

УДК 517.947+534.14+534.2+517.9

## РАСПРОСТРАНЕНИЕ ВОЛН И РЕЗОНАНСНЫЕ ЯВЛЕНИЯ В НЕОДНОРОДНЫХ СРЕДАХ

С. В. Сухинин

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 630090 Новосибирск

В рамках одномерного приближения исследованы волноводные и резонансные свойства неоднородных проницаемых одномерно-периодических структур, состоящих из двух различных сред. Определены полосы пропускания и запираения. Получено дисперсионное соотношение для всех волноводных мод. Найдены явные выражения для низких волноводных частот и соответствующих фазовых скоростей волноводных мод для моно- и полидисперсных сред. Исследовано влияние полидисперсности размеров неоднородностей на низкие частоты полосы пропускания. Обнаружена полоса пропускания в области низких частот. Показано, что полидисперсность не влияет на волноводные свойства среды при низких частотах первой полосы пропускания. Исследованы резонансные явления в периодических средах и структурах. Показано, что резонансные явления возникают для неограниченного дискретного множества частот, если для них групповая скорость волноводной моды равна нулю, в этом случае рост амплитуды колебаний локализован в окрестности источника (локализация резонанса). Обнаружен синхрофазотронный резонанс, когда бесконечная цепочка источников колебаний имеет фазу колебаний соответствующей бегущей волны из полосы пропускания.

**Введение.** Исследование распространения волн в неоднородных одномерно-периодических средах является важным для решения прикладных задач. Примерами таких сред при распространении в них акустических волн являются жидкости с пузырьками газа, композиты, неомогенные смеси с периодическим включением компонентов, пены, пористые и зернистые структуры. Для прикладных задач важным является исследование замедляющих свойств неоднородных одномерно-периодических структур, определение полос запираения и пропускания, исследование резонансных свойств периодических неоднородных структур с компактными и распределенными источниками колебаний.

В [1, 2] содержатся результаты первоначальных исследований и библиография. В настоящей работе, являющейся продолжением и обобщением [3–5], в рамках одномерной теории проведены исследования волноводных, замедляющих и резонансных свойств неоднородных одномерно-периодических проницаемых сред типа цепочки пузырьков газа в жидкости или структурированного композита. В рамках двумерной теории распространение волн около одномерно-периодических цепочек проницаемых и непроницаемых препятствий исследовано в [6].

Проведенные в настоящей работе исследования могут служить основой для разработки акустических фильтров, замедляющих сред, оптимизации демпфирующих материалов. Исследования резонансных явлений могут быть использованы, например, при расчете цепочки взрывов для разгона частиц или при создании поглощающих материалов.

**1. Формулировка задач и их свойства симметрии.** Прямые методы исследования распространения волн в неоднородных периодических структурах невозможны из-за боль-

шого количества неоднородностей. В связи с этим важное значение приобретают исследования тонкой структуры спектра частот задачи, описывающей установившиеся колебания в неоднородных одномерно-периодических средах.

Пусть неоднородная одномерно-периодическая среда состоит из двух компонентов  $M_1 = \{c_1, \rho_1\}$  и  $M_2 = \{c_2, \rho_2\}$ ,  $c_i, \rho_i$  — скорость звука и плотность в состоянии покоя ( $i = 1, 2$ ),  $p^{(1)}$  и  $p^{(2)}$  — акустическое возмущение давления в первой и второй средах соответственно. Далее предполагается, что среда  $M_1$  более плотная, чем среда  $M_2$ . Примерами сред, в которых  $\tau \ll \infty$  ( $\tau = \rho_2/\rho_1$  — отношение плотностей), являются жидкость и газ. Можно считать, что в среду  $M_1$  помещена цепочка пузырьков среды  $M_2$  или в среду  $M_2$  помещена цепочка капель  $M_1$ . Предполагается, что цепочка обладает пространственной периодичностью. Далее используются следующие обозначения:  $\varkappa = c_1/c_2$  — отношение скоростей звука,  $\omega$  — круговая частота колебаний,  $\lambda = \omega L/c_1$  — безразмерная частота колебаний,  $L$  — наименьший пространственный период одномерно-периодической среды,  $\tilde{x} = x/L$  — безразмерная пространственная переменная (далее тильда над  $x$  опущена). В этих переменных наименьший пространственный период неоднородной среды равен единице. Индексы 1, 2 соответствуют средам  $M_1$  и  $M_2$ . Часть среды, имеющая длину, равную единице, называется фундаментальной ячейкой.

*Уравнения и граничные условия.* Установившиеся акустические колебания давления с круговой частотой  $\omega$  в средах  $M_1$  и  $M_2$  описываются уравнениями

$$p_{xx}^{(1)} + \lambda^2 p^{(1)} = 0, \quad p_{xx}^{(2)} + \lambda^2 \varkappa^2 p^{(2)} = 0, \quad (1.1)$$

на границах контакта сред должны быть выполнены условия непрерывности давления и скорости (динамические и кинематические условия)

$$p^{(1)} = p^{(2)}, \quad \tau p_x^{(1)} = p_x^{(2)}. \quad (1.2)$$

Соотношения (1.1), (1.2) далее называются задачей  $T$ , которая полностью описывает распространение акустических волн в неоднородных одномерно-периодических средах.

*Учет взаимодействия соседних неоднородностей.* Пусть в среде  $M_1$  (жидкость) находится среда  $M_2$  (газ) протяженностью  $D$  (одиночный пузырек), начало координат выбрано в центре  $M_2$ . В рамках одномерной теории свободные акустические колебания одиночного пузырька газа в жидкости описываются уравнениями (1.1) и граничными условиями (1.2). Кроме того, во внешней среде должны быть выполнены условия излучения, которые для акустического возмущения давления имеют вид

$$p^{(1)} = a_1 \exp(i\lambda x), \quad x > D/2; \quad p^{(2)} = a_2 \exp(-i\lambda x), \quad x < -D/2. \quad (1.3)$$

Свободные колебания пузырька определяются множеством комплексных чисел  $\lambda_k^*$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , для которых существуют нетривиальные решения задачи  $B = \{(1.1), (1.2), (1.3)\}$ . Эти числа называются квазисобственными частотами задачи  $B$ , соответствующие колебания — квазисобственными. Можно показать, что

$$\lambda_k^* = k\pi/(\varkappa D) + i \ln [(\varkappa + \tau)/(\varkappa - \tau)]/(\varkappa D) \quad (k = 1, 2, \dots). \quad (1.4)$$

Следует отметить, что квазисобственные частоты задачи  $B$  непрерывно зависят от  $\tau$  ( $0 < \tau < \infty$ ). Физический смысл вещественных и мнимых частей квазисобственных частот очевиден [2]: величина  $\text{Re}(\lambda_k^*)$  является безразмерной частотой квазисобственных колебаний, затухание по времени в фиксированной точке пространства определено выражением  $p(x, t) = A(x) \exp[-c_1 \text{Im}(\lambda_k^*)t]$ . При  $\tau \rightarrow 0$  квазисобственные частоты стремятся к собственным частотам задачи Неймана в области  $-D/2 < x < D/2$ . Аналогичным свойством обладают квазисобственные значения резонатора Гельмгольца для малого параметра (радиуса горла) [2]. Для этого резонатора существуют квазисобственные значения и соответствующие колебания с длиной волны, значительно превышающей его геометрические

размеры, — так называемая мода Гельмгольца [2]. Ей соответствует квазисобственное значение  $\lambda_0^*(\tau)$  такое, что  $\lim_{\tau \rightarrow 0} \lambda_0^*(\tau) = 0$  и  $\text{Re}[\lambda_0^*(\tau)] \neq 0$ , последнее означает существование собственных колебаний. Из (1.4) следует  $\lambda_0^* = i \ln[(\varepsilon + \tau)/(\varepsilon - \tau)]/(\varepsilon D)$  и  $\text{Re}(\lambda_0^*) = 0$ , т. е. для одиночного пузырька не существует собственных колебаний на моде Гельмгольца.

Другим свойством обладает структура, состоящая из двух пузырьков газа в жидкости. Квазисобственные частоты колебаний  $\lambda$  определяются из уравнения

$$\begin{aligned} (\varepsilon + \tau)^2 \exp[-(1/2)i\lambda(H + 2\varepsilon L)] + (\tau^2 - \varepsilon^2) \exp[(1/2)i\lambda(H + 2\varepsilon L)] = \\ = (\tau^2 - \varepsilon^2) \exp[-(1/2)i\lambda(-H + 2\varepsilon L)] + (\varepsilon - \tau)^2 \exp[(1/2)i\lambda(-H + 2\varepsilon L)]. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Если  $\tau = 0$ , то квазисобственные частоты становятся собственными частотами колебаний и определяются равенством  $\cos(\lambda H/2) \sin(\lambda \varepsilon L) = 0$ . В результате взаимодействия пузырьков возникают колебания на моде Гельмгольца. Ближайшая к нулю квазисобственная частота  $\lambda_0^*$  ансамбля из двух пузырьков вычисляется с использованием (1.5):

$$\begin{aligned} \lambda_0^* = \pm \tau \frac{\sqrt{\tau^2 H^2 + 4\tau^2 \varepsilon^2 D^2 + 4\tau^3 H D}}{\tau^2 H^2 + 2\tau^2 \varepsilon^2 D^2 + 2\tau^3 H D + 2\varepsilon^4 L^2 + 2\varepsilon^2 \tau H L} - \\ - i \frac{\tau(H\tau + 2\varepsilon^2 L)}{\tau^2 H^2 + 2\tau^2 \varepsilon^2 D^2 + 2\tau^3 H D + 2\varepsilon^4 L^2 + 2\varepsilon^2 \tau H L}. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Здесь  $D$  — диаметр пузырьков;  $H$  — расстояние между пузырьками;  $i$  — мнимая единица. Необходимо отметить, что частотная характеристика колебаний ансамбля из двух пузырьков (1.6) существенно отличается от характеристики колебаний одного пузырька (1.4). Учет взаимодействия пузырьков обуславливает появление низкочастотных собственных колебаний.

Из приведенного примера следует, что обычные методы осреднения могут привести к потере решений или к искажению качественных свойств поведения структуры, если не учитывать взаимодействие всего ансамбля неоднородностей. Далее взаимодействие всех неоднородностей в одномерно-периодической цепочке учитывается с использованием представлений допускаемых групп симметрий в пространстве возможных решений задачи.

*Свойства симметрии.* Так как волновое уравнение инвариантно относительно любых локально-плоских симметрий, то симметрия задачи  $T$  определяется симметрией цепочки неоднородностей. Все цепочки неоднородностей можно классифицировать по группам допускаемых симметрий. Используя методы теории групп симметрий [7, 8], можно показать, что возможно только два типа одномерно-периодических цепочек неоднородностей. Тип I — цепочка неоднородностей, допускающая только группу трансляций  $\{T_1\}$  [7],  $T_1 \langle u(x, y) \rangle = u(x, y+1)$ ,  $T_n = (T_1)^n$ . Тип II — цепочка, допускающая только группу симметрий  $\{T_1, D_1^x\}$ ,  $D_1^x \langle u(x, y) \rangle = u(x, -y)$ . На рис. 1 показана одна из возможных одномерно-периодических цепочек типа II, на рис. 6 — типа I. Одномерно-периодических цепочек, допускающих иные группы симметрий, не существует [7, 8].

Группа симметрии  $S_T$  задачи  $T$  позволяет разложить пространство допускаемых решений этой задачи на инвариантные относительно представлений  $S_T$  в пространстве решений подпространства. Все одномерно-периодические структуры по определению допускают группу  $\{T_1\}$ , поэтому пространство допускаемых решений можно разложить на инвариантные относительно этой группы подпространства [9]. Для функции  $p(x)$ , принадлежащей таким подпространствам, существует такое значение  $\xi$  ( $-\pi \leq \xi \leq \pi$ ), что  $T_1 \langle p(x) \rangle \equiv p(x+1) \equiv \exp(i\xi)p(x)$ . Следовательно,

$$p(x) \equiv a(x) \exp(i\xi x), \quad a(x+1) \equiv a(x). \quad (1.7)$$

Здесь  $i$  — мнимая единица;  $\xi$  — сдвиг фазы колебаний в соседних фундаментальных областях группы трансляций. Далее задача  $T$  с условием (1.7) будет называться задачей  $T(\xi)$ .

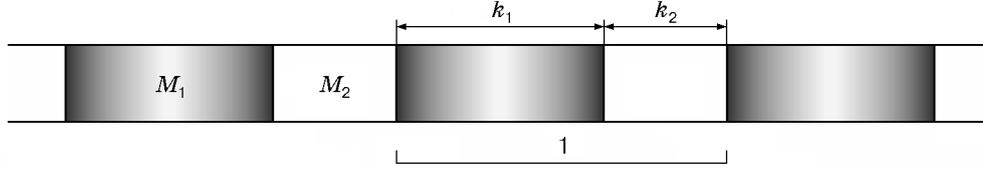


Рис. 1. Монодисперсная цепочка пузырьков

Для цепочек неоднородностей типа II возможно четыре одномерных неприводимых представления группы симметрии  $S_T = \{T_1, D_1^x\}$  в пространстве допустимых решений [9]:

$$\begin{aligned} \{\tau_1(T_1) = -1, \tau_1(D_1^x) = +1\}, & \quad \{\tau_2(T_1) = -1, \tau_2(D_1^x) = -1\}, \\ \{\tau_3(T_1) = +1, \tau_3(D_1^x) = +1\}, & \quad \{\tau_4(T_1) = +1, \tau_4(D_1^x) = -1\}. \end{aligned} \tag{1.8}$$

Задачу  $T(\xi)$  достаточно исследовать в некоторой фундаментальной ячейке группы трансляций (некотором периоде структуры), например в интервале  $0 < x < 1$ . Решение на всей прямой можно получить продолжением решения задачи в одном периоде с использованием (1.7).

*Волноводные моды и синфазные колебания.* Волноводным модам колебаний соответствуют бегущие волны, распространяющиеся по цепочке неоднородностей без затухания.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.** Нетривиальное решение задачи  $T(\xi)$  для  $\xi \neq 0$  называется волноводной функцией. Соответствующее значение параметра  $\lambda^*$  называется безразмерной волноводной частотой (волноводным значением),  $\omega^* = \lambda^* c_1 / L$  — циклической волноводной частотой задачи  $T(\xi)$ .

Если  $\xi = 0$ , то колебания синфазные в любых смежных фундаментальных ячейках группы трансляций. Вид этих колебаний описывается задачей  $T$  для функций, инвариантных относительно представлений  $\tau_3$  и  $\tau_4$  из (1.8).

В силу (1.7) любая волноводная функция имеет вид  $p(x) \equiv a(x) \exp(i\xi x)$ . Величина  $\xi$  — волновое число волноводной моды; амплитуда волноводной моды  $a(x+1) \equiv a(x)$  — периодическая по пространству комплекснозначная функция;  $\lambda_k^*$  — безразмерные волноводные частоты, соотношения  $\lambda_k^* = \lambda_k^*(\xi)$  ( $k = 1, 2, \dots, K$ ) являются дисперсионными для волноводных мод. Полуоткрытые интервалы  $\sigma_n = \left( \inf_{0 \leq \xi \leq \pi} [\lambda_n(\xi)], \sup_{0 \leq \xi \leq \pi} [\lambda_n(\xi)] \right)$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) безразмерных частот являются полосами пропускания для волноводных мод  $\lambda_k = \lambda_k(\xi)$  ( $k = 1, 2, \dots, K$ ).

Для обоснования корректности задачи  $T(\xi)$  и численных исследований необходимо

**УТВЕРЖДЕНИЕ 1.** Множество волноводных частот задачи  $T(\xi)$  дискретно на вещественной оси.

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Дискретность волноводных частот в топологии вещественной оси следует из аналитичности резольвенты задачи  $T(\xi)$ . Если (1.1) умножить на комплексносопряженные функции  $p_1$  и  $p_2$  соответственно и проинтегрировать по частям по сужениям  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$  на фундаментальную ячейку группы трансляций, то можно получить соотношение

$$\int_{M_1} \tau [ |p_x^{(1)}|^2 - \lambda^2 |p^{(1)}|^2 ] + \int_{M_2} [ |p_x^{(2)}|^2 - \lambda^2 \varkappa^2 |p^{(2)}|^2 ] = 0, \text{ из которого следует вещественность}$$

волноводных частот задачи  $T(\xi)$ . Утверждение доказано.

**2. Волноводные свойства монодисперсной цепочки неоднородностей.** Для одномерно-периодической цепочки одинаковых неоднородностей типа II (монодисперсной цепочки) (рис. 1) задача  $T(\xi)$  наиболее простая. Пусть длина одного связного слоя среды  $M_1$  (линейная концентрация) равна  $k_1$ , длина одного связного слоя среды  $M_2$  (линейная

концентрация) равна  $k_2$ . Так как  $1 = k_1 + k_2$  — безразмерный пространственный период структуры (рис. 1), то  $k_2 = 1 - k_1$  и для полного описания монодисперсной цепочки неоднородностей достаточно  $k_1$  (далее  $k_1 = k$ ). Колебания в фундаментальной ячейке  $0 \leq x \leq 1$  описываются уравнениями (1.1), условиями трансмиссии (1.2) и условиями сдвига фазы колебаний в соседних фундаментальных ячейках (1.7). Условия на границах фундаментальной ячейки

$$p^{(1)}(-k/2) \exp(i\xi) = p^{(2)}(1 - k/2), \quad \tau p_x^{(1)}(-k/2) \exp(i\xi) = p_x^{(2)}(1 - k/2) \quad (2.1)$$

эквивалентны (1.7).

Далее (1.1), (1.2) и (1.7) называется задачей  $TM(\xi)$ . Необходимо отметить, что семейство задач  $TM(\xi)$  полностью учитывает возможные взаимодействия всех неоднородностей в одномерно-периодической цепочке.

*Дисперсионные соотношения.* Общее решение (1.1) в областях  $\{x: -k/2 \leq x \leq k/2\}$  и  $\{x: k/2 \leq x \leq 1 - k/2\}$ , занятых средами  $M_1$  и  $M_2$ , имеет вид  $p_1 = a_1 \exp(i\lambda x) + b_1 \exp(-i\lambda x)$ ,  $p_2 = a_2 \exp(i\lambda \varepsilon x) + b_2 \exp(-i\lambda \varepsilon x)$ . Поэтому задача  $TM(\xi)$  эквивалентна линейной системе уравнений  $A(\lambda)Y = 0$  с неизвестными  $(a_1, b_1, a_2, b_2) = Y$ . Матрица  $A(\lambda)$  этой системы уравнений имеет вид

$$A(\lambda) = \begin{pmatrix} \exp\left(i\frac{\lambda k}{2}\right) & \exp\left(-i\frac{\lambda k}{2}\right) & -\exp\left(i\frac{\lambda k \varepsilon}{2}\right) & -\exp\left(-i\frac{\lambda k \varepsilon}{2}\right) \\ \tau \exp\left(i\frac{\lambda k}{2}\right) & -\tau \exp\left(-i\frac{\lambda k}{2}\right) & -\varepsilon \exp\left(i\frac{\lambda k \varepsilon}{2}\right) & \varepsilon \exp\left(-i\frac{\lambda k \varepsilon}{2}\right) \\ \exp\left[i\left(-\frac{\lambda k}{2} + \xi\right)\right] & \exp\left[i\left(\frac{\lambda k}{2} + \xi\right)\right] & -\exp\left[i\lambda \varepsilon\left(1 - \frac{k}{2}\right)\right] & -\exp\left[-i\lambda \varepsilon\left(1 - \frac{k}{2}\right)\right] \\ \tau \exp\left[i\left(-\frac{\lambda k}{2} + \xi\right)\right] & -\tau \exp\left[i\left(\frac{\lambda k}{2} + \xi\right)\right] & -\varepsilon \exp\left[i\lambda \varepsilon\left(1 - \frac{k}{2}\right)\right] & \varepsilon \exp\left[-i\lambda \varepsilon\left(1 - \frac{k}{2}\right)\right] \end{pmatrix}.$$

Нетривиальное решение задачи  $TM(\xi)$  существует, если определитель матрицы  $A(\lambda)$  равен нулю. Поэтому волноводные частоты  $TM(\xi)$  являются нулями аналитической функции  $\det[A(\lambda)]$ . Отсюда следует, что волноводные частоты  $\lambda^*(\tau, \xi)$  задачи  $TM(\xi)$  дискретны на вещественной оси и непрерывно зависят от  $\tau$  на множестве  $0 \leq \tau < 1$  и от  $\xi$  ( $|\xi| \leq \pi$ ). Для фиксированных  $\varepsilon, \tau, k$  уравнение  $\det[A(\lambda)] = 0$  представляет собой дисперсионные соотношения для всех волноводных мод  $\lambda_n = \lambda_n(\xi)$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , которые являются связными компонентами множества всех волноводных частот задачи  $TM(\xi)$  на плоскости  $(\xi, \lambda)$ .

Дисперсионные соотношения для всех волноводных мод задачи  $TM(\xi)$  имеют вид

$$4\tau \varepsilon [1 + \cos(2\xi)] - (\tau + \varepsilon)^2 \{\cos[\lambda(k - \varepsilon k + \varepsilon) + \xi] + \cos[\lambda(k - \varepsilon k + \varepsilon) - \xi]\} + \\ + (\tau - \varepsilon)^2 \{\cos[\lambda(k + \varepsilon k - \varepsilon) + \xi] + \cos[\lambda(k + \varepsilon k - \varepsilon) - \xi]\} = 0. \quad (2.2)$$

Полосы пропускания  $\{\sigma_n\}_{n=1,2,\dots}$  и запирающие полностью описываются (2.2).

*Ползущая мода.* Наиболее важным для различных приложений является исследование распространения длинных (низкочастотных) волн по одномерно-периодической цепочке неоднородностей. В этом случае длина волн существенно превышает период структуры и размеры неоднородностей. Волноводные частоты задачи  $TM(\xi)$  непрерывно зависят от  $\tau$ , и  $\lambda = 0$  есть решение (2.2) при  $\tau = 0$ . Отсюда следует, что существует волноводная частота  $\lambda_1^*(\tau)$  задачи  $TM(\xi)$  такая, что  $\lim_{\tau \rightarrow 0} \lambda_1^*(\tau) = 0$ . Это значение соответствует низшей частоте волноводных колебаний монодисперсной цепочки пузырьков. Далее мода колебаний, соответствующая низшей волноводной частоте, будет называться ползущей. Следует отметить, что длина волн ползущей моды превышает размеры неоднородностей. Если определитель матрицы  $A(\lambda)$  или дисперсионные соотношения (2.2) разложить в ряд

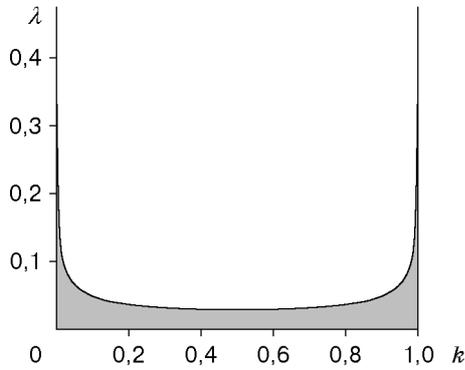


Рис. 2

Рис. 2. Зависимость ширины полосы пропускания ползущей моды от концентрации

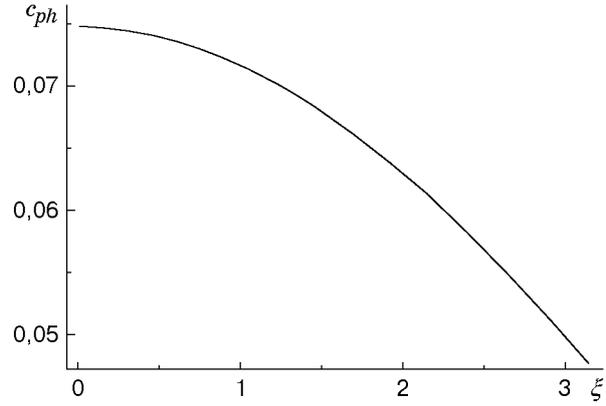


Рис. 3

Рис. 3. Зависимость фазовых скоростей ползущей моды от волнового числа

Тейлора по  $\lambda$  в точке  $\lambda = 0$  и пренебречь слагаемыми порядка  $\lambda^3$ , то можно получить приближенное выражение для низких волноводных частот ползущей моды

$$\lambda_1(\tau, \xi) = \sqrt{2\tau(1 - \cos \xi)} / \sqrt{(k + \tau - k\tau)(k\tau - k\alpha^2 + \alpha^2)}. \quad (2.3)$$

Для малых  $\tau$  справедливо представление  $\lambda_1(\tau, \xi) = \sqrt{2\tau(1 - \cos \xi)} / \sqrt{\alpha^2 k(1 - k)}$ . Для воды и воздуха  $\alpha = 1400/330$ ,  $\tau = 0,001$ .

На рис. 2 приведена зависимость ширины полосы пропускания волноводной частоты ползущей моды от концентрации воды для фиксированных значений параметров двух сред (вода — воздух). Необходимо отметить, что волноводные частоты ползущей моды существенно зависят от линейной концентрации  $k$ , для  $k \approx 0$  и  $k \approx 1$  полоса пропускания для ползущей моды сколь угодно расширяется. Для различных приложений, в которых  $\tau \ll 1$ , существенно, что для  $k = 0,5$  имеется глобальный минимум волноводной частоты как функции линейной концентрации. В силу (2.3) справедливо

**УТВЕРЖДЕНИЕ 2.** Наименьшее значение волноводной частоты ползущей моды как функции линейной концентрации  $k$  достигается в точке  $k = 1/2$ .

Условие (1.7) позволяет представить любое решение задачи  $TM(\xi)$  в виде  $p(x) = a(x) \exp(i\xi x)$ , где  $a(x) \equiv a(x+1)$  — амплитуда волноводных колебаний. Это представление позволяет считать  $\xi$  волновым числом. Зависимость фазовой скорости  $c_{ph}^{(1)}(\xi, k, \tau)$  волноводной моды монодисперсной цепочки пузырьков ползущей моды от волнового числа  $\xi$  представлена на рис. 3. Следует отметить, что фазовая скорость волноводных мод в монодисперсной цепочке пузырьков может быть меньше, чем скорость звука в пузырьках и окружающей их среде.

*Приближение длинных волн.* Для различных практических приложений целесообразно рассмотреть асимптотическое поведение волноводных частот и фазовых скоростей ползущей моды при условии, что длина волны значительно больше пространственного периода цепочки пузырьков. Для ползущей волноводной моды, соответствующей волноводной частоте  $\lambda_1(\xi, k, \tau)$ , длина волны  $L_w = 2\pi/\xi$ . Для больших значений  $L_w$  волновое число волноводной моды близко к нулю ( $\xi \approx 0$ ). Для малых  $\xi$  (см.(2.3))  $\lambda_1(\xi, k, \tau) = \xi\sqrt{\tau} / \sqrt{(k + \tau - k\tau)(k\tau - k\alpha^2 + \alpha^2)}$ . Безразмер-

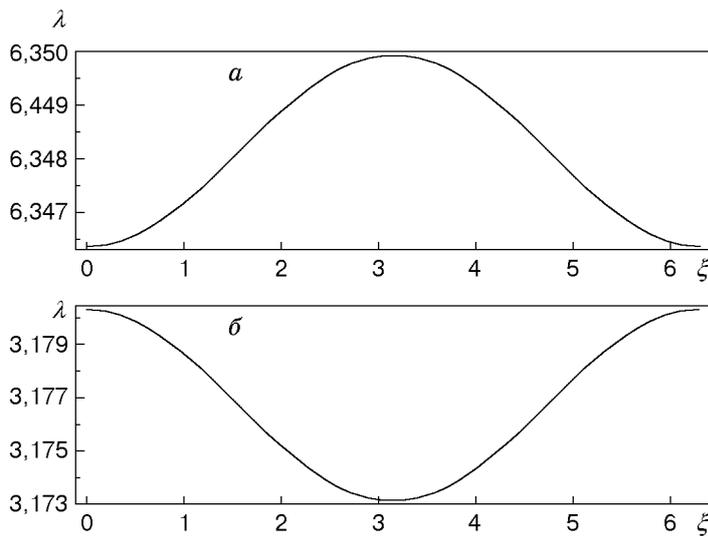


Рис. 4

Рис. 4. Дисперсионные кривые второй (а) и третьей (б) волноводных мод ( $k = 0,99$ )

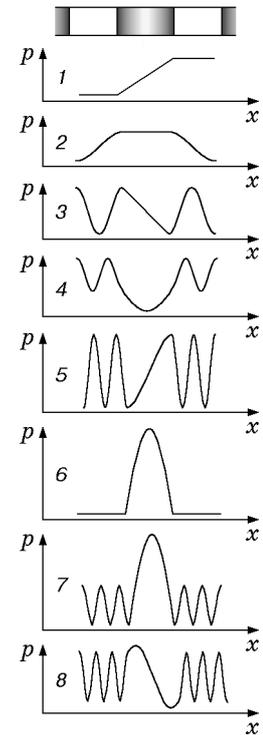


Рис. 5

Рис. 5. Поле давления для различных волноводных мод

ная фазовая скорость  $c_{ph}^{(1)}(\xi, k, \tau)$  распространения ползущей моды определяется как  $c_{ph}^{(1)}(\xi, k, \tau) = \lambda_1(\xi, k, \tau)/\xi = \sqrt{\tau}/[\varkappa\sqrt{k(1-k)}] = (c_2/c_1)\sqrt{\tau/k(1-k)}$ .

Необходимо отметить, что фазовая скорость длинной волны ползущей моды зависит только от концентрации, отношения скоростей звука и отношения плотностей двух сред, образующих цепочку.

*Высшие волноводные моды.* Наряду с ползущей модой по цепочке пузырьков могут распространяться волноводные моды с более высокой частотой. Число этих мод бесконечно. Для малых значений параметра  $\tau$  можно считать, что соответствующие волноводные частоты локализованы в окрестности соответствующих собственных значений задач Дирихле в областях 1 и Неймана в областях 2 для одномерного оператора Лапласа с учетом скоростей звука.

На рис. 4 показаны дисперсионные кривые для второй и третьей волноводных мод (ползущая мода считается первой) в цепочке, состоящей из воды и воздуха. Так как безразмерная длина пузырька воздуха равна 0,01, то первые волноводные частоты близки к собственным значениям задачи Дирихле для оператора Лапласа в интервале  $[0; 0,99]$ , которые, в свою очередь, близки к числам  $n\pi$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ . Это и подтверждают вычисления. Интервалы изменения по оси ординат дисперсионных кривых, приведенных на рис. 4, определяют полосы пропускания цепочки.

*Механика волноводных колебаний.* На рис. 5 показан вид волноводных мод (поле акустического давления) для значений параметров цепочки вода — воздух ( $\xi = \pi$ ,

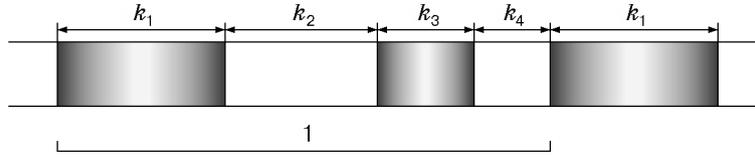


Рис. 6. Полидисперсная цепочка пузырьков

$k = k_1 = 0,5$ ) и значений безразмерных волноводных частот  $\lambda_1 = 0,029\,810\,516\,56$ ;  $\lambda_2 = 1,480\,950\,276$ ;  $\lambda_3 = 2,962\,316\,191$ ;  $\lambda_4 = 4,442\,661\,187$ ;  $\lambda_5 = 5,924\,166\,151$ ;  $\lambda_6 = 6,282\,808\,282$ ;  $\lambda_7 = 7,405\,995\,355\,8$ ;  $\lambda_8 = 8,886\,050\,022$  (кривые 1–8). По виду волноводных мод (рис. 5) можно судить о механике колебаний. Например, для  $\lambda_6$  колебания локализованы в воде, для  $\lambda_2$  — в воздухе. При колебаниях на первой моде капли воды движутся как целое, пузырьки воздуха действуют как пружинки.

В реальных средах монодисперсные структуры встречаются редко, поэтому целесообразно исследовать распространение акустических колебаний в полидисперсных цепочках неоднородностей. Простейшим примером является периодическая цепочка с двумя различными пузырьками в периоде.

**3. Волноводные свойства полидисперсной цепочки неоднородностей.** Пусть в одном периоде цепочки содержатся два включения среды  $M_1$  (вода) с размерами  $k_1$  и  $k_3$  ( $k_1 + k_3 = k$ ) и два включения среды  $M_2$  (пузырьки воздуха) с размерами  $k_2$  и  $k_4$  (рис. 6). Волноводные моды цепочки описываются в одном пространственном периоде соотношениями (1.1), (1.2) и условиями сдвига фазы (1.7) или (2.1), которые эквивалентны системе уравнений для восьми неизвестных  $AP(\lambda)Y = 0$ . Матрица  $AP(\lambda)$  строится так же, как для монодисперсной цепочки, с необходимыми изменениями. Из утверждения 1 следует, что волноводные частоты колебаний цепочки вещественны. Наименьшая волноводная частота колебаний полидисперсной цепочки находится из уравнения  $\det [AP(\lambda)] = 0$ . Для малых  $\tau$  эта частота вычисляется по формуле

$$\lambda_1(\xi, k, \tau) = \sqrt{2\tau(1 - \cos \xi) / [(k + \tau - k\tau)(k\tau - k\tau^2 + \tau^2)]}. \quad (3.1)$$

Правая часть (3.1) совпадает с правой частью дисперсионного соотношения для ползущей моды (2.3).

При малых значениях  $\tau$  и прочих равных параметрах существует минимум волноводной частоты в зависимости от концентрации, который достигается в точке  $k = 0,5$ . Наименьшая волноводная частота полидисперсной цепочки пузырьков для малых значений  $\tau$  определена только концентрацией. Это означает, что для  $\tau \ll 1$  полидисперсность цепочки пузырьков несущественна для ползущей моды.

Можно показать, что полидисперсность влияет на волноводные моды более высокого порядка, чем ползущая мода. На рис. 7 для цепочки вода — воздух приведена зависимость частоты второй волноводной моды от размеров первой капли воды  $k_1$  и первого пузырька воздуха  $k_2$  при фиксированной концентрации воды  $k = k_1 + k_3 = 0,9$ . Полидисперсность цепочки неоднородностей существенно влияет на частоты второй волноводной моды.

**4. Резонансные свойства цепочки и структура спектра.** Спектральные свойства задачи  $T$  и дисперсионные соотношения для монодисперсной и полидисперсной цепочек неоднородностей позволяют описать их резонансные свойства.

*Тонкая структура спектра.* Дисперсионные соотношения (2.2) для монодисперсной и (3.1) для полидисперсной цепочек позволяют определить полосы пропускания и записания задачи о прохождении акустических волн через одномерно-периодическую цепочку неоднородностей. Существенным является то, что полоса пропускания, соответствующая

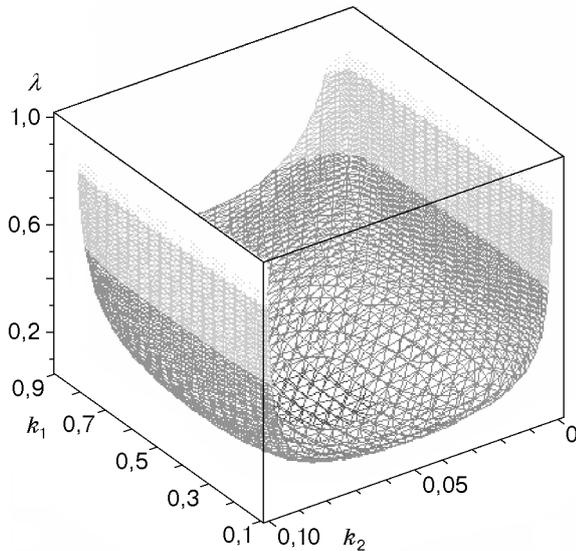


Рис. 7. Зависимость частот второй волноводной моды от размеров пузырьков полидисперсной цепочки

ползущей моде, для монодисперсной и полидисперсной цепочек примыкает к нулю (полоса пропускания  $\sigma_1$  на рис. 8).

Необходимо отметить, что количество полос пропускания и запираения бесконечно. Тонкая структура спектра задачи, описывающей распространение акустических волн через одномерно-периодическую цепочку неоднородностей, показана на рис. 8 ( $\sigma_n$  — полосы пропускания,  $s_n$  — полосы запираения,  $n = 1, 2, \dots$ ).

Для изучения распространения волновых пакетов и резонансных свойств одномерно-периодических цепочек неоднородностей необходимо исследование групповой скорости  $C_g^{(n)}(\xi, k, \tau)$  волноводных мод  $\lambda_n = \lambda_n(\xi)$  ( $n = 1, 2, \dots$ ). В силу симметрии задачи  $T(\xi)$  по волновому числу  $\xi$  в точках  $\xi = m\pi$  ( $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ) справедливы равенства  $C_g^{(n)}(0, k, \tau) = 0$  и  $C_g^{(n)}(\pm\pi, k, \tau) = 0$  для соответствующих значений волноводных частот  $\lambda_n(0)$  и  $\lambda_n(\pm\pi)$  ( $n = 1, 2, \dots$ ). Следует отметить, что значения волноводных частот  $\lambda_n(0)$  и  $\lambda_n(\pm\pi)$  являются границами полос пропускания и запираения, значения  $\lambda_n(0)$  принадлежат полосам запираения  $s_n$ , а значения  $\lambda_n(\pm\pi)$  — полосам пропускания  $\sigma_n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ).

*Локализованный резонанс.* Пусть в одномерно-периодической цепочке пронизываемых неоднородностей находится компактный источник с частотой  $\lambda_s$ . Так как групповая скорость является скоростью распространения энергии волноводной моды, то при частотах источника  $\lambda_s \neq 0$ , принадлежащих границам полос пропускания, возникают резонансные явления. В этом случае в любой момент времени энергия источника локализована в его окрестности. Аналогичное явление возникает в случае, когда частота колебаний принадлежит некоторой полосе запираения  $\rho_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$ . Справедлива

**Теорема 1.** *Если частота источника колебаний  $\lambda_s \neq 0$  совпадает с границей некоторой полосы пропускания или принадлежит некоторой полосе запираения, то для каждого момента времени энергия источника локализована в его окрестности: амплитуда колебаний около источника возрастает как функция времени (возникают резонансные явления).*

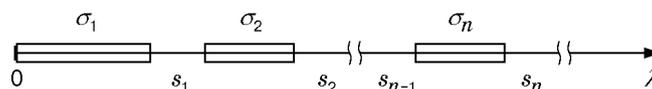


Рис. 8. Тонкая структура спектра

Конкретные значения амплитуды для резонансных значений частоты вынужденных колебаний определяются методом перевала [10] с использованием (2.2).

*Синхрофазотронный резонанс.* Пусть в цепочке проницаемых неоднородностей находятся источники колебаний  $f(x, t)$  такие, что  $f(x, t) = \exp(-i\omega_s t) f_1(x)_{x \in M_1}$ ,  $f(x, t) = \exp(-i\omega_s t) f_2(x)_{x \in M_2}$  и

$$f(x+1, t) \equiv \exp(i\xi) f(x, t) \equiv \exp(i\xi - i\omega_s t) f(x). \quad (4.1)$$

Акустическое возмущение давления удовлетворяет уравнениям установившихся колебаний с безразмерной частотой  $\lambda_s = L\omega_s/c_1$ , которые имеют вид

$$p_{xx}^{(1)} + \lambda_s^2 p^{(1)} = f_1(x), \quad p_{xx}^{(2)} + \lambda_s^2 \varepsilon^2 p^{(2)} = f_2(x). \quad (4.2)$$

На границах двух сред должны быть выполнены условия трансмиссии (1.2). Задача (4.2), (1.2) описывает вынужденные колебания в цепочке неоднородностей и далее называется задачей  $TF(\xi)$ . Так как источники колебаний удовлетворяют условию сдвига фазы (4.1) для некоторого значения  $\xi$ , то решение задачи  $TF(\xi)$  переходит в решение этой же задачи под действием любого элемента группы трансляций  $\{T_1\}$  и удовлетворяет условию (1.7). Пусть  $\lambda^*(\xi)$  — некоторая волноводная частота задачи  $T(\xi)$ . Так как  $T(\xi)$  является одномерной задачей  $TF(\xi)$ , в том случае, когда безразмерная частота колебаний источника  $\lambda_s$  стремится к некоторой волноводной частоте  $\lambda^*(\xi)$ , возникает резонанс. Амплитуда бегущей волны неограниченно возрастает со временем (как в синхрофазотронах). Справедлива

**Теорема 2.** *Если в периодической цепочке неоднородностей периодически распределены источники колебаний со сдвигом фазы  $\xi$  в соседних фундаментальных областях группы трансляций (4.1), то при совпадении частоты источника колебаний  $\lambda_s$  с некоторой волноводной частотой  $\lambda^*(\xi)$  возникает резонанс. Этот резонанс называется резонансом синхрофазотронного типа.*

**5. Выводы.** При расчете распространения волн в неоднородных средах необходимо учитывать взаимодействие соседних неоднородностей. Это существенно изменяет волноводные и резонансные свойства неоднородной среды и обуславливает появление серии низкочастотных волноводных колебаний около цепочки неоднородностей. Этим колебаниям соответствуют ползущие по цепочке волны. Низкочастотные собственные колебания, обусловленные взаимодействием соседних неоднородностей, необходимо учитывать при изучении распространения начального возмущения и исследовании реакции структуры на вынужденные колебания. Полидисперсность пузырьков не оказывает существенного влияния на низкочастотные волноводные колебания неоднородной среды, если отношение плотностей стремится к нулю (бесконечности). В этом случае низшие частоты колебаний определяются линейной концентрацией пузырьков, периодом цепочки и сдвигом фазы колебаний.

Автор выражает благодарность В. К. Кедринскому и С. Л. Гаврилюку за полезные обсуждения работы.

## ЛИТЕРАТУРА

1. **Бриллюэн Л., Пароди М.** Распространение волн в периодических структурах. М.: Изд-во иностран. лит., 1959.
2. **Санчез Паленсия Э.** Неоднородные среды и теория колебаний. М.: Мир, 1984.
3. **Сухинин С. В.** Собственные волны одномерной проницаемой периодической цепочки // Динамика сплошной среды: Сб. науч. тр. / АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т гидродинамики. 1992. Вып. 106. С. 234–243.

4. **Sukhinin S. V.** Wave propagation in periodical chains of bubbles. Advances in computational methods in fluid dynamics // Proc. of the 1994 ASME fluid engng division summer meet., Lake Tahoe, USA, June 19–23, 1994.
5. **Сухинин С. В.** Особенности распространения сигналов в гетерогенных средах // Сб. тр. V Междунар. семинара по устойчивости течений гомогенных и гетерогенных жидкостей, Новосибирск, 22–24 апр. 1998 г. Новосибирск: Новосиб. гос. архит.-строит. ун-т, 1998. С. 98–103.
6. **Сухинин С. В.** Волноводное, аномальное и шепчущее свойства периодической цепочки препятствий // Сиб. журн. индустр. математики. 1998. Т. 1, № 2. С. 175–198.
7. **Никулин В. В., Шафаревич И. Р.** Геометрии и группы. М.: Наука, 1983.
8. **Багавантам С., Венкатарайуду Т.** Теория групп и ее применение к физическим проблемам. М.: Изд-во иностр. лит., 1959.
9. **Любарский Г. Я.** Теория групп и ее применение в физике. М.: Физматгиз, 1958.
10. **Лаврентьев М. А., Шабат Б. В.** Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1973.

*Поступила в редакцию 18/X 2000 г.*

---