

УДК 681.3.06 : 519.2

## СЛУЧАЙНЫЕ ФУНКЦИИ С НЕЛИНЕЙНОЙ РЕГРЕССИЕЙ И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ

В. В. Губарев

*Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования  
«Новосибирский государственный технический университет»,  
630092, г. Новосибирск, просп. К. Маркса, 20  
E-mail: gubarev@vt.cs.nstu.ru*

Рассмотрено математическое описание динамических свойств «нелинейных» случайных физических сигналов, т. е. сигналов, моделями которых являются случайные функции времени (процессы, последовательности) с нелинейной регрессией. Показана ограниченность и даже непригодность традиционных методов корреляционного и спектрального анализа для представления их динамики. В качестве альтернативы приведены описание и исследование таких сигналов с помощью временных (конкорреляционные функции) и частотных (конспектральные плотности) конкоргов. Они существуют для всех случайных функций и обладают инвариантностью модуля их значений к любым взаимно однозначным монотонным безынерционным преобразованиям сигналов.

*Ключевые слова:* нелинейные сигналы, случайные функции, двумерные законы распределения, функции регрессии, конкорреляционные функции, спектральные плотности.

**Введение. Постановка задачи.** Представление реальности в виде моделей, как известно, можно строить, исходя из рассмотрения её физики, происходящих в ней процессов. Этот подход базируется на априорном введении модели и использовании апостериорных экспериментальных данных только для нахождения конкретных значений параметров модели, проверки её адекватности реальности, подгонки модели и других действий.

В отличие от априорного часто используемый апостериорный подход построения моделей реальных объектов основан на подборе и подгонке по экспериментальным данным как вида модели из заданного класса, так и её параметров. В этом случае на модель часто не накладывается никаких принципиальных ограничений, кроме формальных математических.

При применении вероятностных моделей для описания реальных объектов первый (априорный) подход реализуется заданием моделей через основное вероятностное пространство, второй (апостериорный) — через вероятностную меру, заданную на выборочном пространстве. Второй вариант, как правило, проще с точки зрения математических и вычислительных затрат. Однако его использование может затушевать многие физические реальности объекта, например аппроксимировать нелинейные функции регрессии случайных процессов, адекватно описывающих реальный объект, линейными, привести к некорректному выводу при таких спектральных представлениях [1].

Одна из таких практических ситуаций рассматривается в данной работе. Её цель — изучение стационарных случайных процессов с нелинейной регрессией как нелинейных моделей реальных сигналов. Для этого анализируются основные определения, новые, адекватные таким процессам, временные и спектральные (частотные) характеристики, а также проводится сравнение результатов, получаемых с помощью традиционных и предлагаемого подходов.

**Определения, понятия, обозначения.** Под сигналом  $\zeta(t)$  будем понимать порождаемый реальными материальными объектами физический носитель (поставщик) информации о состоянии этих объектов. Если сигнал  $\zeta(t)$  допускает описание (представление) стохастической (вероятностной (априорной) или статистической (апостериорной)) моделью,

будем называть его случайным. Исследуем далее только сигналы  $\zeta(t)$ , которые можно описать скалярными  $X(t), Y(t), Z(t), \dots$  или векторными  $\mathbf{X}(t) = (X_1(t), X_2(t), \dots, X_n(t)), \mathbf{Y}(t), \mathbf{Z}(t), \dots$  стационарными и стационарно связанными случайными процессами.

Для простоты рассмотрим скалярные стационарные, хотя бы в широком смысле, т. е. на уровне распределений 2-го порядка, процессы  $X(t)$ , а также двумерные стационарные и стационарно связанные векторные процессы  $\mathbf{X}(t) = (X(t), Y(t))$ .

Введём следующие обозначения:  $\mathbf{P}\{A\}$  — вероятность случайного события  $A$ ;

$$F_{\mathbf{X}}(x, y; t, t + \tau) = F_{\mathbf{X}}(x, y; \tau) = \mathbf{P}\{[X(t) \leq x] \cap [Y(t + \tau) \leq y]\}; \quad (1)$$

$W_{\mathbf{X}}(x, y; t, t + \tau) = W_{\mathbf{X}}(x, y; \tau)$  — двумерные, а  $F_X(x, t) = F_X(x)$ ,  $W_X(x, t) = W_X(x)$  — одномерные функция и плотность распределения вероятностей  $\mathbf{X}(t)$ ;

$$\mathbf{M}\{f[X(t), Y(t + \tau)]\} = \iint_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dF(x, y; \tau) dx dy \quad (2)$$

— оператор усреднения по вероятностной мере, иначе математического ожидания,  $f[X(t), Y(t + \tau)]$ ;

$$m_X(x; \tau) = \mathbf{M}_X\{X(t) | X(t + \tau) = x\}, \quad (3)$$

$$m_{\mathbf{X}}(y; \tau) = \mathbf{M}_X\{X(t) | Y(t + \tau) = y\}, \quad (4)$$

$$m_{\mathbf{X}}(y; -\tau) = \mathbf{M}_Y\{Y(t) | X(t + \tau) = x\}, \quad (5a)$$

$$m_{\mathbf{X}}(x; \tau) = \mathbf{M}_Y\{Y(t + \tau) | X(t) = x\} \quad (5b)$$

— функции регрессии  $X(t)$  по всем  $X(t + \tau) = x$  случайной функции (СФ)  $X(t)$ ,  $X(t)$  по всем  $Y(t + \tau) = y$  и  $Y(t)$  по всем  $X(t + \tau) = x$  СФ  $\mathbf{X}(t) = (X(t), Y(t))$ ;

$$R_{XY}(\tau) = \mathbf{M}\{\dot{X}(t)\dot{Y}(t + \tau)\} \quad (6)$$

— взаимная (а при  $X(t) = Y(t)$  собственная или авто-) корреляционная функция (КФ);

$$\rho_{XY}(\tau) = R_{XY}(\tau) / \sqrt{R_{XX}(0)R_{YY}(0)} = R_{XY}(\tau) / \sigma_X \sigma_Y \quad (7)$$

— нормированная КФ (коэффициент корреляции  $X(t)$  и  $Y(t + \tau)$ ), где  $\dot{X}(t) = X(t) - m_X(t)$ ;

$$S_{XY}(v) = \mathcal{F}\{R_{XY}(\tau), v\} \quad (8)$$

— взаимная спектральная плотность мощности (СПМ)  $X(t), Y(t)$ ;  $\mathcal{F}\{\cdot\}$  — прямое непрерывное (тогда  $v = \omega = 2\pi f \in (-\infty, \infty)$ ) или дискретное (тогда  $v = \nu = \omega \Delta t \in [-\pi, \pi]$ ) экспоненциальное преобразование Фурье, где  $\omega$  — круговая, а  $f$  — линейная (в герцах) частота,  $\Delta t$  — шаг дискретизации СФ по  $t$ .

Введём ещё три вида характеристик СФ [1]:

а) дисперсионные (корреляционные отношения) функции (ДФ):

$$\eta_{Y/X}(\tau) = \sqrt{\mathbf{M}_X\{m_Y^2[X(t), \tau]\}} / \sigma_Y, \quad (9a)$$

$$\eta_{X/Y}(\tau) = \sqrt{\mathbf{M}_Y \left\{ m_{\overset{\circ}{X}}^2 [Y(t + \tau); \tau] \right\}} / \sigma_X; \quad (96)$$

б) ненормированную конкорреляционную функцию (ККФ):

$$K_{XY}(\tau) = \mathbf{M} \{ (F_X[X(t)] - \mathbf{M} \{ F_X[X(t)] \}) (F_Y[Y(t + \tau)] - \mathbf{M} \{ F_Y[Y(t + \tau)] \}) \} \quad (10)$$

и нормированную конкорреляционную функцию:

$$k_{XY}(\tau) = \mathbf{K}_{XY}(\tau) / \sqrt{\mathbf{K}_{XX}(0)\mathbf{K}_{YY}(0)}; \quad (11)$$

в) полуконкорреляционные функции:

$$H_{XF_Y}(\tau) = \mathbf{M} \left\{ \overset{\circ}{X}(t) (F_Y[Y(t + \tau)] - \mathbf{M} \{ F_Y[Y(t + \tau)] \}) \right\}, \quad (12)$$

$$h_{XF_Y}(\tau) = H_{XF_Y}(\tau) / \left( \sigma_X \sqrt{K_{YY}(0)} \right). \quad (13)$$

Основные свойства, преимущества и недостатки этих характеристик связи по сравнению с традиционными КФ описаны в [1, 2] и будут частично рассмотрены далее.

**Линейные случайные сигналы и функции.** Судя по количеству публикаций и решённых теоретических и практических задач, наиболее часто реальные случайные сигналы с приемлемой адекватностью описываются линейными случайными функциями, которые представляют собой СФ с линейными функциями регрессии (3)–(5). Назовём такие сигналы и описывающие их функции сигналами или случайными функциями с линейной регрессией (класса ЛР), или линейно-коррелированными (К-линейными). В [1] приведены необходимые и достаточные условия, удовлетворяя которым функция  $f(x; \tau)$  может быть собственной функцией регрессии СФ  $X(t)$  вида (3), а в [1, 3] функции регрессии (3)–(5) будут линейными. Широко известно, что корректное использование корреляционного анализа, в частности КФ  $R(\tau)$  (6),  $\rho(\tau)$  (7) и, как следствие, получаемых от них линейным преобразованием Фурье СПМ  $S(\nu)$  (8), имеет место тогда и только тогда, когда функции регрессии (3)–(5) являются линейными и пригодны к теоретическому и практическому применению, а также если функции регрессии нелинейные, но хорошо статистически аппроксимируются прямой среднеквадратической регрессии  $\tilde{m}_{\mathbf{X}}(y; \tau)$ ,  $\tilde{m}_{\mathbf{X}}(x; \tau)$ , т. е. линейными зависимостями. В противном случае, когда такая аппроксимация является грубой или неприемлемой, применение КФ и СПМ может либо ввести в заблуждение (см. [1], рис. 1, 2), либо стать практически невозможным.

На рис. 1 представлена ситуация, когда по значению  $|\rho_{XY}| \neq 1$  можно реальную функциональную связь принять за статистическую или, наоборот, когда в условиях функциональной связи  $X = X(t)$  и  $Y = Y(t + \tau)$  из некоррелированности ( $\rho = 0$ ) можно сделать вывод об отсутствии связи между  $X$  и  $Y$ . Преимущества характеристик нелинейной связи типа ДФ и ККФ перед КФ, когда реальная связь между  $X$  и  $Y$  нелинейная функциональная или статистическая [1, 2], демонстрируют рис. 2 и табл. 1.

Теперь обратимся к замечанию о возможной непригодности традиционных КФ и СПМ, когда СФ не относятся к классу ЛР, т. е. не являются К-линейными.

Во-первых, известно, что к классу ЛР принадлежат лишь СФ, имеющие моменты, начиная с математического ожидания. Но моменты могут отсутствовать [2]. Например, нет их у СФ с распределениями Коши, Хольцмарка, при некоторых параметрах формы

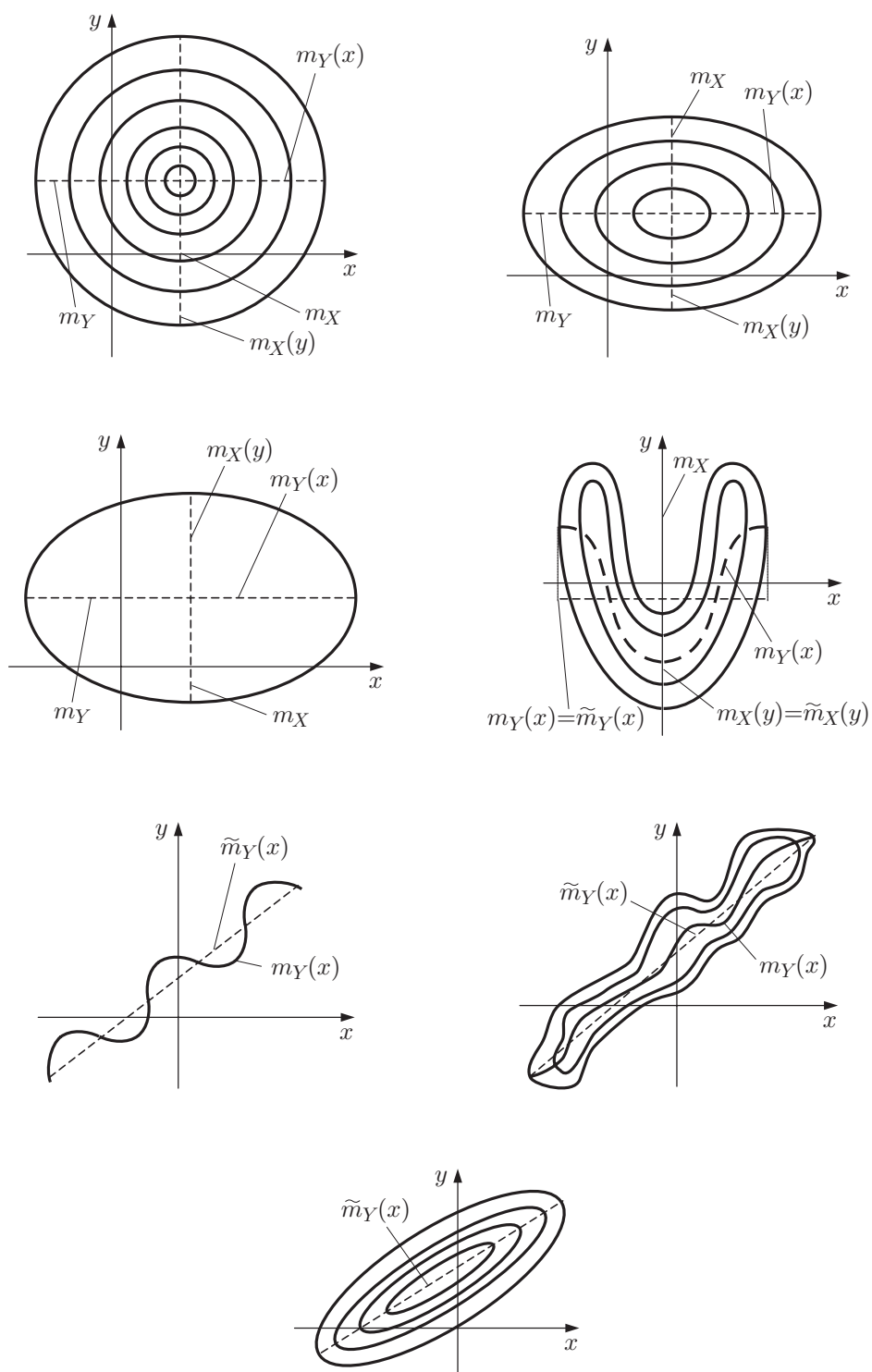


Рис. 1. Примеры диаграмм рассеяния, функций регрессии и прямых среднеквадратической регрессии

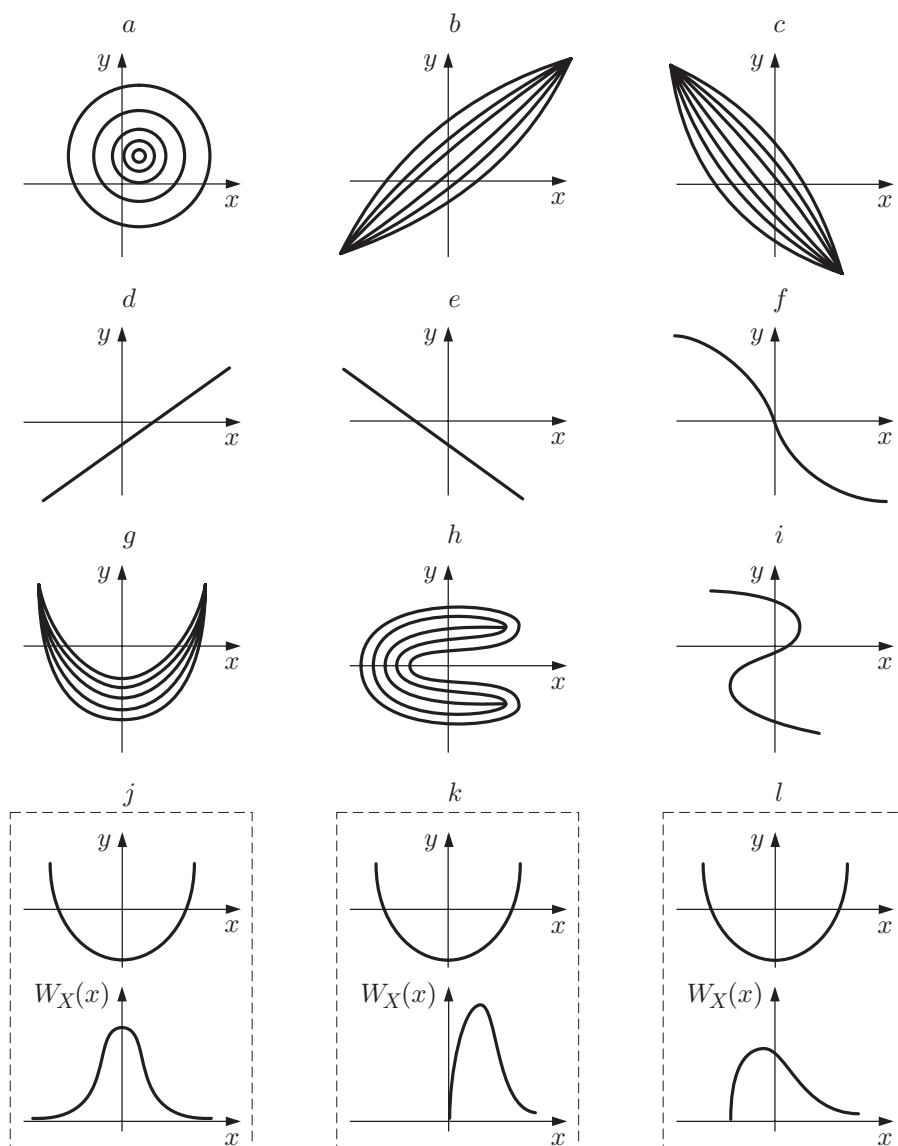


Рис. 2. Примеры статистических ( $a—c, g, h$ ) и функциональных ( $d—f, i—l$ ) зависимостей и соответствующих им значений характеристик связи случайных величин  $X$  и  $Y$

Таблица 1

Характеристики	Рисунок											
	$a$	$b$	$c$	$d$	$e$	$f$	$g$	$h$	$i$	$j$	$k$	$l$
$\rho_{XY}$	0	0,7	-0,6	1	-1	?	0	0	?	0	0,7	0,3
$\eta_{Y/X}$	0	0,7	0,6	1	1	1	0,5	0	?	1	1	1
$\eta_{X/Y}$	0	0,7	0,6	1	1	1	0	0,7	1	0	1	0,6
$k_{XY}$	0	0,7	-0,6	1	-1	-1	0	0	?	0	1	0,8

Примечание.  $\rho_{XY}$  — коэффициент корреляции;  $\eta_{Y/X}, \eta_{X/Y}$  — корреляционные отношения;  $k_{XY}$  — коэффициент конкорреляции; знак «?» указывает на то, что значение зависит от закона распределения  $W_X(x)$

у распределений Пирсона VII, Стьюдента, Пирсона IX, Снедекора — Фишера, Парето, Бера II и т. д. Следовательно, для таких СФ принципиально не применимы КФ, СПМ, ДФ, подобные им и производные от них характеристики.

Во-вторых, при некоторых монотонных безынерционных преобразованиях  $X(t), Y(t)$  с изменяемыми параметрами нелинейности диапазон возможных значений традиционных КФ и, как следствие, вид и диапазон значений СПМ могут сильно варьироваться, делая эти характеристики непригодными для статистической линеаризации нелинейностей. В качестве примера рассмотрим три преобразования Джонсона ( $S_L, S_B, S_U$ ) нормальной СФ  $X(t)$  с параметрами сдвига (положения)  $a = 0$ , масштаба  $\lambda = 1$  и связи (коэффициент корреляции)  $\rho_{XX}(\tau) = \varphi$ :

$$Y_i(t) = a_i + \lambda_i \exp\{(X(t) - \alpha_i)/\beta_i\} = a_i + \lambda_i \exp\{X(t)/\beta_i\}, \quad (14)$$

$$Y_i(t) = a_i + \frac{\lambda_i}{2} \left[ 1 + \operatorname{th} \left( \frac{X(t) - \alpha_i}{\beta_i} \right) \right], \quad (15)$$

$$Y_i(t) = a_i + \lambda_i \operatorname{ch}[(X(t) - \alpha_i)/\beta_i], \quad (16)$$

а также аналогичное  $S_B$  преобразование (введено автором)

$$S_\Phi: Y_i(t) = a_i + \lambda_i \Phi[(X(t) - \alpha_i)/\beta_i], \quad (17)$$

где  $\Phi(\cdot)$  — стандартная нормальная (Гаусса) одномерная функция распределения,  $i = 1$  или  $2$ . Эти распределения интересны тем, что три семейства распределений СФ (14)–(16) или (14), (15), (17) полностью покрывают пространство моментов [2], т. е. образуют полное в этом смысле множество распределений.

Примеры выражений для  $\rho_{Y_i Y_j}(\tau)$ ,  $i, j = \overline{1, 2}$ , и графики их зависимостей от разных параметров формы  $\alpha$ ,  $\beta$  и параметра связи  $\rho_{XX}(\tau) = \varphi(\tau)$  ( $-1 < \varphi < 1$ ) представлены на рис. 3–5 и в табл. 2–5. Как видно из рисунков и таблиц, диапазоны значений  $|\rho(\tau)|$  могут быть настолько малыми, что делать какие-либо выводы о связи между  $Y_i(t)$  и  $Y_j(t + \tau)$ ,  $i, j = \overline{1, 2}$ , по собственным и взаимным КФ даже при  $|\varphi| = 1$  становится практически невозможным. Следовательно, здесь мало пригодными будут СПМ входных и выходных сигналов нелинейных динамических систем, а также приёмы решения других задач, которые базируются на явно описываемой или неявно подразумеваемой К-линейности входных сигналов.

В связи с изложенным рассмотрим один из возможных вариантов описания нелинейных сигналов, т. е. сигналов с собственными нелинейными регрессиями определённого типа, или К-линейных сигналов  $\zeta(t)$ , а также  $\delta(t)$  и  $\varepsilon(t)$ , получаемых из  $\zeta(t)$  с помощью любых нелинейных взаимно однозначных безынерционных функциональных преобразований.

**К-линейные в пространстве канонически приведённых распределений или конкорлинейные (КК-линейные) случайные сигналы и функции.** Перейдём от СФ  $X(t), Y(t)$  к новым СФ  $\Xi(t)$  и  $\Psi(t)$ :

$$\Xi(t) = F_X[X(t)]; \quad \Psi(t) = F_Y[Y(t)], \quad (18)$$

где  $F_X(x; t)$ ,  $F_Y(y; t)$  — одномерные функции распределения  $X(t), Y(t)$ .

Сделаем следующие замечания.

1. Получаемые при таких преобразованиях распределения СФ  $\Xi(t)$  и  $\Psi(t)$  называются каноническими [4]. Если при этом  $X(t)$  и  $Y(t)$  имеют абсолютно непрерывные одномерные

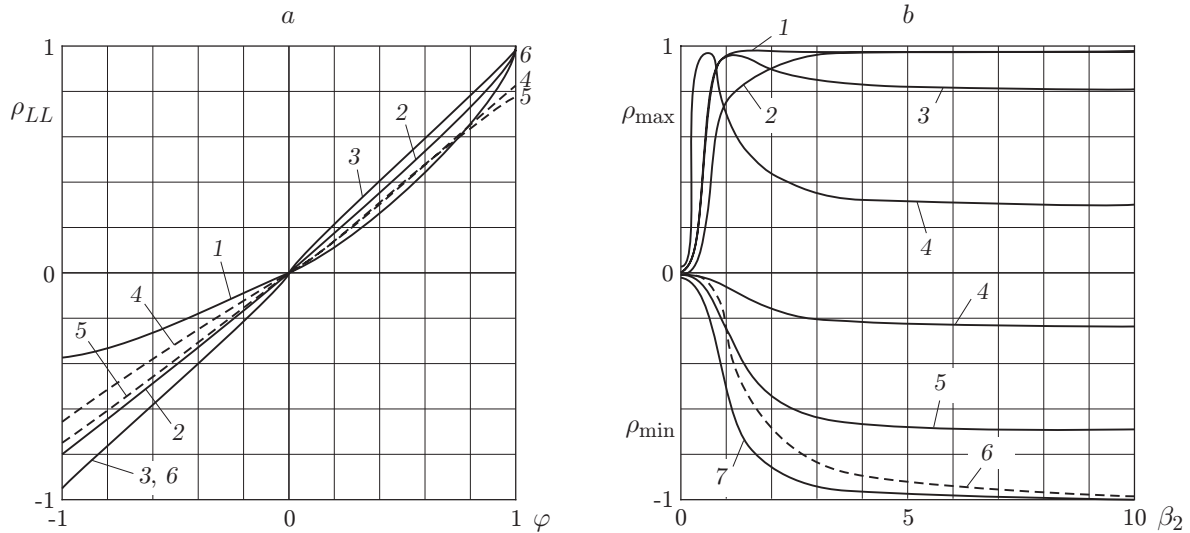


Рис. 3. Кривые, характеризующие области допустимых значений коэффициентов корреляции  $\rho$  для двумерных  $S_L$ -распределений Джонсона: *a* — зависимости  $\rho_{LL}$  ( $\rho_{LL} = \frac{\nu_{12}^\varphi - 1}{\sqrt{(\nu_1^2 - 1)(\nu_2^2 - 1)}}$ ) от параметра связи  $\varphi$ , т. е.  $\rho$  для нормального распределения (кривая 1 —  $\beta_1 = \beta_2 = 1$ ; 2 —  $\beta_1 = \beta_2 = 2$ ; 3 —  $\beta_1 = \beta_2 = 3$ ; 4 —  $\beta_1 = 1, \beta_2 = 3$ ; 5 —  $\beta_1 = 1, \beta_2 = 10$ ; 6 —  $\beta_1 = 2, \beta_2 = 10$ ), *b* — зависимости  $\rho_{\max} = \rho(\varphi = 1)$  ( $\rho_{\max} = \frac{\nu_{12} - 1}{\sqrt{(\nu_1^2 - 1)(\nu_2^2 - 1)}}$ ) и  $\rho_{\min} = \rho(\varphi = -1)$  ( $\rho_{\min} = \frac{\nu_{12}^{-1} - 1}{\sqrt{(\nu_1^2 - 1)(\nu_2^2 - 1)}}$ ,  $\nu_i = e^{1/(2\beta_i^2)}$ ,  $\nu_{12} = e^{1/(\beta_1\beta_2)}$ ) от значений параметров формы  $\beta_1, \beta_2$  распределений величин  $Y_1 = Y_1(t)$  и  $Y_2 = Y_2(t + \tau)$  (кривая 1 —  $\beta_1 = \beta_2$ , 2 —  $\beta_1 = 10, \beta_2 = 1$ , 3 —  $\beta_1 = 1, \beta_2 = 10$ , 4 —  $\beta_1 = 0,5, \beta_2 = 10$ , 5 —  $\beta_1 = 1, \beta_2 = 10$ , 6 —  $\beta_1 = \beta_2, \beta_2 = 10$ , 7 —  $\beta_1 = 10, \beta_2 = 1$ )

Таблица 2

$\beta_2$		$\beta_1$			
		1	2	3	4
1	max	1,00	0,93	0,88	0,83
	min	-0,36	-0,56	-0,63	-0,68
2	max	0,93	1,00	0,99	0,97
	min	-0,56	-0,78	-0,84	-0,88
3	max	-0,88	0,99	1,00	0,99
	min	-0,63	-0,84	-0,89	-0,93
4	max	0,85	0,98	0,99	0,99
	min	-0,66	-0,86	-0,92	-0,95
5	max	0,83	0,97	0,99	1,00
	min	-0,68	-0,88	-0,93	-0,96

Таблица 3

Параметр формы $\beta$	Коэффициент асимметрии $\gamma_1$	Коэффициент эксцесса $\gamma_2$
0,5	414	$9 \cdot 10^6$
1	6,18	110
2	1,75	5,9
3	1,06	2,1
4	0,77	1,1
5	0,61	0,67
6	0,5	0,46
7	0,43	0,33
8	0,38	0,25
9	0,34	0,2
10	0,3	0,16

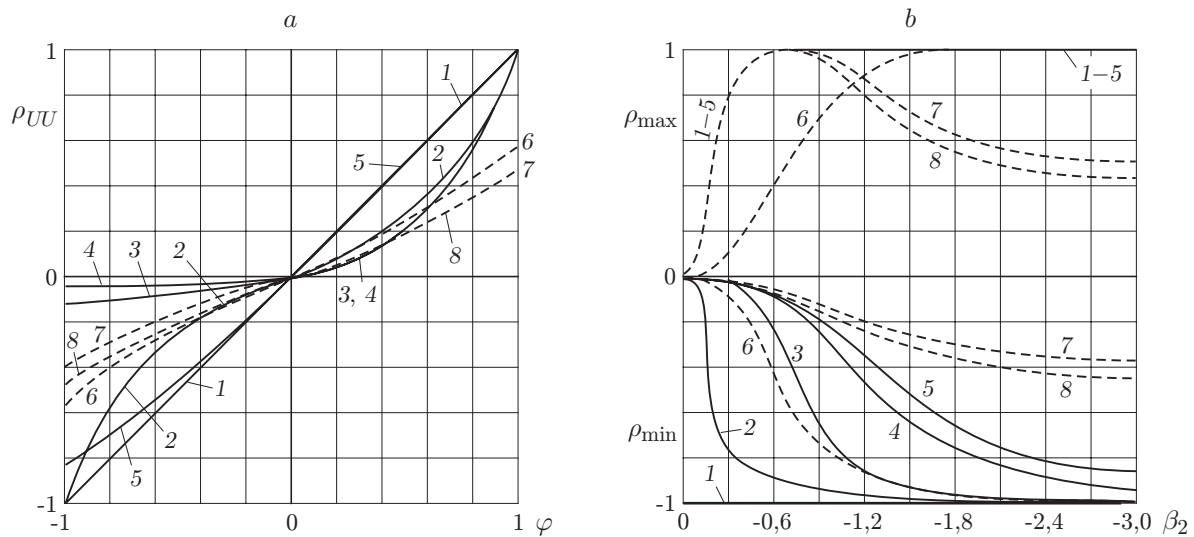


Рис. 4. Кривые, характеризующие области допустимых значений коэффициентов корреляции  $\rho$  для двумерных  $S_U$ -распределений Джонсона: *a* — зависимости  $\rho_{UU}$  ( $\rho_{UU} = \frac{\nu_1 \nu_2 [\text{ch}(\delta_1 + \delta_2)(\nu_2^2 - 1) - \text{ch}(\nu_1 - \nu_2)(\nu_1^2 - 1)]}{\sqrt{(\nu_1^2 - 1)(\nu_2^2 - 1)[\nu_1^2 \text{ch}(2\delta_1) + 1][\nu_2^2 \text{ch}(2\delta_2) + 1]}}$ ,  $\rho_{UL} = \frac{2\sqrt{2} \text{ch}(\varphi/2\beta_1\beta_2) \cdot \text{ch}(\varphi/2\beta_1\beta_2 - \delta_2)}{\sqrt{(\nu_1^2 - 1)(\nu_2^2 - 1)[\nu_2 \text{ch}(2\delta_2) + 1]}}$ ,  $\delta_i = \alpha_i/\beta_i$ ) от параметра связи  $\varphi$  (кривая 1 —  $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ ,  $\beta_1 = \beta_2 \geq 1,6$ ; 2 —  $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ ,  $\beta_1 = \beta_2 = 0,6$ ; 3 —  $\alpha_1 = \alpha_2 = \pm 1$ ,  $\beta_1 = \beta_2 = 0,6$ ; 4 —  $\alpha_1 = \alpha_2 = \pm 2$ ,  $\beta_1 = \beta_2 = 0,6$ ; 5 —  $\alpha_1 = \alpha_2 = \pm 1$ ,  $\beta_1 = \beta_2 = 1,6$ ; 6 —  $\alpha_1 = 0$ ,  $\alpha_2 = 1$ ,  $\beta_1 = \beta_2 = 1,6$ ;  $\alpha_1 = 1$ ,  $\alpha_2 = 0$ ,  $\beta_1 = \beta_2 = 1,6$ ; 7 —  $\alpha_1 = 1$ ,  $\alpha_2 = 0$ ,  $\beta_1 = 0,6$ ,  $\beta_2 = 2,6$ ;  $\alpha_1 = 0$ ,  $\alpha_2 = 1$ ,  $\beta_1 = 2,6$ ,  $\beta_2 = 0,6$ ; 8 —  $\alpha_1 = 1$ ,  $\alpha_2 \geq 2$ ,  $\beta_1 = 3,6$ ,  $\beta_2 = 0,6$ ;  $\alpha_1 \geq 2$ ,  $\alpha_2 = 1$ ,  $\beta_1 = 0,6$ ,  $\beta_2 = 3,6$ ); *b* — зависимости  $\rho_{\max}$  от значений параметров формы  $\beta_1, \beta_2$  (кривая 1 —  $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ ,  $\beta_1 = \beta_2$ ; 2 —  $\alpha_1 = \alpha_2 = \pm 0,1$ ,  $\beta_1 = \beta_2$ ; 3 —  $\alpha_1 = \alpha_2 = \pm 0,5$ ,  $\beta_1 = \beta_2$ ; 4 —  $\alpha_1 = \alpha_2 = \pm 2$ ,  $\beta_1 = \beta_2$ ; 5 —  $\alpha_1 = \alpha_2 = \pm 10$ ,  $\beta_1 = \beta_2$ ; 6 —  $\alpha_1 = 0$ ,  $\alpha_2 = 1$ ,  $\beta_1 = 2,6$ ; 7 —  $\alpha_1 = 1$ ,  $\alpha_2 = 2$ ,  $\beta_1 = 0,6$ ; 8 —  $\alpha_1 = 2$ ,  $\alpha_2 = 1$ ,  $\beta_1 = 0,6$ )

Таблица 4

Параметр формы $\alpha$	Параметр формы $\beta$	Коэффициент асимметрии $ \gamma_1 $	Коэффициент эксцесса $\gamma_2$
0	0,6	0	3371
	1,0	0	3,3
	2,0	0	0,15
0,5 – 1,0	0,6	6,4–7,0	6785–7514
	0,8	1,0–1,2	56,1–73,8
	1,0	0,37–0,38	6,04–9,04
	2,0	0,05–0,09	0,18–0,26
2 – 4	0,6	7,0	7598–7600
	0,8	1,3	79,3–79,7
	1,0	0,61–0,62	10,8–11,1
	3,0	0,09	0,17



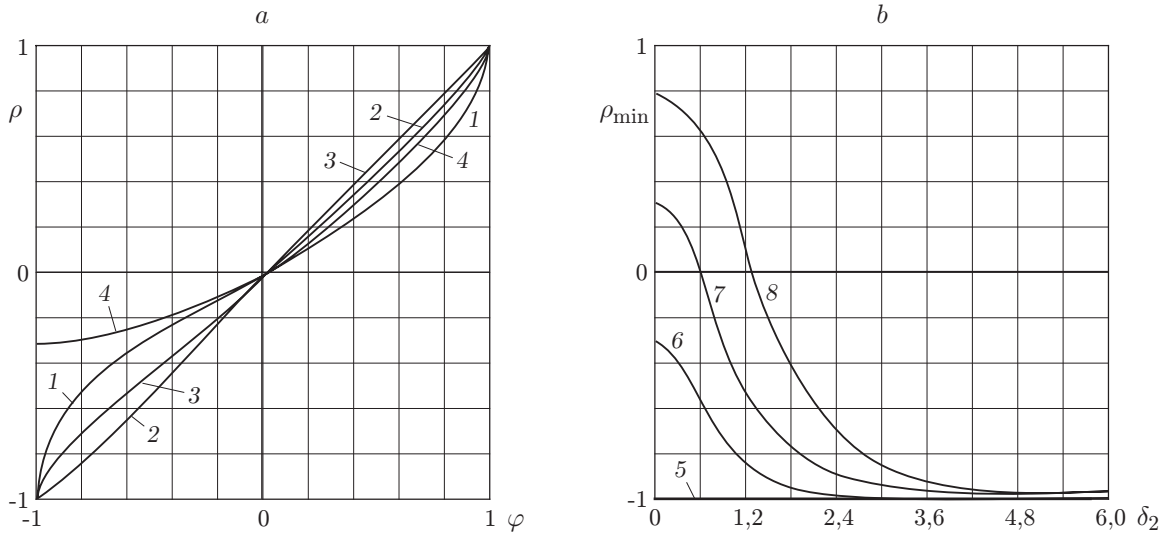


Рис. 5. Кривые, характеризующие области допустимых значений коэффициентов корреляции  $\rho$  для двумерных  $S_B$ - ( $a \approx 0,55$ ) и  $S_\Phi$ -распределений Джонсона ( $a = 1$ ):  $a$  — зависимости  $\rho$  от параметра связи  $\varphi$  (кривые 1 —  $\alpha_1 = \alpha_2 = 0, \delta_1 = \delta_2 = 0$ ; 2 —  $\alpha_1 = \alpha_2 = 0, \delta_1, \delta_2 \geq 0,5$ ; 3 —  $\alpha_1 = \alpha_2 = 1, \delta_1, \delta_2 \geq 1,8$ ; 4 —  $\alpha_1 = \alpha_2 = 2, \delta_1 = \delta_2 = 1$ );  $b$  — зависимости  $\rho_{\min}$  от значений  $\delta_2$  (кривые 5 —  $\alpha_1 = \alpha_2 = 0, \delta_1 = \delta_2$ ; 6 —  $\alpha_1 = \alpha_2 = 1, \delta_1 = \delta_2$ ; 7 —  $\alpha_1 = \alpha_2 = 2, \delta_1 = \delta_2$ ; 8 —  $\alpha_1 = \alpha_2 = 4, \delta_1 = \delta_2$ )

Таблица 5

Параметр формы $\alpha$	Параметр формы $\beta$	Коэффициент асимметрии $\gamma_1$	Коэффициент эксцесса $\gamma_2$
0	4,26	0	1,2
0,13	4,26	0	1,0
0,37	6,27	0,9	0,4
0,68	7,8	1,4	1,2
1,08	5,27	1,62	2,2
0,86	3,13	0,62	1,0
	4,54	1,1	0,4
1,11	2,78	0,78	1,0
1,28–1,51	3,26	1,3–1,9	0,8–2,2

распределения, т. е. их плотности распределения  $W_X(x)$  и  $W_Y(y)$  существуют и непрерывны в области значений  $X(t)$  и  $Y(t)$  соответственно, то распределения  $F_{\Xi}(\xi)$  и  $F_{\Psi}(\psi)$  будут равномерными на интервале  $[0, 1]$ . Следовательно, для  $\Xi(t)$  и  $\Psi(t)$  существуют все моменты, в том числе конкоры (10), (11). В этом их несомненное первое преимущество перед КФ и ДФ.

2. Корреляционные функции  $R_{\Xi\Xi}(\tau), R_{\Xi\Psi}(\tau), R_{\Psi\Psi}(\tau)$  и аналогично  $\rho_{\Xi\Xi}(\tau), \rho_{\Xi\Psi}(\tau), \rho_{\Psi\Psi}(\tau)$  будут совпадать с конкорреляционными функциями  $K_{XX}(\tau), K_{XY}(\tau), K_{YY}(\tau), k_{XX}(\tau), k_{XY}(\tau), k_{YY}(\tau)$  соответственно. При этом  $\rho_{\Xi\Psi}(\tau) = k_{\Xi\Psi}(\tau) = k_{XY}(\tau)$ , а ККФ не будут зависеть ни от вида, ни от всех параметров, включая параметры формы, одномерных распределений СФ  $X(t), Y(t)$ .

3. Если  $U(t) = f[X(t)]$ , а  $V(t) = g[Y(t)]$  и функции  $f(\cdot)$  и  $g(\cdot)$  монотонные взаимно однозначные, то, как известно [1, 5],

$$K_{UV}(\tau) = \varepsilon_f \varepsilon_g K_{XY}(\tau), \quad \varepsilon_f = \text{sign}[df(x)/dx], \quad (19)$$

т. е. конкоры  $K(\tau)$ ,  $k(\tau)$  инвариантны по модулю своих значений к любым монотонным взаимно однозначным преобразованиям СФ (сигналов), что делает их пригодными для описания нелинейных сигналов, получаемых с помощью подобных преобразований линейных случайных сигналов, и динамики систем типа Гаммерштейна — Винера [1, 2, 5]. Данная инвариантность конкоров является следствием того, что преобразование через одномерные функции распределений  $X(t)$ ,  $Y(t)$  или  $U(t)$ ,  $V(t)$  всегда приводит к канонически вероятностному пространству СФ  $\Xi(t)$ ,  $\Psi(t)$ .

4. Рассмотрим СФ, для которых функции регрессии  $\Xi(t)$  и  $\Psi(t)$  являются линейными:

$$m_{\Xi}(\psi; \tau) = \mathbf{M}_{\Xi}\{\Xi(t) \mid \Psi(t + \tau) = \psi\} = m_{\Xi} + \sigma_{\Xi} \rho_{\Xi\Psi}(\tau)(\psi - m_{\Psi})/\sigma_{\Psi}, \quad (20)$$

$$m_{\Psi}(\xi; \tau) = \mathbf{M}_{\Psi}\{\Psi(t) \mid \Xi(t + \tau) = \xi\} = m_{\Psi} + \sigma_{\Psi} \rho_{\Psi\Xi}(\tau)(\xi - m_{\Xi})/\sigma_{\Xi}. \quad (21)$$

Нетрудно убедиться, что для абсолютно непрерывных распределений СФ  $X(t)$  и  $Y(t)$  всегда  $m_{\Xi} = m_{\Psi} = 1/2$ , а  $\sigma_{\Xi} = \sigma_{\Psi} = 1/\sqrt{12}$ . Следовательно, для них (20) и (21) упрощаются.

Поскольку  $\rho_{\Xi\Psi} = k_{\Xi\Psi} = k_{XY}$ , т. е. функции регрессии (20), (21) пропорциональны  $k_{XY}$ , назовём такие СФ К-линейными в каноническом приведённом вероятностном пространстве или конкорлинейными.

КК-линейность регрессии позволяет по аналогии с СПМ для К-линейных СФ ввести конспектральную плотность мощности  $C(v)$  как прямое преобразование Фурье от ККФ  $K_{XY}(\tau)$ , а именно

$$C_{XY}(v) = S_{\Xi\Psi}(v) = \mathcal{F}\{R_{\Xi\Psi}(\tau); v\} = \mathcal{F}\{K_{XY}(\tau); v\}. \quad (22)$$

Так как монотонные взаимно однозначные безынерционные функциональные преобразования  $f(\cdot)$  и  $g(\cdot)$  не изменяют модуля ККФ,  $C_{XX}(v)$  и  $C_{YY}(v)$  не изменят своего частотного состава при переходе от  $X(t)$  к  $U(t) = f[X(t)]$  и  $Y(t)$  к  $V(t) = g[X(t)]$ , а

$$C_{UV}(v) = \varepsilon_f \varepsilon_g C_{XY}(v). \quad (23)$$

Это позволяет использовать конспектральную плотность мощности для характеристики кончастотного состава сигналов в нелинейных безынерционных системах, а также для исследования нелинейных динамических систем типа Гаммерштейна — Винера, т. е. систем вида безынерционный нелинейный элемент  $\rightarrow$  динамический линейный элемент  $\rightarrow$  безынерционный нелинейный элемент [5], а именно раздельного исследования нелинейности (статики, нелинейных элементов) и динамики (линейных инерционных элементов и всей системы).

**Конкоры нелинейных СФ и их применение для оценивания параметров связи.** Как видно из приведённых на рис. 3–5 примеров, КФ при нелинейных регрессиях может иметь сложное описание зависимости её от базового параметра связи  $|\varphi| < 1$  или  $\zeta(\tau)$ ,  $0 \leq \zeta \leq 1$ , двумерного распределения  $X(t)$ ,  $Y(t)$  либо вектора  $(X(t), Y(t))$ . В свою очередь, такая связь может сложным образом зависеть от параметров формы  $\alpha$  распределений  $X(t)$ ,  $Y(t)$ . В данном случае конкоры не только существуют для всех СФ, но, во-первых, не зависят от  $\alpha$ , во-вторых, могут иметь значительно более простые зависимости от параметров связи  $\varphi(\tau)$ ,  $\zeta(\tau)$ . Это позволяет через обратные зависимости  $\varphi(\tau)$  или

Таблица 6

№ п/п	Плотность распределения $X(t), Y(t + \tau)$	$\rho_{XY}(\tau)$	$K_{XY}(\tau)$
1	Нормальная (Гаусса) с параметрами связи $\varphi(\tau)$ , $-1 < \varphi < 1$ , $N(a_1, a_2; \lambda_1, \lambda_2; \varphi(\tau))$	$\varphi(\tau)$	$\frac{6}{\pi} \arcsin[\varphi(\tau)/2] \approx$ $\approx \rho_{XY}(\tau)$
2	$S_{L-}, S_{U-}, S_{B-}, S_{\Phi}$ -плотности и другие для СФ, полученных от нормального с помощью взаимно однозначных монотонных преобразований $f(\cdot), g(\cdot)$	Зависит от вида $f(\cdot), g(\cdot)$ и может иметь сложные выражения (см. примеры в подрисуночных подписях к рис. 3–5)	$\frac{6}{\pi} \arcsin[\varphi(\tau)/2]$
3	Плотность L-распределения: $\alpha_1 \alpha_2 [\lambda_1 \lambda_2 \Gamma(\beta) \varphi^{(\beta-1)/2} (1-\varphi)]^{-1} \times$ $\times z^{[\alpha_1(\beta+1)-2]/2} u^{[\alpha_2(\beta+1)-2]/2} \times$ $\times \exp \left\{ -\frac{1}{1-\varphi} (z^{\alpha_1} + u^{\alpha_2}) \right\} \times$ $\times I_{\beta-1} \left( \frac{2[z^{\alpha_1} u^{\alpha_2}]^{1/2}}{1-\varphi} \right);$ $z = (x - a_1)/\lambda_1;$ $u = (y - a_2)/\lambda_2; z, u \geq 0;$ $ a_1 ,  a_2  < \infty;$ $\varphi = \varphi(\tau) = \zeta(\tau);$ $0 \leq \varphi \leq 1; \alpha_1, \alpha_2, \beta > 0;$ $\Gamma(\cdot)$ — гамма-функция; $I_{\beta}(\cdot)$ — функция Бесселя	$R_{XY}(\tau) = \lambda_1 \lambda_2 \Gamma(\beta + 1/\alpha_1) \times$ $\times \Gamma(\beta + 1/\alpha_2) \Gamma^{-2}(\beta) \times$ $\times [(1-\varphi)^{\beta+1/\alpha_1+1/\alpha_2} \times$ $\times F(1/\alpha_1; \beta + 1/\alpha_2; \beta; \varphi) - 1];$ $F(\alpha, \beta; \gamma; x)$ — гиперболическая функция	$\frac{3\varphi(\tau)}{4-\varphi(\tau)} = \frac{3\zeta(\tau)}{4-\zeta(\tau)}$
4	Пирсона I: $\Gamma(\alpha + \beta)(1+z)^{\alpha-1}(1-z)^{\beta-1} \times$ $\times (1+u)^{\alpha-1}(1-z)^{\beta-1} \times$ $[\lambda_1 \lambda_2 \Gamma(\alpha) \Gamma(\beta) 2^{2(\alpha+\beta-1)}]^{-1} \times$ $\times \sum_{n=0}^{\infty} A_n P_n^{(\alpha, \beta)}(z) P_n^{(\alpha, \beta)}(u) \times$ $\times \varphi^{n(n+\alpha+\beta-1)},$ $\alpha, \beta \geq 0; 0 < \varphi = \varphi(\tau) \leq 1;$ $A_n = \frac{(2n + \alpha + \beta - 1) \Gamma(n + \alpha + \beta - 1)}{[(n + \alpha) \Gamma(n + \beta) n!]}$	$\varphi^{\alpha+\beta}(\tau) = \zeta^{\alpha+\beta}(\tau)$	$\varphi^2(\tau) = \zeta^2(\tau)$

*Примечание.* Частным случаем L-распределения являются распределения Накагами, Максвелла, Вейбулла, Рэлея, экспоненциальное, гамма.

$\zeta(\tau)$  от ККФ  $K(\tau)$ ,  $k(\tau)$  находить оценки  $\hat{\varphi}(\tau)$ ,  $\hat{\zeta}(\tau)$  по оценкам  $\hat{K}(\tau)$ ,  $\hat{k}(\tau)$  проще, чем по оценкам  $\hat{R}(\tau)$ ,  $\hat{\rho}(\tau)$ , если, конечно,  $R(\tau)$ ,  $\rho(\tau)$  существуют.

Примеры таких соотношений приведены в табл. 6.

**Заключение.** В данной работе рассмотрена проблема применения традиционного корреляционно-спектрального анализа сигналов, когда они адекватно могут описываться только случайными функциями с нелинейной регрессией. В качестве альтернативы предложено использовать конкорреляционно-спектральный анализ. Он связан с предварительным преобразованием мгновенных значений сигналов через априори известные или апостериори получаемые их одномерные законы распределения с последующим применением обычного корреляционно-спектрального анализа. Первичные исследования показывают, что использование вместо неизвестных одномерных функций распределения  $F_X(x)$ ,  $F_Y(y)$  их непараметрических оценок в эмпирических аналогах преобразований (10)–(13), (18) достаточно для сравнительно точного оценивания конкорров, тем более что при больших коэффициентах эксцесса распределений статистические погрешности конкорров могут быть существенно меньше, чем у традиционных КФ [1, 6–9].

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Губарев В. В.** Алгоритмы спектрального анализа случайных сигналов. Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2005. 660 с.
2. **Губарев В. В.** Вероятностные модели: Справочник. Новосибирск: НЭТИ, 1992. Ч. 1. 191 с.; Ч. 2. С. 197–421.
3. **Деч Р.** Нелинейные преобразования случайных процессов. М.: Сов. радио, 1964. 198 с.
4. **Тарасенко Ф. П.** Непараметрическая статистика. Томск: ТПУ, 1976. 294 с.
5. **Губарев В. В.** Корреляционно-спектральные характеристики, инвариантные к взаимно однозначным безынерционным функциональным преобразованиям случайных процессов // *АиТ*. 1987. № 5. С. 75–83; 1991. № 2. С. 189.
6. **Губарев В. В.** Многомерные временные и спектральные конкоры стационарных случайных процессов и их непараметрические оценки // *Изв. вузов. Сер. Физика*. 1995. **38**, № 9. С. 26–31.
7. **Губарев В. В.** Алгоритмы статистических измерений. М.: Энергоатомиздат, 1985. 272 с.
8. **Леньков С. В.** Повышение точности оценки корреляционных функций реализаций дискретных сигналов // *Автоматрия*. 2009. **45**, № 5. С. 27–33.
9. **Кульчин Ю. Н., Витрик О. Б., Ланцов А. Д., Краева Н. П.** Корреляционный метод обработки спекл-картин динамического рассеяния света малоразмерными частицами на основе пространственного усреднения данных // *Автоматрия*. 2010. **47**, № 3. С. 95–100.

*Поступила в редакцию 1 апреля 2011 г.*