$\mathcal{AMS}$ subject classification: 34G20, 74G15, 65B99

Двух- и трехточечные методы с памятью для решения нелинейных уравнений

Н. Чоубей[1], Дж.П. Джаисвал[2]

[1]Department of Mathematics, Oriental Institute of Science and Technology, Bhopal, M.P., India-462021

[2]Department of Mathematics, Maulana Azad National Institute of Technology, Bhopal, M.P., India-462051

E-mails: nehachby2@gmail.com (Чоубей Н.), asstprofjpmanit@gmail.com (Джаисвал Дж.П.)

Чоубей Н., Джаисвал Дж.П. Двух- и трехточечные методы с памятью для решения нелинейных уравнений // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние. — Новосибирск, 2017. — Т. 20, № 1. — С. 91–106.

Основная цель и стимул при построении двух- и трехточечных методов с памятью — достижение наилучшей вычислительной эффективности без дополнительного оценивания функций. В этой связи мы модифицировали существующие методы без памяти четвертого и восьмого порядков с оптимальным порядком сходимости с использованием различных аппроксимаций самоускоряющихся параметров. Эти параметры были вычислены с использованием эрмитового интерполяционного многочлена, ускоряющего порядок сходимости этих методов без памяти. В частности, порядок R-сходимости предлагаемых двух- и трехшаговых методов с памятью увеличивается с четвертого до пятого и с восьмого до десятого. Еще одним преимуществом этих методов является то, что условие $f'(x) \neq 0$ в окрестности требуемого корня, налагаемое на метод Ньютона, может быть снято. Также приводится численное сравнение для подтверждения теоретических результатов.

DOI: 10.15372/SJNM20170109

Ключевые слова: *итерационный метод, схема без памяти, схема с памятью, вычислительная эффективность, численный результат.*

Choubey N., Jaiswal J.P. Two- and three-point with memory methods for solving nonlinear equations // Siberian J. Num. Math. / Sib. Branch of Russ. Acad. of Sci. — Novosibirsk, 2017. — Vol. 20, № 1. — P. 91–106.

The main objective and inspiration in the construction of two- and three-point with memory methods is to attain the utmost computational efficiency without any additional function evaluations. At this juncture, we have modified the existing fourth and eighth order without memory methods with optimal order of convergence by means of different approximations of self-accelerating parameters. The parameters are calculated by a Hermite interpolating polynomial, which accelerates the order of convergence of the without memory methods. In particular, the R-order convergence of the proposed two- and three-step with memory methods is increased from four to five and eight to ten. One more advantage of these methods is that the condition $f'(x) \neq 0$ in the neighborhood of the required root, imposed on Newton's method, can be removed. Numerical comparison is also stated to confirm the theoretical results.

Keywords: *iterative method, without memory scheme, with memory scheme, computational efficiency, numerical result.*

1. Введение

В настоящее время решение нелинейного уравнения $f(x) = 0$ является актуальной практической задачей. Много итерационных методов было предложено для получения решения нелинейных уравнений (см. [1–3, 6, 8, 11, 12]). В этих статьях итерационные методы принадлежат к важной области численного анализа, поскольку они применяются во многих областях теоретических и прикладных наук. Среди них наиболее известным одноточечным итерационным методом без памяти является метод Ньютона–Рафсона, который задается уравнением

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \tag{1.1}$$

и сходится квадратично. Одним недостатком этого метода является условие $f'(x_n) \neq 0$, которое ограничивает его практическое применение. Для решения этой проблемы Кумар с соавторами [3] разработали новый одноточечный итерационный метод, задаваемый как

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n) - \lambda_1 f(x_n)}. \tag{1.2}$$

Если мы возьмем $\lambda_1 = 0$, то получим метод Ньютона. Выражение для ошибки вышеупомянутого метода следующее:

$$e_{n+1} = (\lambda_1 - c_2)e_n^2 + O(e_n^3), \tag{1.3}$$

где $e_n = x_n - \alpha$, $c_k = \dfrac{1}{k!}\dfrac{f^{(k)}(\alpha)}{f'(\alpha)}$, $k = 2, 3, \ldots$, α — корень уравнения $f(x) = 0$. Теперь обсудим классификацию возможных типов итерационной функции (ИФ). Эти ИФ были разбиты на категории на основе требуемой для них информации [4, 5].

(i) *Одноточечный итерационный метод без памяти.* В методах этого типа x_{k+1} может определяться только новыми данными при x_k. Старые данные повторно не используются. Таким образом, $x_{k+1} = \phi(x_k)$. Тогда ϕ будет называться одноточечной ИФ. Самый известный пример функции этого типа — ИФ Ньютона.

(ii) *Одноточечная итерационная функция с памятью.* В этой категории x_{k+1} может определяться новыми данными при x_k и повторно используемыми данными при $x_{k-1}, \ldots, x_{k-n}$. Таким образом, $x_{k+1} = \phi(x_k; x_{k-1}, \ldots, x_{k-n})$. Тогда ϕ будет называться одноточечной ИФ с памятью, поскольку здесь x_k — новая информация, а $x_{k-1}, \ldots, x_{k-n}$ — повторно используемая информация. Самым известным примером одноточечного метода с памятью является метод секущей. В приведенном выше отображении точка с запятой отделяет точку, в которой используются новые данные, от точек, в которых повторно используются старые данные.

(iii) *Многоточечная итерационная функция без памяти.* В методах данного типа x_{k+1} может определяться только по новой информации при $x_k, w_1(x_k), \ldots, w_n(x_k)$ $(n \geq 1)$. Старые данные повторно не используются. Таким образом, $x_{k+1} = \phi(x_k, w_1(x_k), \ldots, w_n(x_k))$. Тогда ϕ будет называться многоточечной итерационной функцией без памяти. Многоточечные итерационные функции могут использоваться, поскольку они обходят некоторые характерные ограничения на одноточечные ИФ с памятью и без нее.

(iv) *Многоточечная итерационная функция с памятью.* Наконец, в этой категории определим другую итерационную функцию ϕ, имеющую аргументы z_j, где каждый такой аргумент представляет $k+1$ величин $x_j, w_1(x_j), \ldots, w_n(x_j)$ $(n \geq 1)$. Определим итерационное отображение как $x_{k+1} = \phi(z_k; z_{k-1}, \ldots, z_{k-n})$. Тогда ϕ будет называться многоточечной ИФ с памятью. В приведенном выше отображении точка с запятой отделяет точки, в которых используется новая информация, от точки, в которой повторно используется старая информация, т. е. на каждом шаге итерации мы должны сохранить информацию о последних n аппроксимациях x_j и для каждой аппроксимации мы должны вычислить n выражений $w_1(x_j), \ldots, w_n(x_j)$.

Многоточечные схемы имеют огромное практическое значение, поскольку они преодолевают теоретические ограничения любого одноточечного метода относительно порядка сходимости и вычислительной эффективности. Кроме того, многоточечные методы служат для создания аппроксимаций высокой точности, а быстрое развитие цифровых компьютеров, компьютерной арифметики и символического исчисления делает возможным еще более эффективное применение многоточечных методов. Многоточечные методы с памятью используют информацию с последних и предыдущих итераций. Хотя первоначальная схема построения этого класса методов была создана в 1964 году и описана в книге Трауба, роль этой области очень редко отмечается в литературе. Чтобы восполнить этот пробел, представим двух- и трехшаговую схемы с памятью. Порядок сходимости новых многоточечных методов с памятью выше, чем у соответствующих оптимальных многоточечных методов без памяти. Увеличение порядка сходимости получается благодаря использованию нескольких самоускоряющихся параметров. Ускоренная скорость сходимости получена без дополнительного оценивания функций, что приводит к лучшей вычислительной эффективности.

Основная цель данной статьи — исследование многоточечной итерационной функции с памятью, поскольку она может улучшить порядок сходимости методов без памяти без дополнительных вычислений и имеет очень высокую вычислительную эффективность. В данной статье мы представляем два новых многоточечных итерационных метода с памятью для решения нелинейных уравнений с последующим анализом их сходимости. В пункте 2 мы строим двух- и трехточечные итерационные методы с памятью. Эти методы получены с использованием самоускоряющегося параметра. Этот параметр вычисляется путем интерполяционного многочлена Эрмита, где порядок R-сходимости двухточечного метода увеличивается с 4 до 4.5616, 4.7913, 5, а трехточечного метода — с 8 до 9, 9.5846, 9.7958, 10. В конце статьи теоретические результаты подтверждаются путем рассмотрения численных примеров.

2. Анализ сходимости для методов с памятью

В следующем пункте мы улучшим скорость сходимости метода Бела и Канвара [6] путем замены параметра T на T_n. Сначала рассмотрим оптимальную схему четвертого порядка без памяти, представленную в [6]:

$$\begin{aligned} y_n &= x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n) - Tf(x_n)}, \\ x_{n+1} &= y_n - \left(\frac{f(y_n)}{b_1 f'(x_n) - Tf(x_n)}\right)\left(\frac{b_3 f(x_n) + b_4 f(y_n)}{f(x_n) + b_2 f(y_n)}\right), \end{aligned} \tag{2.1}$$

где $b_1 = \frac{1}{2}$, $b_3 = \frac{1}{2}$, $b_4 = \frac{b_2+2}{2}$, $b_2 = \gamma - 2$ и $T, \gamma \in \mathbb{R}$. Уравнение ошибки для каждого шага (2.1) следующее:

$$\begin{aligned} e_{n,y} = y_n - \alpha = \big(c_2 - T\big)e_n^2 + \big(2c_2^2 + T^2 - 2c_2T - 2c_3\big)e_n^3 + \\ \Big(T^3 + 5Tc_2^2 - 4c_2^3 - 4Tc_3 + c_2\big(7c_3 - 3T^2\big) - 3c_4\Big)e_n^4 + O\big(e_n^5\big) \end{aligned} \tag{2.2}$$

и

$$e_{n+1} = \big(c_2 - T\big)\Big(2(b_2+1)T^2 - (4b_2+7)Tc_2 + (2b_2+5)c_2^2 - c_3\Big)e_n^4 + O\big(e_n^5\big), \tag{2.3}$$

где $e_{n,y} = y_n - \alpha$, $e_n = x_n - \alpha$, $c_j = \frac{f^{(j)}(\alpha)}{j!f'(\alpha)}$ $(j = 2, 3, \ldots)$. Подставив T_n вместо T в (2.1), мы получим следующий итерационный метод с памятью:

$$
\begin{aligned}
y_n &= x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n) - T_n f(x_n)},\\
x_{n+1} &= y_n - \left(\frac{f(y_n)}{b_1 f'(x_n) - T_n f(x_n)}\right)\left(\frac{b_3 f(x_n) + b_4 f(y_n)}{f(x_n) + b_2 f(y_n)}\right),
\end{aligned}
\tag{2.4}
$$

обозначаемый OM4. Из (2.3) видно, что порядок сходимости (2.1) четвертый при $T \neq c_2$. Взяв значение $T = c_2 = \frac{f''(\alpha)}{2f'(\alpha)}$, можно установить, что порядок метода в (2.1) был бы 5. Для такого типа ускорения сходимости и в реальных условиях $f'(\alpha)$ и $f''(\alpha)$ не могут быть получены. В противном случае мы могли бы заменить параметр T на T_n. Для определения значения параметра мы можем использовать информацию из текущей и предыдущей итераций, и это дает $\lim_{n\to\infty} T_n = c_2 = \frac{f''(\alpha)}{2f'(\alpha)}$, так что постоянная асимптотической сходимости четвертого порядка равна нулю в (2.3). Рассмотрим следующую формулу для T_n.

Метод 1:
$$T_n = \frac{H_2''(x_n)}{2f'(x_n)}, \tag{2.5}$$

где $H_2(x) = f(x_n) + f\big[x_n, x_n\big](x - x_n) + f\big[x_n, x_n, y_{n-1}\big](x - x_n)^2$ и $H_2''(x) = 2f\big[x_n, x_n, y_{n-1}\big]$.

Метод 2:
$$T_n = \frac{H_3''(x_n)}{2f'(x_n)}, \tag{2.6}$$

где $H_3(x) = H_2(x) + f\big[x_n, x_n, y_{n-1}, x_{n-1}\big](x - x_n)^2(x - y_{n-1})$ и $H_3''(x) = 2f\big[x_n, x_n, y_{n-1}\big] + 2f\big[x_n, x_n, y_{n-1}, x_{n-1}\big](x_n - y_{n-1})$.

Метод 3:
$$T_n = \frac{H_4''(x_n)}{2f'(x_n)}, \tag{2.7}$$

где $H_4(x) = H_3(x) + f\big[x_n, x_n, y_{n-1}, x_{n-1}, x_{n-1}\big](x - x_n)^2(x - y_{n-1})(x - x_{n-1})$, $H_4''(x) = 4f\big[x_n, x_n, y_{n-1}\big] + (2f\big[x_n, x_n, y_{n-1}, x_{n-1}\big] - 2f\big[x_n, y_{n-1}x_{n-1}, x_{n-1}\big])(x_n - y_{n-1})$ и $f\big[x_n, x_n\big] = f'(x_n)$, $f\big[x_n, y_n\big] = \frac{f(x_n) - f(y_n)}{x_n - y_n}$ — две разделенные разности первого порядка. Разделенная разность высокого порядка $f\big[x_n, x_n, t_0, t_1, \ldots, t_{m-2}\big]$ степени m определяется как $f\big[x_n, x_n, t_0, t_1, \ldots, t_{m-2}\big] = \frac{f[x_n, t_0, t_1, \ldots, t_{m-2}] - f[x_n, x_n, t_0, t_1, \ldots, t_{m-3}]}{t_{m-2} - x_n}$ $(m \geq 2)$, и эти обозначения будут использоваться во всей статье.

Замечание. Интерполяционный многочлен Эрмита $H_m(x)$ $(m = 2, 3, 4)$ удовлетворяет условию $H_m'(x_n) = f'(x_n)$ $(m = 2, 3, 4)$. Таким образом, $T_n = \frac{H_m''(x_n)}{2f'(x_n)}$ можно выразить как $T_n = \frac{H_m''(x_n)}{2H_m'(x_n)}$ $(m = 2, 3, 4)$.

Теорема 1. *Пусть H_m — интерполяционный многочлен Эрмита степени m, интерполирующий функцию f в узлах интерполяции $x_n, x_n, t_0, \ldots, t_{m-2}$ в интервале I, и пусть производная $f^{(m+1)}$ непрерывна в I и интерполяционный многочлен Эрмита* $H_m(x_n) = f(x_n)$, $H_m'(x_n) = f'(x_n)$, $H_m(t_j) = f(t_j)$ $(j = 0, 1, \ldots, m - 2)$. *Определим ошибки $e_{t,j} = t_j - \alpha$ $(j = 0, 1, \ldots, m - 2)$ и предположим, что*

(1) *все узлы* $x_n, t_0, \dots, t_{m-2}$ *достаточно близки к нулю* α;
(2) *условие* $e_n = O(e_{t,0} \cdots e_{t,m-2})$ *удовлетворяется.*
Тогда

$$H''_m(x_n) = 2f'(\alpha)\bigg(c_2 - (-1)^{m-1} c_{m+1} \prod_{j=0}^{m-2} e_{t,j} + 3c_3 e_n\bigg), \tag{2.8}$$

$$T_n = \frac{H''(x_n)}{2f'(x_n)} \sim \bigg(c_2 - (-1)^{m-1} c_{m+1} \prod_{j=0}^{m-2} e_{t,j} + (3c_3 - 2c_2^2)e_n\bigg), \tag{2.9}$$

$$T_n - c_2 \sim \bigg(- (-1)^{m-1} c_{m+1} \prod_{j=0}^{m-2} e_{t,j} + (3c_3 - 2c_2^2)e_n\bigg). \tag{2.10}$$

Доказательство. Выражение для ошибки интерполяции Эрмита может быть представлено следующим образом:

$$f(x) - H_m(x_n) = \frac{f^{(m+1)}(\xi)}{(m+1)!}(x - x_n)^2 \prod_{j=0}^{m-2} (x_n - t_j), \quad \xi \in I. \tag{2.11}$$

После двойного дифференцирования (2.11) в точке $x = x_n$ мы получим

$$H''_m(x_n) = f''(x) - 2\frac{f^{(m+1)}(\xi)}{(m+1)!} \prod_{j=0}^{m-2} (x_n - t_j), \quad \xi \in I. \tag{2.12}$$

Ряд Тейлора производной от f в точке $x_n \in I$ и $\xi \in I$ у нуля α для f дает

$$f'(x_n) = f'(\alpha)\big(1 + 2c_2 e_n + 3c_3 e_n^2 + O\big(e_n^3\big)\big), \tag{2.13}$$

$$f''(x_n) = f'(\alpha)\big(2c_2 + 6c_3 e_n + O\big(e_n^2\big)\big) \tag{2.14}$$

и

$$f^{(m+1)}(\xi) = f'(\alpha)\big((m+1)! c_{m+1} + (m+2)! c_{m+2} e_\xi + O(e_\xi^2)\big), \tag{2.15}$$

где $e_\xi = \xi - \alpha$. Подставив (2.14), (2.15) в (2.12), мы получим

$$H''_m(x_n) = 2f'(\alpha)\bigg(c_2 - (-1)^{m-1} c_{m+1} \prod_{j=0}^{m-2} e_{t,j} + 3c_3 e_n\bigg), \tag{2.16}$$

что означает

$$\frac{H''_m(x_n)}{2f'(x_n)} \sim \bigg(c_2 - (-1)^{m-1} c_{m+1} \prod_{j=0}^{m-2} e_{t,j} + (3c_3 - 2c_2^2)e_n\bigg). \tag{2.17}$$

Следовательно,

$$T_n \sim \bigg(c_2 - (-1)^{m-1} c_{m+1} \prod_{j=0}^{m-2} e_{t,j} + (3c_3 - 2c_2^2)e_n\bigg), \tag{2.18}$$

или

$$T_n - c_2 \sim \bigg(- (-1)^{m-1} c_{m+1} \prod_{j=0}^{m-2} e_{t,j} + (3c_3 - 2c_2^2)e_n\bigg). \tag{2.19}$$

Понятие сходимости порядка R [7] и последующее утверждение (см. [8, с. 287]) будут использоваться для аппроксимации порядка сходимости итерационного метода (2.4). □

Теорема 2. *Если ошибки аппроксимаций $e_j = x_j - \alpha$, полученные итерационным методом нахождения корня, удовлетворяют*

$$e_{k+1} \sim \prod_{i=0}^{m-2} (e_{k-i})^{m_i}, \quad k \geq k(\{e_k\}),$$

то порядок R сходимости итерационного метода, обозначаемый $O_R(\mathrm{IM}, \alpha)$, удовлетворяет неравенству $O_R(\mathrm{IM}, \alpha) \geq s^*$, где s^* — единственное положительное решение уравнения $s^{n+1} - \sum_{i=0}^{n} m_i s^{n-i} = 0$.

Теперь мы можем сформулировать следующую теорему сходимости для итерационного метода с памятью (2.4).

Теорема 3. *Пусть меняющийся параметр T_n в итерационном методе* (2.4) *вычислен путем* (2.5)–(2.7). *Если первоначальная аппроксимация x_0 достаточно близка к простому корню α для $f(x)$, то порядок R сходимости итерационных методов* (2.4), (2.5) *и* (2.4), (2.6), *и* (2.4), (2.7) *с памятью составляет по крайней мере* $(5+\sqrt{17})/2 \approx 4.5616$, $(5+\sqrt{21})/2 \approx 4.7913$ *и* 5 *соответственно.*

Доказательство. Пусть последовательность $\{x_n\}$ сгенерирована итерационным методом и сходится к корню α для $f(x)$ с R-порядком $O_R(\mathrm{IM}, \alpha) \geq r$. Тогда мы запишем

$$e_{n+1} \sim D_{n,r} e_n^r. \tag{2.20}$$

Если мы возьмем $n \to \infty$, то $D_{n,r}$ стремится к постоянной асимптотической ошибке D_r итерационного метода. Таким образом,

$$e_{n+1} \sim D_{n,r} (D_{n-1,r} e_{n-1}^r)^r = D_{n,r} D_{n-1,r}^r e_{n-1}^{r^2}. \tag{2.21}$$

Следующее выражение для ошибки метода с памятью (2.4) может быть получено с использованием (2.2), (2.3) и меняющегося параметра T_n:

$$e_{n,y} = y_n - \alpha \sim (T_n - c_2) e_n^2 \tag{2.22}$$

и

$$e_{n+1} = x_{n+1} - \alpha \sim B_{n,4} (T_n - c_2) e_n^4, \tag{2.23}$$

где $B_{n,4}$ — меняющаяся величина ввиду самоускоряющегося параметра T_n в силу (2.3). Здесь мы исключили члены высокого порядка в (2.22) и (2.23).

Метод 1. T_n вычисляется по (2.5) подобно получению (2.20). Предположим, что итерационная последовательность $\{y_n\}$ имеет R-порядок p. Тогда

$$e_{n,y} \sim D_{n,p} e_n^p \sim D_{n,p} (D_{n-1,r} e_{n-1}^r)^p = D_{n,p} D_{n-1,r}^p e_{n-1}^{rp}. \tag{2.24}$$

Используя теорему 1 для $m = 2$ и $t_0 = y_{n-1}$, мы получим

$$T_n - c_2 \sim c_3 e_{t,0} = c_3 e_{n-1,y}. \tag{2.25}$$

Теперь из (2.22), (2.23) и (2.25) мы имеем

$$e_{n,y} \sim c_3 e_{n-1,y}(D_{n-1,r}e_{n-1}^r)^2 \sim c_3 D_{n-1,p} D_{n-1,r}^2 e_{n-1}^{2r+p}, \tag{2.26}$$

$$e_{n+1} \sim B_{n,4} c_3 e_{n-1,y} e_n^4 \sim B_{n,4} c_3 D_{n-1,p} e_{n-1}^p (D_{n-1,r} e_{n-1}^r)^4 \sim B_{n,4} c_3 D_{n-1,p} D_{n-1,r}^4 e_{n-1}^{4r+p}. \tag{2.27}$$

Сравнив компоненты e_{n-1} в двух парах соотношений (2.24), (2.26) и (2.21), (2.27), мы получим систему уравнений:

$$\begin{aligned} 2r+p &= rp, \\ 4r+p &= r^2. \end{aligned} \tag{2.28}$$

Положительное решение системы (2.28) задается как $r = (5+\sqrt{17})/2$ и $p = (1+\sqrt{17})/2$. Поэтому R-порядок методов с памятью (2.4), (2.5) составляет по крайней мере $(5+\sqrt{17})/2 \approx 4.5616$.

Метод 2. T_n вычисляется по (2.6). Используя теорему 1 для $m = 3$, $t_0 = y_{n-1}$ и $t_1 = x_{n-1}$, имеем

$$T_n - c_2 \sim -c_4 e_{t,0} e_{t,1} = -c_4 e_{n-1,y} e_{n-1}. \tag{2.29}$$

В соответствии с (2.22), (2.23) и (2.29) находим

$$e_{n,y} \sim (T_n - c_2)e_n^2 \sim -c_4 e_{n-1} e_{n-1,y} (D_{n-1,r} e_{n-1}^r)^2 \sim -c_4 D_{n-1,p} D_{n-1,r}^2 e_{n-1}^{2r+p+1}, \tag{2.30}$$

$$\begin{aligned} e_{n+1} &\sim -B_{n,4} c_4 e_{n-1} e_{n-1,y} e_n^4 \sim -B_{n,4} c_4 e_{n-1} D_{n-1,p} e_{n-1}^p (D_{n-1,r} e_{n-1}^r)^4 \\ &\sim -B_{n,4} c_4 D_{n-1,p} D_{n-1,r}^4 e_{n-1}^{4r+p+1}. \end{aligned} \tag{2.31}$$

Сравнив компоненты e_{n-1} в двух парах соотношений (2.24), (2.30) и (2.21), (2.31), получим систему уравнений:

$$\begin{aligned} 2r+p+1 &= rp, \\ 4r+p+1 &= r^2. \end{aligned} \tag{2.32}$$

Положительное решение системы (2.32) задается как $r = (5+\sqrt{21})/2$ и $p = (1+\sqrt{21})/2$. Поэтому R-порядок методов с памятью (2.4), (2.6) составляет по крайней мере $(5+\sqrt{21})/2 \approx 4.7913$.

Метод 3. T_n вычисляется по (2.7). Интерполяционный многочлен Эрмита $H_4(x)$ удовлетворяет условиям: $H_4(x_n) = f(x_n)$, $H_4'(x_n) = f'(x_n)$, $H_4(y_{n-1}) = f(y_{n-1})$, $H_4(x_{n-1}) = f(x_{n-1})$ и $H_4'(x_{n-1}) = f'(x_{n-1})$. Ошибку интерполяции Эрмита можно выразить следующим образом:

$$f(x) - H_4(x) = \frac{f^{(5)}(\xi)}{5!}(x-x_n)^2(x-x_{n-1})^2(x-y_{n-1}), \quad \xi \in I. \tag{2.33}$$

После двойного дифференцирования (2.33) в точке $x = x_n$ мы получим

$$H_4''(x_n) = f''(x_n) - 2\frac{f^{(5)}(\xi)}{5!}(x_n-x_{n-1})^2(x_n-y_{n-1}), \quad \xi \in I. \tag{2.34}$$

Ряды Тейлора производных от f в точках $x_n \in I$ и $\xi \in I$ у нуля α для f дают

$$f'(x_n) = f'(\alpha)\big(1 + 2c_2 e_n + 3c_3 e_n^2 + O(e_n^3)\big), \tag{2.35}$$

$$f''(x_n) = f'(\alpha)\big(2c_2 + 6c_3 e_n + O(e_n^2)\big) \tag{2.36}$$

и

$$f^{(m+1)}(\xi) = f'(\alpha)\big((m+1)!c_{m+1} + (m+2)!c_{m+2}e_\xi + O(e_\xi^2)\big), \tag{2.37}$$

где $e_\xi = \xi - \alpha$. Подставив (2.37) и (2.36) в (2.34), мы получим

$$H_4''(x_n) = 2f'(\alpha)\big(c_2 - c_5 e_{n-1,y}e_{n-1}^2 + 3c_3 e_n\big). \tag{2.38}$$

С использованием (2.22) и (2.23) имеем

$$e_{n-1,y} = y_{n-1} - \alpha \sim (T_{n-1} - c_2)e_{n-1}^2, \tag{2.39}$$

$$e_n = x_n - \alpha \sim B_{n-1,4}(T_{n-1} - c_2)e_{n-1}^4. \tag{2.40}$$

Тогда

$$e_{n-1,y}e_{n-1}^2 \sim (T_{n-1} - c_2)e_{n-1}^4 \sim \frac{1}{B_{n-1,4}}\, e_n. \tag{2.41}$$

Теперь, подставив значение (2.41) в (2.38), получим

$$H_4''(x_n) = 2f'(a)\left(c_2 + \left(3c_3 - \frac{c_5}{B_{n-1,4}}\right)e_n\right), \tag{2.42}$$

а это означает, что

$$\frac{H_4''(x_n)}{2f'(x_n)} \sim c_2 + \left(3c_3 - 2c_2^2 - \frac{c_5}{B_{n-1,4}}\right)e_n. \tag{2.43}$$

Следовательно,

$$T_n = \frac{H_4''(x_n)}{2f'(x_n)} \sim c_2 + \left(3c_3 - 2c_2^2 - \frac{c_5}{B_{n-1,4}}\right)e_n, \tag{2.44}$$

или

$$T_n - c_2 \sim \left(3c_3 - 2c_2^2 - \frac{c_5}{B_{n-1,4}}\right)e_n. \tag{2.45}$$

Подставив значение (2.45) в (2.23), получим

$$e_{n+1} \sim B_{n,4}\left(3c_3 - 2c_2^2 - \frac{c_5}{B_{n-1,4}}\right)e_n^5. \tag{2.46}$$

В результате R-порядок методов с памятью (2.4), (2.7) — по крайней мере 5. Доказательство окончено. □

Теперь рассмотрим оптимальную схему восьмого порядка без памяти этой же статьи [6], задаваемую так:

$$\begin{aligned} y_n &= x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n) - Tf(x_n)}, \\ z_n &= y_n - \frac{f(y_n)(f(x_n) + \gamma f(y_n))}{(f'(x_n) - 2Tf(x_n))(f(x_n) + (\gamma - 2)f(y_n))}, \\ x_{n+1} &= z_n - f(z_n)\Big(f[z_n, y_n] + f[z_n, y_n, x_n](z_n - y_n) + \\ &\qquad f[z_n, y_n, x_n, x_n](z_n - y_n)(z_n - x_n)\Big)^{-1}, \end{aligned} \tag{2.47}$$

где $T, \gamma \in \mathbb{R}$. Выражения для ошибки для каждого шага метода в (2.47) следующие:

$$e_{n,y} = y_n - \alpha = (T - c_2)e_n^2 + O\big(e_n^3\big), \tag{2.48}$$

$$e_{n,z} = z_n - \alpha = (c_2 - T)\Big[2(b_2+1)T^2 - (4b_2+7)Tc_2 + (2b_2+5)c_2^2 - c_3\Big]e_n^4 + O\big(e_n^5\big), \tag{2.49}$$

$$\begin{aligned} e_{n+1} = \Big[&(T - c_2)^2\big(2(\gamma-1)T^2 - (4\gamma-17)Tc_2 + (2\gamma+1)c_2^2 - c_3\big) \times \\ &\big(-T(4\gamma-1)c_2^2 + (2\gamma+1)c_2^3 + c_2\big(2T^2(\gamma-1) - c_3\big) + c_4\big)\Big]e_n^8 + O\big(e_n^9\big). \end{aligned} \tag{2.50}$$

Из (2.50) легко видно, что порядок сходимости в (2.47) — восьмой, когда $T \neq c_2$. Взяв значение $T = c_2 = f''(\alpha)/(2f'(\alpha))$, мы можем установить, что порядок метода в (2.47) был бы 10. Для этого типа ускорения сходимости и в действительности точные значения $f'(\alpha)$ и $f''(\alpha)$ не могут быть получены. Однако мы можем заменить параметр T на T_n. Для определения значения параметра мы можем использовать информацию из текущей и предыдущей итераций; это дает $\lim_{n\to\infty} T_n = c_2 = f''(\alpha)/(2f'(\alpha))$, так что постоянная асимптотической сходимости восьмого порядка равна нулю в (2.50). Рассмотрим следующую формулу для T_n.

Метод 4:
$$T_n = \frac{H_2''(x_n)}{2f'(x_n)}, \tag{2.51}$$

где $H_2(x) = f(x_n) + f[x_n, x_n](x - x_n) + f[x_n, x_n, z_{n-1}](x - x_n)^2$, $H_2''(x_n) = 2f[x_n, x_n, z_{n-1}]$.

Метод 5:
$$T_n = \frac{H_3''(x_n)}{2f'(x_n)}, \tag{2.52}$$

где $H_3(x) = H_2(x) + f[x_n, x_n, z_{n-1}, y_{n-1}](x - x_n)^2(x - z_{n-1})$, $H_3''(x) = H_2''(x_n) + 2f[x_n, x_n, z_{n-1}, y_{n-1}](x_n - z_{n-1})$.

Метод 6:
$$T_n = \frac{H_4''(x_n)}{2f'(x_n)}, \tag{2.53}$$

где $H_4(x) = H_2(x) + f[x_n, x_n, z_{n-1}, y_{n-1}](x - x_n)^2(x - z_{n-1}) + f[x_n, x_n, z_{n-1}, y_{n-1}, x_{n-1}] \times (x - x_n)^2(x - z_{n-1})(x - y_{n-1})$, $H_4''(x_n) = H_2''(x_n) + 2f[x_n, x_n, z_{n-1}, y_{n-1}](x_n - z_{n-1}) + 2f[x_n, x_n, z_{n-1}, y_{n-1}, x_{n-1}](x_n - z_{n-1})(x_n - y_{n-1})$.

Метод 7:
$$T_n = \frac{H_5''(x_n)}{2f'(x_n)}, \tag{2.54}$$

где $H_5(x) = H_4(x) + f[x_n, x_n, z_{n-1}, y_{n-1}, x_{n-1}, x_{n-1}](x - x_n)^2(x - z_{n-1})(x - y_{n-1})(x - x_{n-1})$, $H_5''(x_n) = H_4''(x_n) + 2f[x_n, x_n, z_{n-1}, y_{n-1}, x_{n-1}, x_{n-1}](x_n - z_{n-1})(x_n - y_{n-1})(x_n - x_{n-1})$. Тогда T_n может быть вычислено с использованием приведенных выше трех уравнений. Подставляя T_n вместо T в (2.47), мы получим следующий итерационный метод с памятью:

$$\begin{aligned} y_n &= x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n) - T_n f(x_n)}, \\ z_n &= y_n - \left(\frac{f(y_n)(f(x_n) + \gamma f(y_n))}{(f'(x_n) - 2T_n f(x_n))(f(x_n) + (\gamma-2)f(y_n))}\right), \\ x_{n+1} &= z_n - f(z_n)\Big(f[z_n, y_n] + f[z_n, y_n, x_n](z_n - y_n) + \\ &\qquad f[z_n, y_n, x_n, x_n](z_n - y_n)(z_n - x_n)\Big)^{-1}. \end{aligned} \tag{2.55}$$

Для $\gamma = 1$ метод обозначается OM81, а для $\gamma = 0$ он обозначается OM82.

Теорема 4. *Пусть меняющийся параметр* T_n *в итерационном методе* (2.55) *вычисляется путем* (2.51)–(2.54). *Если первоначальная аппроксимация* x_0 *достаточно близка к простому корню* α *для* $f(x)$, *то* R*-порядок сходимости итерационных методов* (2.55) *с соответствующими выражениями* (2.51)–(2.54) *для* T_n *— по крайней мере* 9, $(5+\sqrt{21}) \approx 9.5826$, $(5+\sqrt{23}) \approx 9.7958$ *и* 10 *соответственно.*

Доказательство. Пусть последовательность $\{x_n\}$ сгенерирована итерационным методом и сходится к корню α для $f(x)$ с R-порядком $O_R(\mathrm{IM}, \alpha) \geq r$. Сформулируем

$$e_{n+1} \sim D_{n,r} e_n^r. \tag{2.56}$$

Если мы возьмем $n \to \infty$, то $D_{n,r}$ стремится к постоянной асимптотической ошибки D_r итерационного метода. Таким образом,

$$e_{n+1} \sim D_{n,r}(D_{n-1,r} e_{n-1}^r)^r = D_{n,r} D_{n-1,r}^r e_{n-1}^{r^2}. \tag{2.57}$$

Следующие выражения для ошибки метода с памятью (2.55) могут быть получены с использованием (2.48)–(2.50) и меняющегося параметра T_n:

$$e_{n,y} = y_n - \alpha \sim (T_n - c_2) e_n^2, \tag{2.58}$$

$$e_{n,z} = z_n - \alpha \sim B_{n,4}(T_n - c_2) e_n^4, \tag{2.59}$$

$$e_{n+1} = x_{n+1} - \alpha \sim B_{n,8}(T_n - c_2)^2 e_n^8, \tag{2.60}$$

где $B_{n,4}$ и $B_{n,8}$ — меняющиеся величины ввиду самоускоряющегося параметра T_n, взятые из (2.49) и (2.50). Здесь мы исключили члены более высокого порядка в (2.59) и (2.60).

Метод 4. T_n вычисляется по (2.51). Это подобно получению (2.56). Предположим, что p и q — R-порядки итерационных последовательностей $\{y_n\}$ и $\{z_n\}$ соответственно. Тогда мы имеем

$$e_{n,y} \sim D_{n,p} e_n^p \sim D_{n,p}(D_{n-1,r} e_{n-1}^r)^p = D_{n,p} D_{n-1,r}^p e_{n-1}^{rp}, \tag{2.61}$$

$$e_{n,z} \sim D_{n,q} e_n^q \sim D_{n,q}(D_{n-1,r} e_{n-1}^r)^q = D_{n,q} D_{n-1,r}^q e_{n-1}^{rq}. \tag{2.62}$$

Взяв $m = 2$ и $t_0 = z_{n-1}$ для теоремы 1, мы получим

$$T_n - c_2 \sim c_3 e_{t,0} = c_3 e_{n-1,z}. \tag{2.63}$$

Теперь из (2.58)–(2.60) и (2.63) имеем

$$e_{n,y} \sim c_3 e_{n-1,z}(D_{n-1,r} e_{n-1}^r)^2 \sim c_3 D_{n-1,q} D_{n-1,r}^2 e_{n-1}^{2r+q}, \tag{2.64}$$

$$e_{n,z} \sim c_3 e_{n-1,z} B_{n,4} e_n^4 \sim c_3 D_{n-1,q} B_{n,4} D_{n-1,r}^4 e_{n-1}^{4r+q}, \tag{2.65}$$

$$e_{n+1} \sim c_3^2 B_{n,8} e_{n-1,z}^2 e_n^8 \sim c_3^2 B_{n,8} D_{n-1,q}^2 e_{n-1}^{2q} D_{n-1,r}^8 e_{n-1}^{8r+2q}. \tag{2.66}$$

Сравнив компоненты e_{n-1} в трех парах соотношений (2.61), (2.64) и (2.62), (2.65), и (2.57), (2.66), мы получим систему уравнений:

$$\begin{aligned} 2r+q&=rp,\\ 4r+q&=rq,\\ 8r+2q&=r^2. \end{aligned} \tag{2.67}$$

Положительное решение системы (2.67) задается путем $r=9$, $q=4.5$ и $p=2.5$. Поэтому R-порядок методов с памятью (2.55), когда T_n вычисляется по (2.51), — по крайней мере 9.

Метод 5. T_n вычисляется по (2.52). Взяв $m=3$, $t_0=z_{n-1}$ и $t_1=y_{n-1}$ для теоремы 1, получим

$$T_n-c_2\sim -c_4e_{t,0}e_{t,1}=-c_4e_{n-1,z}e_{n-1,y}. \tag{2.68}$$

Подставив (2.68) в (2.58)–(2.60), находим

$$\begin{aligned} e_{n,y}&\sim (T_n-c_2)e_n^2\sim -c_42e_{n-1,z}e_{n-1,y}(D_{n-1,r}e_{n-1}^r)^2\\ &\sim -c_4D_{n-1,q}D_{n-1,p}D_{n-1,r}^2e_{n-1}^{2r+q+p}, \end{aligned} \tag{2.69}$$

$$\begin{aligned} e_{n,z}&\sim (T_n-c_2)B_{n,4}e_n^4\sim -c_4B_{n,4}e_{n-1,z}e_{n-1,y}(D_{n-1,r}e_{n-1}^r)^4\\ &\sim -c_4B_{n,4}D_{n-1,q}D_{n-1,p}D_{n-1,r}^4e_{n-1}^{4r+q+p}, \end{aligned} \tag{2.70}$$

$$\begin{aligned} e_{n+1}&\sim -B_{n,8}c_4^2e_{n-1,z}^2e_{n-1,y}^2e_n^8\\ &\sim -B_{n,8}c_4^2D_{n-1,q}^2D_{n-1,p}^2D_{n-1,r}^8e_{n-1}^{8r+2q+2p}. \end{aligned} \tag{2.71}$$

Сравнив компоненты e_{n-1} в трех парах соотношений (2.61), (2.69) и (2.62), (2.70), и (2.57), (2.71), получим систему уравнений:

$$\begin{aligned} 2r+p+q&=rp,\\ 4r+p+q&=rq,\\ 8r+2p+2q&=r^2. \end{aligned} \tag{2.72}$$

Положительное решение системы (2.72) задается путем $r=(5+\sqrt{21})$, $q=(5+\sqrt{21})/2$ и $p=(1+\sqrt{21})/2$. Поэтому R-порядок методов с памятью (2.55), когда T_n вычисляется по (2.52), по крайней мере — 9.5826.

Метод 6. T_n вычисляется по (2.53). Взяв $m=4$, $t_0=z_{n-1}$, $t_1=y_{n-1}$ и $t_2=x_{n-1}$ для теоремы 1, получим

$$T_n-c_2\sim c_5e_{t,0}e_{t,1}e_{t,2}=c_5e_{n-1,z}e_{n-1,y}e_{n-1}. \tag{2.73}$$

Подставив (2.73) в (2.58)–(2.60), находим

$$\begin{aligned} e_{n,y}&\sim (T_n-c_2)e_n^2\sim c_5e_{n-1}e_{n-1,z}e_{n-1,y}(D_{n-1,r}e_{n-1}^r)^2\\ &\sim c_5D_{n-1,q}D_{n-1,p}D_{n-1,r}^2e_{n-1}^{2r+q+p+1}, \end{aligned} \tag{2.74}$$

$$\begin{aligned} e_{n,z}&\sim (T_n-c_2)B_{n,4}e_n^4\sim c_5e_{n-1}e_{n-1,z}e_{n-1,y}(D_{n-1,r}e_{n-1}^r)^4\\ &\sim c_5B_{n,4}D_{n-1,q}D_{n-1,p}D_{n-1,r}^4e_{n-1}^{4r+q+p+1}, \end{aligned} \tag{2.75}$$

$$\begin{aligned} e_{n+1}&\sim B_{n,8}c_5^2e_{n-1}^2e_{n-1,z}^2e_{n-1,y}^2e_n^8\\ &\sim B_{n,8}c_5^2D_{n-1,q}^2D_{n-1,p}^2D_{n-1,r}^8e_{n-1}^{8r+2q+2p+2}. \end{aligned} \tag{2.76}$$

Сравнив компоненты e_{n-1} в трех парах соотношений (2.61), (2.74) и (2.62), (2.75), и (2.57), (2.76), мы получим систему уравнений:

$$\begin{aligned} 2r+p+q+1&=rp,\\ 4r+p+q+1&=rq,\\ 8r+2p+2q+2&=r^2. \end{aligned} \tag{2.77}$$

Положительное решение системы (2.77) задается путем $r=(5+\sqrt{23})$, $q=(5+\sqrt{23})/2$ и $p=(1+\sqrt{23})/2$. Поэтому R-порядок методов с памятью (2.55), когда T_n вычисляется по (2.53), по крайней мере $(5+\sqrt{23})\approx 9.7958$.

Метод 7. T_n вычисляется по (2.54). Интерполяционный многочлен Эрмита $H_5(x)$ удовлетворяет условиям: $H_5(x_n)=f(x_n)$, $H_5'(x_n)=f'(x_n)$, $H_5(z_{n-1})=f(z_{n-1})$, $H_5(y_{n-1})=f(y_{n-1})$, $H_5(x_{n-1})=f(x_{n-1})$ и $H_5'(x_{n-1})=f'(x_{n-1})$. Выражение для ошибки интерполяции Эрмита может быть представлено следующим образом:

$$f(x)-H_5(x)=\frac{f^{(6)}(\xi)}{6!}(x-x_n)^2(x-x_{n-1})^2(x-z_{n-1})(x-y_{n-1}),\quad \xi\in I. \tag{2.78}$$

После двойного дифференцирования (2.78) в точке $x=x_n$ имеем

$$H_5''(x_n)=f''(x_n)-2\,\frac{f^{(6)}(\xi)}{6!}(x_n-x_{n-1})^2(x_n-z_{n-1})(x_n-y_{n-1}),\quad \xi\in I. \tag{2.79}$$

Ряды Тейлора производной от f в точках $x_n\in I$ и $\xi\in I$ у нуля α для f дают:

$$f'(x_n)=f'(\alpha)\big(1+2c_2e_n+3c_3e_n^2+O\big(e_n^3\big)\big), \tag{2.80}$$

$$f''(x_n)=f'(\alpha)\big(2c_2e+6c_3e_n+O\big(e_n^2\big)\big), \tag{2.81}$$

$$f^{(m+1)}(\xi)=f'(\alpha)\big((m+1)!c_{m+1}+(m+2)!c_{m+2}e_\xi+O\big(e_\xi^2\big)\big), \tag{2.82}$$

где $e_\xi=\xi-\alpha$. Подставив (2.81) и (2.82) в (2.79), мы получим

$$H_5''(x_n)=2f'(\alpha)\big(c_2-c_6e_{n-1,y}e_{n-1,z}e_{n-1}^2+3c_3e_n\big). \tag{2.83}$$

С использованием (2.58)–(2.60) имеем

$$e_{n-1,y}=y_{n-1}-\alpha\sim(T_{n-1}-c_2)e_{n-1}^2, \tag{2.84}$$

$$e_{n-1,z}=z_{n-1}-\alpha\sim B_{n-1,4}(T_{n-1}-c_2)e_{n-1}^4, \tag{2.85}$$

$$e_n=x_n-\alpha\sim B_{n-1,8}(T_{n-1}-c_2)^2e_{n-1}^8. \tag{2.86}$$

Тогда

$$e_{n-1,y}e_{n-1,z}e_{n-1}^2\sim B_{n-1,4}(T_{n-1}-c_2)^2e_{n-1}^8\sim\frac{B_{n-1,4}}{B_{n-1,8}}\,e_n. \tag{2.87}$$

Теперь подставим (2.87) в (2.83):

$$H_5''(x_n)=2f'(\alpha)\left(c_2+\left(3c_3-c_6\frac{B_{n-1,4}}{B_{n-1,8}}\right)e_n\right), \tag{2.88}$$

что означает

$$\frac{H_5''(x_n)}{2f'(x_n)} \sim c_2 + \left(3c_3 - 2c_2^2 - c_6\frac{B_{n-1,4}}{B_{n-1,8}}\right)e_n. \tag{2.89}$$

Следовательно,

$$T_n = \frac{H_5''(x_n)}{2f'(x_n)} \sim c_2 + \left(3c_3 - 2c_2^2 - c_6\frac{B_{n-1,4}}{B_{n-1,8}}\right)e_n, \tag{2.90}$$

или

$$T_n - c_2 \sim \left(3c_3 - 2c_2^2 - c_6\frac{B_{n-1,4}}{B_{n-1,8}}\right)e_n. \tag{2.91}$$

Подставив (2.91) в (2.60), мы получим

$$e_{n+1} \sim B_{n,8}\left(3c_3 - 2c_2^2 - c_6\frac{B_{n-1,4}}{B_{n-1,8}}\right)^2 e_n^{10}. \tag{2.92}$$

Поэтому R-порядок методов с памятью (2.55), когда T_n вычисляется по (2.54), по крайней мере 10. □

3. Численное сравнение

В данном пункте после обзора методов с памятью мы сравним данные схемы с двухшаговыми методами, представленными в [9], и трехточечными методами, изученными в [10]. В таблице 1 приведены рассматриваемые нелинейные тестовые функции с корнями (α). В этой же таблице имеется бесконечное число цифр после запятой, но мы указываем только четыре (нелинейные функции взяты из [10] и [11]). В таблицах 2 и 3 абсолютные ошибки $|x_k - \alpha|$ даны для представленных методов OM4 и OM81 соответственно. Вычислительный порядок сходимости (ВПС) аппроксимируется с использованием формулы

$$\text{ВПС} \approx \frac{\ln|f(x_{n+1})/f(x_n)|}{\ln|f(x_n)/f(x_{n-1})|}$$

для проверки вычислительной эффективности (см. [12]), что служит для проверки теоретической скорости сходимости.

Таблица 1. Тестовые функции

Нелинейная функция	Корень
$f_1 = xe^{x^2} - (\sin x)^2 + 3\cos x + 5$	$-1.2076\ldots$
$f_2 = x^5 + x^4 + 4x^2 - 15$	$1.3474\ldots$
$f_3 = x^3 - x^2 - 1$	$1.4655\ldots$

Все численные результаты, приводимые в таблицах 2 и 3 для двух- и трехшаговых методов с памятью, согласуются с теорией, построенной в данной статье. Для этого мы рассмотрели 1000 значащих цифр с использованием команды “*Установить точность*” в “Mathematica 8”. Предлагаемые нами схемы OM4 с (2.5)–(2.7) и OM81 с (2.51)–(2.54) использовались для решения нелинейных функций, а вычисленные результаты сравнивались с двухшаговыми методами XW41(16–18), XW42(16–19), XW43(16–20), XW44(17–18), XW45(17–19), XW46(17–20) из [9] и трехшаговыми методами

XW81(37–34), XW82(37–35), XW83(37–36), XW84(38–34), XW85(38–35) и XW86(38–36) из [10]. В таблице 3 "НС" означает "не сходящийся". Из таблиц 2 и 3 видно, что результаты, полученные предлагаемыми методами, лучше, чем у этих двух- и трехшаговых методов. Дополнительный эффективный подход для сравнения эффективности методов — процессорное время, используемое при реализации программы. Для этой цели процессорное время вычисляется с использованием команды "*TimeUsed* [ ]" в "Mathematica 8". Процессорное время зависит от характеристик компьютера. Характеристики компьютера, используемого в данной статье: Microsoft Windows 7 Intel Core i3-2330M CPU@ 2.20 ГГц с 2 Гбайт оперативной памяти, 64-битовой операционной системой. Среднее процессорное время, вычисленное с использованием в среднем 30 исполнений программы, указано в таблицах 2 и 3.

Таблица 2. Численное сравнение двухточечных методов с памятью

Метод	$\lvert x_1-\alpha\rvert$	$\lvert x_2-\alpha\rvert$	$\lvert x_3-\alpha\rvert$	ВПС	Пр. время
Пример f_1, приблизительная оценка: -1.6					
XW41(16–18), $T_0=-0.01,\ a=8$	3.5037e−2	2.8246e−6	1.2080e−25	4.7042	2.5721
XW42(16–19), $T_0=-0.01,\ a=8$	3.5037e−2	4.7605e−7	1.7515e−27	4.1782	2.6509
XW43(16–20), $T_0=-0.01,\ a=8$	3.5037e−2	3.4949e−7	4.1255e−28	4.1649	2.8477
XW44(17–18), $T_0=-0.01,\ b=-2$	1.8398e−2	2.1773e−7	1.3052e−30	4.7018	2.4728
XW45(17–19), $T_0=-0.01,\ b=-2$	1.8398e−2	3.0276e−8	1.7117e−32	4.1837	2.6747
XW46(17–20), $T_0=-0.01,\ b=-2$	1.8398e−2	3.5032e−8	2.7935e−32	4.2039	2.9566
OM4 (2.4)–(2.5), $T_0=-0.01,\ \gamma=0$	1.8880e−2	2.3820e−7	1.9513e−30	4.7005	2.7019
OM4 (2.4)–(2.6), $T_0=-0.01,\ \gamma=0$	1.8880e−2	3.3604e−8	2.6359e−32	4.1835	2.7236
OM4 (2.4)–(2.7), $T_0=-0.01,\ \gamma=0$	1.8880e−2	3.8273e−8	4.0253e−32	4.2025	2.8162
Пример f_2, приблизительная оценка: 1.4					
XW41(16–18), $T_0=-0.01,\ a=8$	1.8371e−5	1.3038e−22	7.0315e−101	4.5640	1.1329
XW42(16–19), $T_0=-0.01,\ a=8$	1.8371e−5	1.5797e−22	5.6795e−107	4.3243	1.1474
XW43(16–20), $T_0=-0.01,\ a=8$	1.8371e−5	6.7085e−25	1.5685e−108	4.3026	1.0778
XW44(17–18), $T_0=-0.01,\ b=-2$	3.8040e−6	2.3630e−25	3.2074e−113	4.5748	1.2823
XW45(17–19), $T_0=-0.01,\ b=-2$	3.8040e−6	4.3246e−27	9.8591e−118	4.3278	1.0925
XW46(17–20), $T_0=-0.01,\ b=-2$	3.8040e−6	2.2214e−28	7.0328e−124	4.2953	1.1369
OM4 (2.4)–(2.5), $T_0=-0.01,\ \gamma=0$	3.7144e−6	2.1871e−25	2.2845e−113	4.5752	1.0383
OM4 (2.4)–(2.6), $T_0=-0.01,\ \gamma=0$	3.7144e−6	3.9924e−27	7.0907e−118	4.3279	1.1577
OM4 (2.4)–(2.7), $T_0=-0.01,\ \gamma=0$	3.7144e−6	1.9614e−28	4.0581e−124	4.2951	1.0974
Пример f_3, приблизительная оценка: 1.3					
XW41(16–18), $T_0=-0.01,\ a=8$	1.5319e−2	4.8667e−10	2.6217e−44	4.5743	1.2550
XW42(16–19), $T_0=-0.01,\ a=8$	1.5319e−2	1.7723e−10	1.6516e−45	4.4174	1.2136
XW43(16–20), $T_0=-0.01,\ a=8$	1.5319e−2	1.7723e−10	3.3034e−45	4.3794	1.1443
XW44(17–18), $T_0=-0.01,\ b=-2$	7.1877e−4	7.3695e−16	1.0978e−70	4.5729	1.2125
XW45(17–19), $T_0=-0.01,\ b=-2$	7.1877e−4	3.5313e−17	5.5819e−75	4.3430	1.0972
XW46(17–20), $T_0=-0.01,\ b=-2$	7.1877e−4	3.5313e−17	1.1164e−74	4.3204	1.1482
OM4 (2.4)–(2.5), $T_0=-0.01,\ \gamma=0$	7.1305e−4	7.3404e−16	1.0912e−70	4.5737	1.3175
OM4 (2.4)–(2.6), $T_0=-0.01,\ \gamma=0$	7.1305e−4	3.3934e−17	4.6559e−75	4.3431	1.2563
OM4 (2.4)–(2.7), $T_0=-0.01,\ \gamma=0$	7.1305e−4	3.3934e−17	9.3119e−75	4.3205	1.1916

Таблица 3. Численное сравнение трехточечных методов с памятью

Метод	$\lvert x_1-\alpha\rvert$	$\lvert x_2-\alpha\rvert$	$\lvert x_3-\alpha\rvert$	ВПС	Пр. время
Пример f_1, приблизительная оценка: -1.6					
XW81(37–34), $T_0=1.5,\ L=0$	1.1801e−1	1.3693e−7	1.8971e−61	8.9496	2.6608
XW82(37–35), $T_0=1.5,\ L=0$	1.1801e−1	1.4405e−9	3.5417e−87	9.7061	2.9674
XW83(37–36), $T_0=1.5,\ L=0$	1.1801e−1	1.7309e−9	2.3974e−90	10.214	2.8367
XW84(38–34), $T_0=2,\ K=6$	1.2272e−1	6.5242e−7	1.2627e−45	6.8131	2.5001
XW85(38–35), $T_0=2,\ K=6$	3.5557e−2	3.6766e−15	3.5446e−140	9.6098	3.0186
XW86(38–36), $T_0=2,\ K=6$	3.5557e−2	2.0055e−15	4.8248e−148	9.9921	3.0071
OM81 (2.55)–(2.51), $T_0=1.5,\ \gamma=1$	1.9593e−2	4.0580e−15	2.5739e−129	8.9943	2.6720
OM81 (2.55)–(2.53), $T_0=1.5,\ \gamma=1$	1.9593e−2	1.9159e−17	1.3449e−163	9.7289	2.8602
OM81 (2.55)–(2.54), $T_0=1.5,\ \gamma=1$	1.9593e−2	7.4905e−18	4.5477e−171	9.9295	3.0666
OM81 (2.55)–(2.52), $T_0=1.5,\ \gamma=1$	1.9593e−2	5.4549e−17	8.0689e−155	9.4610	2.8874
Пример f_2, приблизительная оценка: 2.3					
XW81(37–34), $T_0=-1,\ L=1$	НС	–	–	–	1.3194
XW82(37–35), $T_0=-1,\ L=1$	НС	–	–	–	1.1279
XW83(37–36), $T_0=-1,\ L=1$	НС	–	–	–	1.1305
XW84(38–34), $T_0=-1,\ K=0$	6.2961e−1	4.4250e−4	1.9236e−29	7.3534	1.1861
XW85(38–35), $T_0=-1,\ K=0$	1.2396e−0	4.7897e−1	4.5123e−4	2.3441	1.1108
XW86(38–36), $T_0=-1,\ K=0$	1.2396e−0	4.8136e−1	3.6709e−4	2.4270	1.1446
OM81 (2.55)–(2.51), $T_0=-1.0,\ \gamma=1$	8.4611e−2	2.7477e−11	1.2500e−96	8.9573	1.4999
OM81 (2.55)–(2.53), $T_0=-1.0,\ \gamma=1$	8.4611e−2	7.5983e−13	3.5136e−122	9.8625	1.1663
OM81 (2.55)–(2.54), $T_0=-1.0,\ \gamma=1$	8.4611e−2	8.2840e−13	1.0967e−122	9.9451	1.1832
OM81 (2.55)–(2.52), $T_0=-1.0,\ \gamma=1$	8.4611e−2	1.3930e−12	9.3226e−166	9.5331	1.0877
Пример f_3, приблизительная оценка: 1.3					
XW81(37–34), $T_0=1.5,\ L=0$	2.4086e−2	2.0173e−17	3.8015e−153	9.0082	1.1468
XW82(37–35), $T_0=1.5,\ L=0$	2.4086e−2	5.7528e−18	3.2909e−174	10.008	1.1619
XW83(37–36), $T_0=1.5,\ L=0$	2.4086e−2	5.7528e−18	3.2909e−174	10.008	1.2208
XW84(38–34), $T_0=2,\ K=6$	НС	–	–	–	1.1632
XW85(38–35), $T_0=2,\ K=6$	3.3046e−1	2.4693e−3	7.1894e−27	11.901	1.2608
XW86(38–36), $T_0=2,\ K=6$	3.3046e−1	2.4693e−3	7.1894e−27	11.901	1.1305
OM81 (2.55)–(2.51), $T_0=1.5,\ \gamma=1$	2.3293e−7	1.3267e−62	8.3669e−560	9.0000	1.2703
OM81 (2.55)–(2.53), $T_0=1.5,\ \gamma=1$	8.4611e−7	1.5593e−68	2.8183e−680	10.000	1.2083
OM81 (2.55)–(2.54), $T_0=1.5,\ \gamma=1$	8.4611e−7	1.5593e−68	2.8183e−680	10.000	1.4507
OM81 (2.55)–(2.52), $T_0=1.5,\ \gamma=1$	2.3293e−7	1.5593e−68	2.8183e−680	10.000	1.1088

4. Выводы

В данной статье мы представили новое семейство двух- и трехшаговых методов с памятью для решения нелинейных уравнений. Наша цель — построение метода высокого порядка сходимости без дополнительных вычислений. Поэтому мы использовали три различные аппроксимации самокорректирующихся параметров, полученные с помощью интерполяционных многочленов Эрмита в методах четвертого и восьмого порядков для достижения сходимости высокого порядка без дополнительных вычислений. R-порядок сходимости новых итерационных методов с памятью увеличивается с 4 до $4.5616,\ 4.7913,$ 5 и с 8 до 9, $9.5846,\ 9.7958$, 10. Численные результаты приведены для подтверждения правильности теоретических результатов. Мы также вычислили процессорное время предлагаемого метода и других существующих методов.

Благодарности. Авторы хотели бы выразить искреннюю благодарность рецензентам и редактору за внимательное прочтение статьи и ценные комментарии, сыгравшие важную роль в усовершенствовании статьи.

Литература

1. **Wang X., Zhang T.** Higher-order Newton-type iterative methods with and without memory for solving nonlinear equations // Math. Comm. — 2014. — Vol. 19. — P. 91–109.
2. **Soleymani F.** Some optimal iterative methods and their with memory variants // J. Egyp. Math. Soc. — 2013. — Vol. 21. — P. 133–141.
3. **Kumar S., Kanwar V., Tomar S.K., and Singh S.** Geometrically constructed families of Newton's method for unconstrained optimization and nonlinear equations // Int. J. Math. Math. Sci. — 2011. — Vol. 2011. — (Article ID 972537).
4. **Traub J.F.** Iterative Methods for the Solution of Equations. — Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice Hall, 1964.
5. **Petkovic M.S., Neta B., Petcovic L.D., and Dzunic J.** Multipoint Methods for Solving Nonlinear Equations. — New York: Academic Press, 2013.
6. **Behl R., Kanwar V.** New highly efficient families of higher-order methods for simple roots, permitting $f'(x_n) = 0$ // Int. J. Math. Math. Sci. — 2014. — Vol. 2014. — (Article ID 264529).
7. **Ortega J., Rheinboldt W.** Iterative Solution of Nonlinear Equations in Several Variables. — New York: Academic Press, 2000.
8. **Alefeld G., Herzberger J.** Introduction to Interval Computation. — New York: Academic Press, 1983.
9. **Wang X., Zhang T.** A new family of Newton-type iterative methods with and without memory for solving nonlinear equations // Calcolo. — 2014. — Vol. 51. — P. 1–15.
10. **Wang X., Zhang T.** Some Newton-type iterative methods with and without memory for solving nonlinear equations // Int. J. Comput. Meth. — 2013. — Vol. 11. — P. 1–20.
11. **Chun C., Lee M.Y.** A new optimal eighth-order family of iterative methods for the solution of nonlinear equations // Appl. Math. Comput. — 2013. — Vol. 223. — P. 506–519.
12. **Weerakoon S., Fernando T.G.I.** A variant of Newton's method with accelerated third-order convergence // Appl. Math. Lett. — 2000. — Vol. 13. — P. 87–93.

Поступила в редакцию 21 апреля 2016 г.,
в окончательном варианте 26 мая 2016 г.