

УДК 536.423

## **КРИТЕРИЙ РОСТА МАЛЫХ СУХИХ ПЯТЕН В СТЕКАЮЩИХ ПЛЕНКАХ ЖИДКОСТИ**

**Л.И. МАЛЬЦЕВ, Д.С. ЗАВАРЗИН**

*Институт теплофизики им. С.С. Кутателадзе СО РАН, Новосибирск*

В тонких пленках жидкости, стекающей по наклонной поверхности, случайно (или неслучайно) появившиеся малые сухие пятна в зависимости от размеров пятна и параметров пленки жидкости в одних случаях закрываются и исчезают, в других — разрастаются в крупномасштабные сухие пятна. На основе учета силы тяжести, инерционных сил пленки и поверхностного натяжения, действующих на элементы валика, окружающего сухое пятно, сформулирован критерий, позволяющий ответить на вопрос: закроется данное сухое пятно или нет. Критерий содержит в качестве определяющих параметров числа Бонда и Рейнольдса и краевой угол смачивания. Он является обобщением известного критерия Хартли–Мургатройда, который позволяет определить зону метастабильности стекающей пленки, т. е. найти критическую толщину пленки, при значениях ниже которой в пленке возможны устойчивые сухие пятна. Показано, что критические значения параметров начального сухого пятна зависят также от формы и размеров валика, окружающего пятно.

### **ВВЕДЕНИЕ**

Тонкие жидкие пленки, стекающие по твердым стенкам под действием сил тяжести или при их обдуве потоком пара или газа, используются во многих технологиях (в теплообменниках, в дистилляционных и абсорбционных башнях, при нанесении на твердые поверхности всевозможных покрытий и т. д.) и вызывают интерес исследователей с давних пор и по настоящее время [1–4]. При этом большое внимание уделяется вопросу о разрывах в пленках и появлении так называемых “сухих пятен”. Сухие пятна возникают в пленках чаще всего при неравномерном нагреве подложки, но нередко появляются они и в изотермических пленках, например, при уменьшении толщины пленки ниже некоторого критического значения. Интерес к пятнам обусловлен тем, что их появление может привести к резкому падению эффективности технологических процессов или даже появлению кризисных ситуаций.

В исследовании условий возникновения устойчивых сухих пятен существуют два подхода, которые восходят к работе [5]. В этой работе был рассмотрен вопрос о сухих пятнах применительно к изотермическим пленкам и сформулированы два критерия для определения критического расхода жидкости в пленке. Первый критерий основан на балансе между поверхностным натяжением и силами инерции пленки в окрестности точки остановки в апексе сухого пятна. (Отметим, что при вычислении инерционных сил авторами [5] была допущена ошибка, которая позднее была исправлена в статье [6]). Этот критерий получил название Хартли–Мургатройда и широкое признание. В работе [7] он был распространен на пленки, обдуваемые потоком газа. В работах [8–10] критерий был использован для анализа пленочных течений с термическими эффектами.

В рамках другого подхода в исследовании течений с сухими пятнами критическая толщина стекающей пленки находится из условия минимума некоторой характеристической функции, в качестве которой принимается потенциал пленки, равный сумме ее поверхностной и кинетической энергий [5, 11–14].

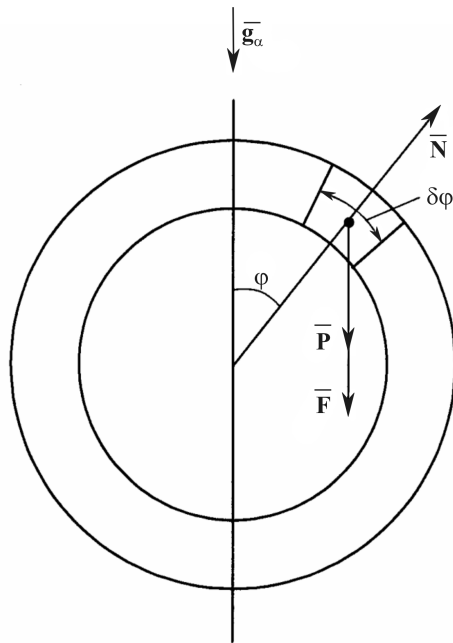
Во всех вышеназванных работах (как по первому, так и по второму направлению исследований) определяются области существования метастабильных режимов пленочных течений, а именно: устанавливаются критические значения расходов жидкости в пленке, при значениях меньше которых в пленке возможно появление сухого пятна.

В то же время из опыта известно, что не всякое возмущение (дырка в пленке) даже при расходах жидкости, меньших критического значения, разрастается в устойчивое сухое пятно. Однако существующие критерии не позволяют определить какое сухое пятно в пленке разовьется в большое пятно, а какое — закроется. Обусловлено это тем, что при выводе вышеназванных критериев предполагается, что начальное сухое пятно достаточно велико, и кривизной контактной линии твердая стенка–жидкость пренебрегается.

Настоящая статья посвящена модификации первого критерия Хартли–Мургатройда с целью разработать правило, позволяющее не только определить критическое значение толщины пленки, но и показать, какое из начальных возмущений в пленке разовьется в сухое пятно, а какое исчезнет.

#### 1. АНАЛИЗ СИЛ, ДЕЙСТВУЮЩИХ НА ВАЛИК, ОКРУЖАЮЩИЙ СУХОЕ ПЯТНО

Пусть по пластине, наклоненной к горизонту под углом  $0 \leq \alpha \leq \pi/2$ , сползает равновесная пленка вязкой капиллярной весомой жидкости. Будем считать течение в пленке ламинарным и безволновым. Допустим, что в некоторый момент в пленке возникло неподвижное сухое пятно в форме круга. Из опыта известно, что пятно, как правило, окружено характерным жидким валиком. На рис. 1 показан общий вид сухого пятна с окружающим его валиком, и на рис. 2 — поперечное сечение валика с плоскостью, проходящей через центр сухого пятна. На каждый



элемент валика, вырезанный центральным углом  $\delta\varphi$ , действуют: сила тяжести, сила, обусловленная наличием поверхностного натяжения на криволинейной поверхности валика, гидродинамическое воздействие натекающей пленки. Выпишем выражения для этих сил, действующих в плоскости пластины.

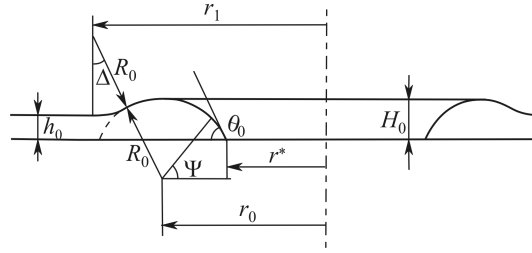
В плоскости подложки составляющая силы тяжести, действующей на элементарный объем жидкости,

$$F = F_0 r_0 \delta\varphi,$$

где  $F_0 = \rho S_0 g_\alpha$ ,  $\rho$  — плотность жидкости,  $r_0$  — начальный радиус средней линии валика,  $S_0$  — площадь поперечного сечения валика,  $g$  — ускорение силы тяжести,  $g_\alpha = g \sin \alpha$ .

Рис. 1. Схема течения.

Рис. 2. Поперечное сечение валика, окружающего начальное сухое пятно.



Капиллярную силу  $N$ , действующую на элемент валика в плоскости подложки, представим в виде

$$N = \sigma r_0 \delta \varphi \int_{(L)} (k_1 + k_2) \cos \psi \, dS.$$

Здесь  $\sigma$  — коэффициент поверхностного натяжения,  $k_1$  и  $k_2$  — главные кривизны поверхности бублика в точках контура  $L$ ,  $L$  — поперечный контур валика.

Согласно теореме Менье [16], кривизна, связанная с осевой симметрией валика,

$$k_1 = \frac{\cos \psi}{r},$$

где  $r$  — есть расстояние от данной точки контура  $L$  до оси симметрии валика. Вторая кривизна, связанная с формой контура  $L$ ,

$$k_2 = \frac{d\vartheta}{dS},$$

где  $\vartheta = \frac{\pi}{2} - \psi$  — есть угол между подложкой и касательной к контуру  $L$ . Следовательно,

$$N = \sigma \left[ - \int_{(L)} \frac{\cos^2 \psi}{r(\psi)} R(\psi) d\psi + \int_{(L)} \sin \vartheta \, d\vartheta \right] r_0 \delta \varphi, \quad (1)$$

где  $R(\psi)$  — радиус локальной кривизны контура  $L$ .

Естественно допустить, что контур  $L$  есть гладкая кривая с непрерывным изменением угла  $\vartheta$  от  $-\theta_0$  до 0 (необязательно монотонным), где  $\theta_0$  — краевой угол смачивания. Тогда второй интеграл в равенстве (1) не зависит от формы  $L$  и равен  $(1 - \cos \theta_0)$ , а равенство (1) принимает вид

$$N = \sigma (-K + 1 - \cos \theta_0) r_0 \delta \varphi.$$

Здесь

$$K = \int_{(L)} \frac{\cos^2 \psi}{r(\psi)} R(\psi) d\psi.$$

Перейдем теперь к вычислению гидродинамического воздействия пленки на валик. Известно, что профиль скорости в ламинарной стекающей пленке описывается квадратичным законом

$$u(z) = \beta \left( zh_0 - \frac{z^2}{2} \right), \quad \beta = \frac{g\alpha}{\nu},$$

где  $h_0$  — толщина стекающей пленки,  $\nu$  — кинематическая вязкость жидкости.

При этом удельный расход жидкости в пленке

$$q = \frac{g\alpha h_0^3}{3\nu}.$$

В том случае, если пленка натекает на неподвижный бублик, гидродинамическое воздействие пленки на единичный элемент валика в апексе сухого пятна равно потере удельного импульса стекающей пленки [6]

$$P_0 = \rho \int_0^{h_0} u^2 dz = \frac{2\rho\beta^2 h_0^5}{15},$$

а полное нормальное давление, оказываемое стекающей пленкой на текущий элемент,

$$P = P_0 r_0 \cos \varphi \delta\varphi.$$

При этом естественно принять, что  $P(\varphi) = 0$ , если  $\varphi > \pi/2$ .

Рассмотрим теперь равнодействующую всех сил, действующих на элемент валика в направлении радиуса–вектора центра масс этого элемента,

$$G(\varphi) = (N - (F + P) \cos \varphi).$$

Представим выражение для  $G(\varphi)$  в другой форме

$$G(\varphi) = G(0) + [F_0(1 - \cos \varphi) + P_0 \sin^2 \varphi] r_0 \delta\varphi. \quad (2)$$

Нетрудно видеть, что выражение в квадратной скобке правой части соотношения (2) есть положительная функция  $\varphi$  на интервале  $[0, \pi]$ .

Пусть  $G(0) < 0$ . Тогда в верхней части кольца на валик действуют силы, сдвигающие его вниз. На остальной части кольца силы, действующие на валик, могут быть и меньше и больше нуля. В первом случае ( $G(\varphi) < 0$ ) указанные силы направлены к центру кольца, а во втором ( $G(\varphi) > 0$ ) — от центра. Это означает, что если  $G(0) < 0$ , то бублик стягивается к центру и схлопывается или сползает вниз вместе с жидкостью пленки.

Если же  $G(0) \geq 0$ , то при всех значениях  $\varphi$  в интервале от 0 до  $\pi$   $G(\varphi) > 0$ . Под действием этих сил бублик начинает расширяться. Поднимаясь вверх, элемент в апексе валика собирает жидкость стекающей пленки и весовая составляющая  $F$  возрастает. В некоторый момент времени  $G(0)$  может оказаться равным нулю, и движение элемента вверх прекращается. Движение же других элементов валика продолжается до тех пор, пока течение не установится и сухое пятно не примет некоторой параболической формы.

Из приведенных рассуждений видно, что поведение начального малого сухого пятна в пленке определяется знаком при величине  $G(0)$ : сухое пятно исчезает (закрывается или просто сползает вместе с пленкой), если  $G(0) < 0$ , или же пятно разрастается неограниченно или вырастает в размерах и принимает вполне определенную установившуюся форму, если  $G(0) \geq 0$ .

Следовательно, критические параметры начального малого пятна определяются условием

$$F_0 + P_0 - N_0 = 0$$

или после подстановки в это условие выражений для отдельных слагаемых

$$g_\alpha \rho S_0 + \frac{2}{15} \frac{\rho g_\alpha^2 h_0^5}{v^2} = \sigma \left[ (1 - \cos \theta_0) - \int_L \frac{R(\psi) \cos^2 \psi}{r(\psi)} d\psi \right]. \quad (3)$$

Как видим, критические параметры начального возмущения, которые находятся из решения уравнения (3), зависят от формы поперечного сечения валика, окружающего сухое пятно.

В преобладающем числе работ, посвященных моделированию сухих пятен и ривулетов, стекающих вдоль границ пятен, границы поперечного сечения валика или ривулета аппроксимируются дугами окружностей. Будем и мы считать, что криволинейная граница сечения валика составлена из дуг окружностей некоторого радиуса  $R_0$  (см. рис. 2). При этом конкретная форма валика и величина радиуса  $R_0$  определяются сценарием образования начальной дырки. Рассмотрим два варианта формирования начального разрыва.

## 2. СУХОЕ ПЯТНО БЕЗ ВАЛИКА

Допустим, что в стекающей пленке непосредственно на стенке возник газовый пузырек, отделенный от атмосферы тонкой пленкой–мембраной, затем в какой-то момент мембрана разрушилась и в стекающей пленке образовалась круглая дырка.

Естественно предположить, что в данном случае поперечное сечение свободной границы пленки в районе сухого пятна имеет форму дуги окружности некоторого радиуса  $R_0$ , примыкающей к пластине под углом смачивания  $\theta_0$ . Наиболее наглядной характеристикой начального возмущения, очевидно, является высота валика  $H_0$ , которая связана с радиусом  $R_0$  соотношением

$$H_0 = R_0 (1 - \cos \theta_0).$$

В данном случае  $H_0 = h_0$  и валик практически отсутствует. Будем все же считать, что бублик есть, а его поперечное сечение представляет собой половину сегмента окружности радиуса  $R_0$ , с углом между касательной к дуге и хордой, равным  $\theta_0$ . Тогда

$$R_0 = h_0 / (1 - \cos \theta_0)$$

и площадь поперечного сечения валика

$$S_0 = R_0^2 \left( \theta_0 - \frac{1}{2} \sin 2\theta_0 \right) / 2.$$

После того, как форма поперечного сечения валика выбрана, интеграл  $K$  в выражении для  $N_{20}$  принимает вполне определенное значение. В данном случае

$$K = K_0 \left( \frac{\pi}{2} - \theta_0, \frac{\pi}{2}, \frac{r_0}{h_0} (1 - \cos \theta_0) \right),$$

где

$$K_0(\psi_1, \psi_2, C) = \int_{\psi_1}^{\psi_2} \frac{\cos^2 \psi}{C - \cos \psi} d\psi.$$

Поставляя все необходимые величины в соотношении (3), получим уравнение для определения критических параметров начального возмущения в форме

$$\frac{1}{2} \frac{g_\alpha h_0^2 \left( \theta_0 - \frac{1}{2} \sin 2\theta_0 \right)}{(1 - \cos \theta_0)^2} + \frac{2\beta^2 h_0^5}{15} - \frac{\sigma}{\rho} \left( (1 - \cos \theta_0) - K_0 \left( \frac{\pi}{2} - \theta_0, \frac{\pi}{2}, \frac{r_0}{h_0} (1 - \cos \theta_0) \right) \right) = 0, \quad (4)$$

или в безразмерных величинах

$$\frac{1}{2} \frac{\text{Bo} \left( \theta_0 - \frac{1}{2} \sin 2\theta_0 \right)}{(1 - \cos \theta_0)^2} + \frac{2}{5} \text{Re Bo} - \left( (1 - \cos \theta_0) - K_0 \left( \frac{\pi}{2} - \theta_0, \frac{\pi}{2}, \frac{r_0}{h_0} (1 - \cos \theta_0) \right) \right) = 0, \quad (5)$$

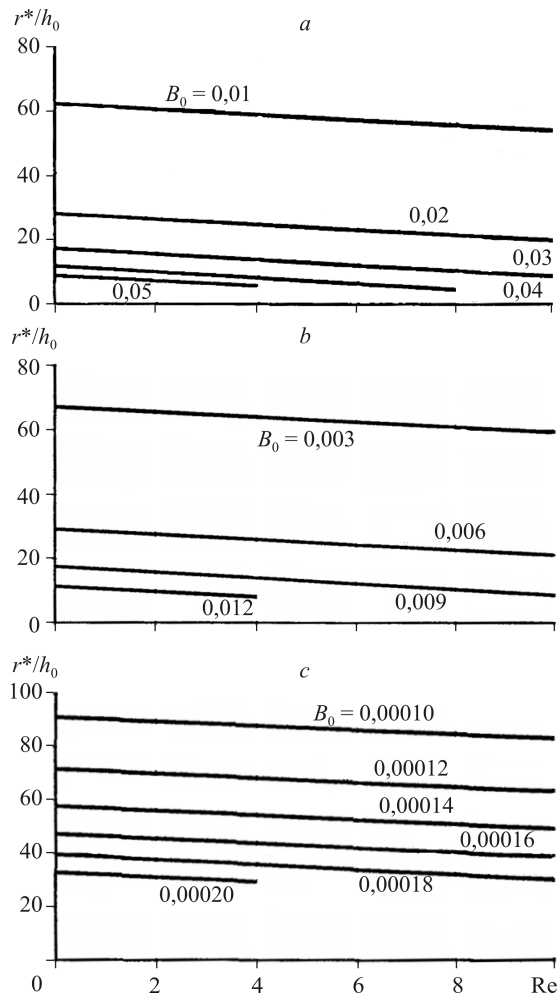
где  $\text{Bo} = \frac{\rho g_\alpha h_0^2}{\sigma}$ ,  $\text{Re} = \frac{q}{v} = \frac{g_\alpha h_0^3}{3v^2}$ ,  $\bar{r}_0 = \frac{r_0}{h_0}$ ,  $\text{We} = \frac{\rho h_0 v_0^2}{\sigma}$ .

Отметим, что число Бонда можно представить в другой форме  $\text{Bo} = h_0^2 / l^2$ , где  $l = \sqrt{\sigma / \rho g_\alpha}$  — капиллярная длина.

Если в условии (4) отбросить первое слагаемое в левой части и положить  $r_0$  достаточно большим (тогда  $K = 0$ ), то оно перейдет в известный критерий Хартли–Мургатройда.

Фактическое сухое пятно определяется радиусом  $r^*$ , который связан с величиной  $r_0$  следующим образом:

$$r^* = r_0 - R_0 \sin \theta_0.$$



На рис. 3 представлены результаты расчетов критического значения относительного радиуса  $r^*/h_0$  сухого пятна в зависимости от чисел Бонда и Рейнольдса для данного варианта формы валика для трех значений краевого угла смачивания:

$\theta_0 = 7^\circ$  (например, жидкий азот на алюминиевой подложке),

$\theta_0 = 30^\circ$  (силиконовое масло на стекле),

$\theta_0 = 52^\circ$  (вода на нержавеющей стали).

Данные по краевому углу смачивания взяты из работ [15, 17].

Эти кривые в каждом отдельном случае разделяют области положительных значений

Рис. 3. Критические значения радиуса сухого пятна в зависимости от чисел Рейнольдса и Бонда в первом варианте начального сухого пятна для трех значений краевого угла смачивания.

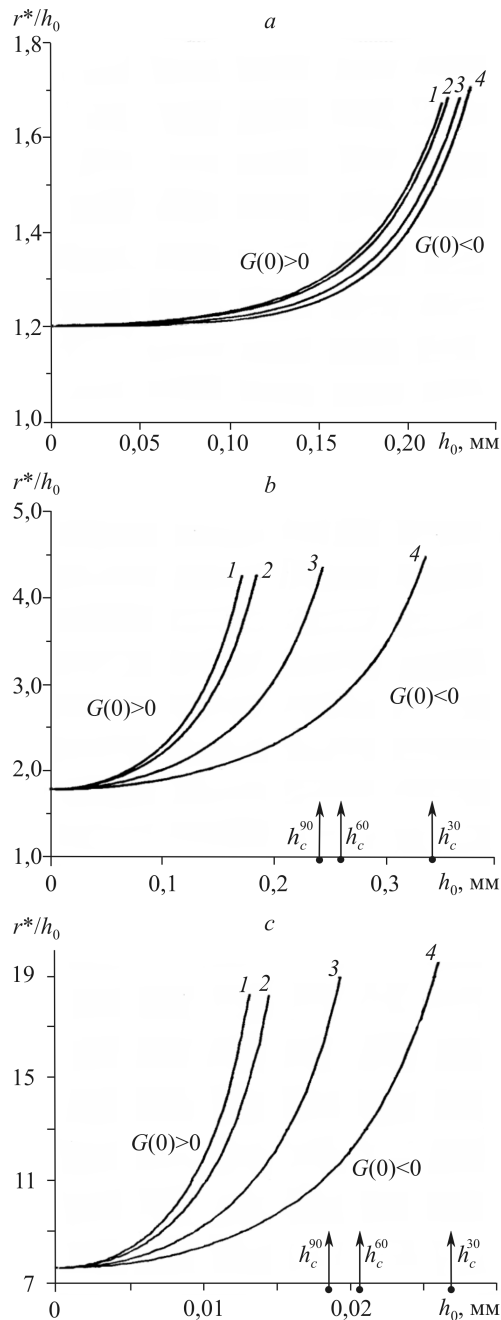
$\theta_0$ :  $52^\circ$  (a),  $30^\circ$  (b),  $7^\circ$  (c).

Рис. 4. Критические значения радиуса сухого пятна в зависимости от толщины пленки в варианте без валика для трех комбинаций жидкость–подложка. *a* — вода, нержавеющая сталь ( $\theta_0 = 52^\circ$ ), *b* — силиконовое масло, стекло ( $\theta_0 = 30^\circ$ ), *c* — жидкий азот, алюминий ( $\theta_0 = 7^\circ$ ).  $\alpha = 90^\circ$  (1),  $60^\circ$  (2),  $30^\circ$  (3),  $15^\circ$  (4).

$r^*/h_0$  и  $Re$  на две подобласти, в одной из которых (выше линий)  $G(0) > 0$ , и любое сухое пятно с параметрами из этой области обязательно разовьется в сухое пятно, а в другой —  $G(0) < 0$ , и возникшие пятна исчезнут (закроются или сползут вместе с пленкой).

Физически более информативными, на наш взгляд, являются сведения, представленные на рис. 4. Здесь показаны нейтральные кривые  $r^*/h_0 = f(h_0)$  для трех примеров течений: пленка воды на нержавеющей стали, пленка масла на пластине из стекла, пленка жидкого азота на алюминиевой пластине.

Как можно видеть из рисунков, все нейтральные кривые имеют вертикальные асимптоты  $r_c^*$ . Эти асимптоты определяют предельные значения толщин пленки, только при меньших значениях которых в пленке возможно образование сухих пятен, причем эти предельные значения определяются по критерию Хартли–Мургатройда.



### 3. СУХОЕ ПЯТНО С РАЗВИТЫМ ВАЛИКОМ

Пусть теперь начальное сухое пятно в пленке образовалось в результате нормального обдува пленки тонкой газовой струей. Именно такой способ формирования начального возмущения в метастабильной стекающей пленке жидкости был использован в экспериментах [15]. В этом случае естественно предположить, что вся жидкость, находившаяся на месте образовавшегося сухого пятна, ушла на создание валика.

Следовательно, в данном варианте

$$\pi r_0^2 h_0 = 2\pi r_0 S_0, \text{ откуда } S_0 = \frac{r_0 h_0}{2}. \quad (6)$$

С другой стороны, площадь поперечного сечения валика может быть найдена как площадь сегмента окружности радиуса  $R_0$  (см. пунктирную линию на рис. 2, а)

$$S_0 = R_0^2 \left( \theta_0 - \frac{1}{2} \sin 2\theta_0 \right). \quad (7)$$

Из сопоставления формул (6) и (7) находим выражение для величины радиуса

$$R_0 = \sqrt{\frac{h_0 r_0}{2\theta_0 - \sin 2\theta_0}}. \quad (8)$$

Интеграл в соотношении (3) принимает вид

$$K = K_0 \left( \frac{\pi}{2} - \theta_0, \frac{\pi}{2} + \Delta, \frac{r_0}{R_0} \right) + K_0 \left( \frac{\pi}{2} - \Delta, \frac{\pi}{2}, \frac{r_1}{R_0} \right),$$

где угол  $\Delta$  и линейная величина  $r_1$  показаны на рис. 2 и легко находятся из геометрических соотношений:

$$\Delta = \arccos \left( \frac{1 + \cos \theta_0}{2} + \frac{h_0}{2R_0} \right), \quad (9)$$

$$\frac{r_1}{R_0} = \frac{r_0}{R_0} + 2 \sin \Delta. \quad (10)$$

Равенство (3) в данном варианте формы валика принимает вид:

$$\frac{g_\alpha r_0 h_0}{2} + \frac{2g_\alpha^2 h_0^5}{15\nu^2} = \frac{\sigma}{\rho} \left( (1 - \cos \theta_0) - K_0 \left( \frac{\pi}{2} - \theta_0, \frac{\pi}{2} + \Delta, \frac{r_0}{R_0} \right) - K_0 \left( \frac{\pi}{2} - \Delta, \frac{\pi}{2}, \frac{r_1}{R_0} \right) \right)$$

или, при переходе к безразмерным величинам,

$$\frac{\text{Bo} \bar{r}_0}{2} + \frac{2}{5} \text{Re Bo} = \left( (1 - \cos \theta_0) - K_0 \left( \frac{\pi}{2} - \theta_0, \frac{\pi}{2} + \Delta, \frac{r_0}{R_0} \right) - K_0 \left( \frac{\pi}{2} - \Delta, \frac{\pi}{2}, \frac{r_1}{R_0} \right) \right). \quad (11)$$

С учетом соотношений (8)–(10), равенство (11) можно рассматривать как уравнение для нахождения критических значений величины  $h_0 / r_0$ .

На рис. 5 представлены результаты расчетов критического значения радиуса  $r^* / h_0$  для начального сухого пятна с развитым валиком в зависимости от чисел Бонда и Рейнольдса для тех же трех значений краевого угла смачивания  $\theta_0 = 7^\circ, 30^\circ, 52^\circ$ .

#### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе рассмотрена задача о развитии малых сухих пятен, по тем или иным причинам появившихся в ламинарных безволновых пленках стекающей жидкости. Опыты показывают, что не всякое начальное возмущение в пленке разрастается в крупномасштабное сухое пятно. В работе на основе учета силы тяжести, инерци-



Рис. 5. Критические значения радиуса сухого пятна в зависимости от чисел  $Re$  и  $B_0$  в варианте начального сухого пятна с развитым валиком для трех значений краевого угла смачивания.  
 $\theta_0$ : 52° (a), 30° (b), 7° (c).

онных сил стекающей пленки и поверхностного натяжения, действующих на жидкость вблизи границ сухого пятна, сформулирован критерий, позволяющий ответить на вопрос: разрастется ли заданное начальное сухое пятно в пленке в развитое сухое пятно или оно закроется.

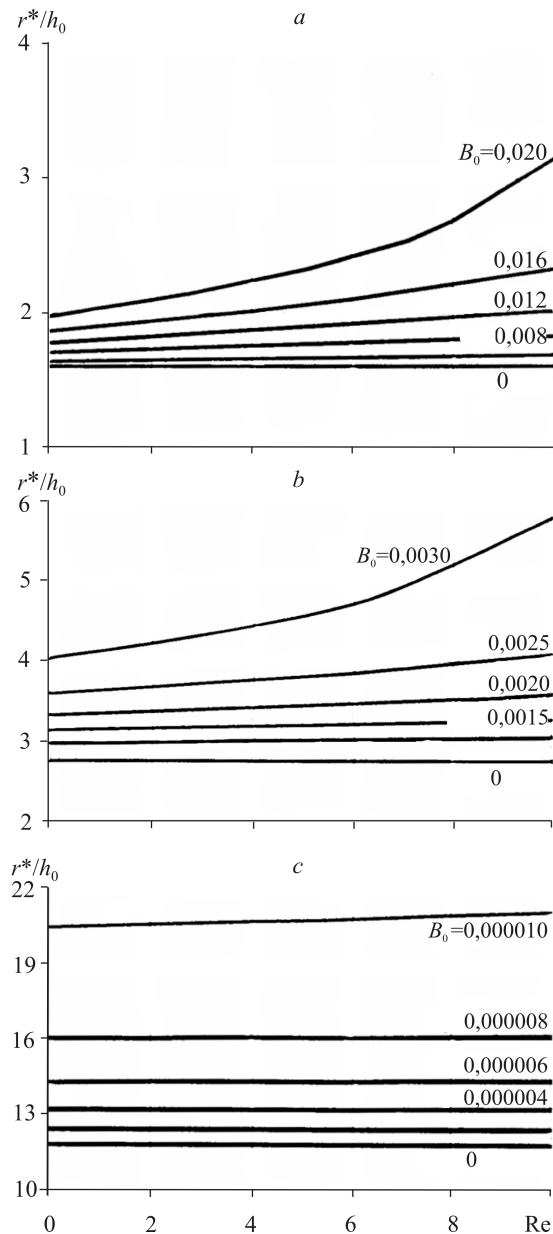
Предложенный критерий является обобщением известного критерия Хартли–Мургатройда, определяющего только предельную толщину пленки, при значениях ниже которой в пленке возможны сухие пятна.

Подробно рассмотрены два варианта формы валика, окружающего сухое пятно. Показано, что решение вопроса о разрастании или исчезновении начального сухого пятна в значительной степени зависит от формы валика.

В первом случае начальное сухое пятно возникло в результате появления непосредственно на подложке газового пузырька и последующего затем его взрыва.

Во втором варианте начальное сухое пятно образовалось в результате обдува стекающей пленки газовой струей. При этом вся жидкость, находившаяся на месте образовавшегося сухого пятна, пошла на формирование валика. В этом варианте валик имеет значительно более крупные размеры, чем в первом.

Анализ показывает, что при малых значениях толщины стекающей пленки размеры начальных сухих пятен, разрастающихся в крупномасштабные пятна, очень малы. Однако вблизи предельных значений толщины пленки размеры закрывающихся начальных сухих пятен, наоборот, могут быть очень значительными. При этом в первом варианте область значений диаметров начальных дырок, которые разрастаются в крупномасштабные сухие пятна, значительно больше, чем во втором. Обращает на себя внимание также тот факт, что зависимости  $r_0/h_0 = f(Re, B_0)$  в первом и втором вариантах формы валика возле начального сухого пятна имеют разный характер. Если в первом случае указанные функции с ростом и числа Рейнольдса и числа Бонда убывают, то в другом возрастают.



Результаты работы могут быть использованы при анализе стекающих пленок жидкости, содержащей пузырьки газа.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Алексеев С.В., Накоряков В.Е., Покусаев Б.Г.** Волновое течение пленок жидкости. — Новосибирск: Наука, 1992. — 256 с.
2. **Batchelor G.K., Moffatt H.K., Worster M.G. (eds.)** Perspectives in fluid dynamics // Cambridge University Press. — 2000. — P. 1–52.
3. **Kistler S.F., Schweizer P.M., (eds.)** Liquid Film Coating // Chapman & Hall. — 1997. — 351p.
4. **Oron A., Davis S.H., Bankoff S.G.** Long-scale evolution of thin liquid films // Rev. Mod. Phys. — 1997. — No. 69. — P. 931–980.
5. **Hartley D.E., Murgatroyd W.** Criteria for the break-up of thin liquid layers flowing isothermally over solid surfaces // Int. J. Heat Mass Transf. 7. — 1964. — P. 1003–1015.
6. **Ponter A.B., Davies G.A., Ross T.K., Thornley P.G.** The Influence of Mass Transfer on Liquid Film // Breakdown. Int. J. Heat & Mass Transfer. — 1967. — No. 10. — P. 349–359.
7. **Murgatroyd W.** The Role of Shear and Form Forces in the Stability of a Dry Patch in Two-phase Film // Int. J. Heat & Mass Transfer. — 1965. — No. 8. — P. 297–301.
8. **Zuber N., Staub F.W.** Stability of Dry Patches Forming in Liquid Films Flowing over Heated Surfaces // Int. J. Heat & Mass Transfer. — 1966. — No. 9. — P. 897–905.
9. **McPherson G.D.** Axial Stability of the Dry Patch Formed in Dryout of Two-phase Annular Flow // Int. J. Heat & Mass Transfer. — 1970. — No. 13. — P. 1133–1152.
10. **Chung J.C., Bankoff S.G.** Initial Breakdown of a Heated Liquid Film in Cocurrent Two-component Annular Flow: II. Rivulet and dry patch models // Chemical Eng. Comm. — 1980. — No. 4. — P. 455–470.
11. **Hobler T., Czajka J.** Minimal wetting of a flat surface // Chemia Stosow. — 1968. — B2. — P. 169–177.
12. **Mikielewicz J., Moszynski J.R.** Minimum thickness of a liquid film flowing vertically down a solid surface // Int. J. Heat Mass Transf. — 1976. — No. 19. — P. 771–776.
13. **Mikielewicz J., & Moszynski J.R.** An improved analysis of breakdown of thin liquid films // Arch. Mech. — 1978. — No. 30. — P. 489–500.
14. **Bankoff S.G.** Minimum thickness of a draining liquid film // Int. J. Heat & Mass Transfer. — 1971. — No. 14. — P. 2143–2146.
15. **Podgorski T., Flesseles J.-M., Limat L.** Dry arches within flowing films // Phys. of Fluids. — 1999. — No. 11. — P. 845–852.
16. **Бронштейн И.Н., Семендяев К.А.** Справочник по математике. — М.: Наука, 1986. — 544с.
17. **Федорченко А.В., Абдулхаликов Р.А.** Метастабильные режимы течения тонких пленок жидкости по вертикальным поверхностям // Теплофизика и аэромеханика. — 1999. — Т. 6, № 3. — С. 401–404.

*Статья поступила в редакцию 16 ноября 2006 г.*