривания завихренность постоянно перераспределяется во все более крупные и крупные вихри, для которых длина волны и размер удваиваются после каждого взаимодействия. В работе [16] показано, что слияние вихрей на самом деле является первичным процессом, определяющим увеличение толщины слоя смешения вниз по потоку. Вместе с тем, одни только субгармоники не могут объяснить сложную природу развития сдвигового слоя. Согласно [17], место спаривания вихрей совпадает с местом, где амплитуда осциллирующей субгармоники достигает максимума. Частота естественной неустойчивости для сдвигового слоя при различных числах Рейнольдса получается из проведенных экспериментов через подсчет сходящих со сферы вихрей в интервал времени с помощью высокоскоростной цифровой видеокамеры. Эти результаты, вместе с результатами других исследований, отображены на рис. 6. На нем показана зависимость нижней и верхней мод числа Струхала от числа Рейнольдса —  $Sh = fD/U_0$ , где  $f$  — частота,  $D$  — диаметр сферы, и  $U_0$  — скорость набегающего потока.

Экспериментальное исследование частот в следе за обтекаемой сферой [11], полученных из спектра флуктуаций скорости методом термоанемометрии в невоз-

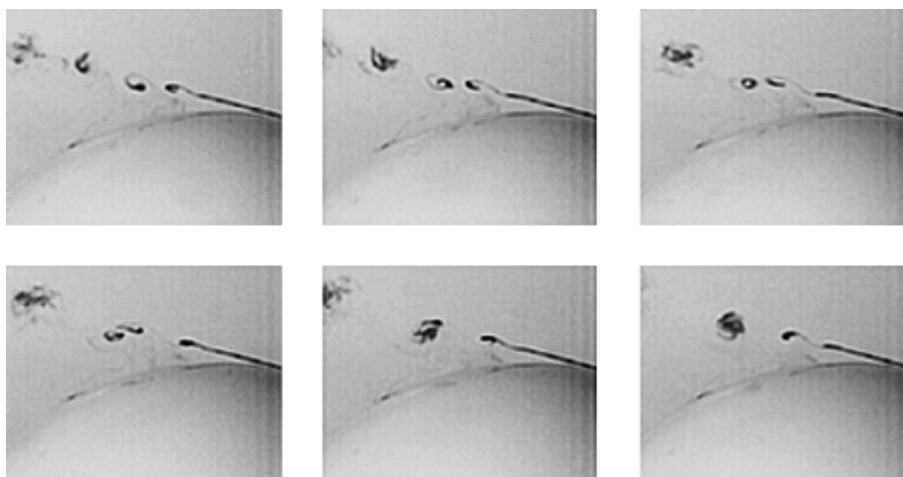


Рис. 5. Процесс спаривания вихрей при  $Re = 50\,000$ .

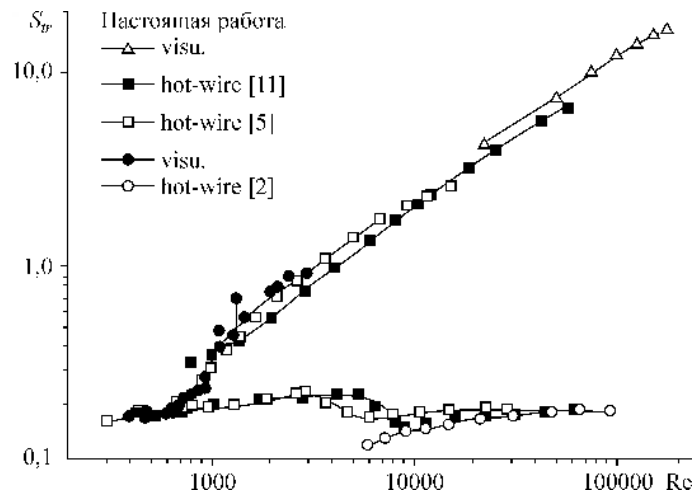


Рис. 6. Распределение верхнего и нижнего чисел Струхала в зависимости от чисел Рейнольдса.

бужденном потоке, показало присутствие нескольких доминирующих частот — низкой и высокой, а также субгармоник более высокой частоты. Более высокая частота (верхняя мода по числу Струхала) наблюдается только в следе непосредственно за сферой, низкая частота (нижняя мода по числу Струхала) — в гораздо большем пространстве. Субгармоники от более высокой частоты получались в этих экспериментах от спаривания вихрей, что отражено в результатах визуализации потока.

Данные, полученные в [11], не дают единой степенной зависимости частоты неустойчивости Кельвина — Гельмгольца для сдвигового слоя  $f_{KH}$  от числа Рейнольдса: для интервала  $10^3 < Re < 10^4$  частота аппроксимируется законом  $Re^{0,75}$ , а при более высоких числах Рейнольдса этот показатель близок к 0,66. Результаты наших экспериментов для чисел Рейнольдса  $Re > 22\,000$  дают степенной закон:

$$Sh = 0,0039 Re^{0,695}.$$

Этот результат хорошо согласуется с формулой для частоты Кельвина — Гельмгольца (сдвиговый слой) для обтекания кругового цилиндра, полученной в [18]. Эта частота обычно нормализуется на частоту схода вихрей или частоту Кармана  $f_K$  для крупных вихрей в следе. Было обнаружено, что эта частота описывается для  $Re < 10^5$  степенным законом:

$$f_{KH}/f_K = 0,0235 Re^{0,7},$$

где показатель и константа находятся из анализа экспериментальных данных. В [17] анализ данных дает более высокую степень для  $Re > 10^5$ :

$$f_{KH}/f_K \approx Re^{0,7}.$$

Согласно нашим экспериментам по визуализации потока и экспериментам в [11], можно прийти к выводу, что измеренная большая частота (верхняя мода по числу Струхала) соответствует частоте неустойчивости для сдвигового слоя. Однако визуализация потока не обнаружила свидетельств дискретных вихрей, сходящих со сферы. По этой причине можно согласиться с выводами в [11], что измеренная



нижняя частота (нижняя мода по числу Струхаля) соответствует крупномасштабной (синусоидальной) неустойчивости в следе за обтекаемой сферой.

### ВЫВОДЫ

Эксперименты по визуализации были проведены в аэродинамической трубе и водяном канале для определения структуры следа, отрыва и ламинарно-турбулентного перехода в оторвавшемся пограничном слое за обтекаемой сферой. Интервал числа Рейнольдса для потока составлял от 22 000 до 400 000 для аэродинамической трубы и от 50 000 до 300 000 для водяного канала. Визуализация потока осуществлялась с помощью задымления и методом введения красителя.

Результаты визуализации показали, что структура следа за обтекаемой сферой и геометрия вихря оказались более сложными, чем простые одиночные спиральные или двойные спиральные вихревые структуры, которые описывались в более ранних публикациях. Фильмы и фотографии обнаруживают явления свертки отрывных сдвиговых слоев и спаривания вихрей — это показывает, что кроме частоты естественной неустойчивости, которая определяет верхнее число Струхаля, существует также субгармоника этой частоты. Это согласуется с экспериментальными наблюдениями частот в следе за обтекаемой сферой в [11], основанными на спектре флуктуаций скоростей (данные термоанемометрии). Визуализация обтекания сферы показала, что схода вихрей, подобного тому, что наблюдается для обтекания цилиндра, не происходит. Однако это не означает, что схода вихрей не происходит вообще. На этот вопрос должна ответить PIV-методика. С ростом числа Рейнольдса турбулентные структуры в слое смещения становятся мельче и переход в отрывном сдвиговом слое приближается к точке отрыва. Следовая зона возвратного течения резко сокращается при критическом числе Рейнольдса, и в следе за сферой пропадает волнообразное течение для чисел Рейнольдса в сверхкритическом интервале.

Авторы признательны профессору Питеру Брэдшоу за ценные советы в проведении работы и мистеру Диту Брикману за помощь в проведении экспериментов. Эксперименты выполнены в Техническом университете, Гамбург — Гарбург, Германия.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Taneda S.** Experimental investigation of the wake behind sphere at low Reynolds number // *J. of Phys. Soc. Jap.* — 1956. — Vol. 11. — P. 1104–1108.
2. **Achenbach E.** Vortex shedding from spheres // *J. of Fluid Mech.* — 1974. — Vol. 12. — P. 209–221.
3. **Magarvey R.H., Bishop L.R.** Transition ranges for three-dimensional wakes // *Canad. J. of Phys.* — 1961. — Vol. 39. — P. 1418–1422.
4. **Nakamura I.** Steady wake behind a sphere // *Phys. of Fluids.* — 1968. — Vol. 19. — P. 5–8.
5. **Sakamoto H., Haniu H.** A study of vortex shedding from a sphere in a uniform flow // *J. of Fluid Engng.* — 1990. — Vol. 112. — P. 386–392.
6. **Wieselberger C.** Der Luftwiderstand von Kugeln // *Zeitschrift fur Mechanics.* — 1914. — Vol. 5. — P. 140–144.
7. **Prandtl L.** Der Luftwiderstand von Kugeln // *Gottingen Nachrichten fur Mathematics und Physics.* — 1914. — P. 177–199.
8. **Moller W.** Experimentelle Untersuchung zur Hydrodynamik der Kugel // *Physik Zeitschrift.* — 1938. — Vol. 39. — P. 57–80.
9. **Raithby G.D., Eckert E.R.G.** The effect of support position and turbulence intensity on the flow near the surface of a sphere // *Warme und Stoff.* — 1968. — Vol. 1. — P. 87–94.
10. **Taneda S.** Visual observations of the flow past a sphere at Reynolds numbers between  $10^4$  and  $10^6$  // *J. of Fluid Mech.* — 1978. — Vol. 85. — P. 187–192.
11. **Kim J.H., Durbin P.A.** Observations of the frequency in a sphere wake and of drag increase by acoustic excitation // *Phys. of Fluids.* — 1988. — Vol. 31. — P. 3260–3264.

12. **Pao H.P., Kao T.W.** Vortex structure in the wake of a sphere // *Phys. of Fluids*. — 1977. — Vol. 20 — P. 187–191.
13. **Bakic V.** Experimental investigation of turbulent flows around a sphere, Ph.D. Thesis, Technical University Hamburg — Harburg, Germany, 2003.
14. **Ferziger J.H.** Direct and large eddy simulation of turbulence // *Lecture note: Understanding, Modelling and Simulation of Turbulence*, Hamburg, 1999.
15. **Ho C.M., Huerre P.** Perturbed free shear layers // *Annual Rev. of Fluid Mech.* — 1984. — Vol. 16. — P. 365–424.
16. **Winant C.D., Browand F.K.** Vortex pairing, the mechanism of turbulent mixing-layer growth at moderate Reynolds numbers // *J. of Fluid Mech.* — 1974. — Vol. 63. — P. 237–255.
17. **Ho C.M., Huang L.S.** Subharmonics and vortex merging in mixing layers // *J. of Fluid Mech.* — 1982. — Vol. 119. — P. 443–473.
18. **Prasad A., Williamson H.K.** The instability of the shear layer separating from a bluff body // *J. of Fluid Mech.* — 1997. — Vol. 333. — P. 375–402.

*Статья поступила в редакцию 30 ноября 2004 г.*