

УДК 517.944+533

НЕПРЕРЫВНОЕ РАДИАЛЬНОЕ ОГРАНИЧЕННОЕ ДВИЖЕНИЕ ГАЗА ПОД ДЕЙСТВИЕМ ПОРШНЯ

С. В. Хабиров

Институт механики УНЦ РАН, 450000 Уфа

Показана возможность непрерывного сопряжения радиального прямолинейного движения газового шара к центру и от центра с движением, в котором газ останавливается сразу во всем шаре. Движение описывается с помощью инвариантной подмодели ранга 1. Отражения по времени позволяют построить решение, задающее периодическое непрерывное ограниченное движение газового шара под действием поршня.

Ключевые слова: газовый шар, сферический поршень, инвариантная подмодель.

1. Постановка задачи. Радиальные движения газа описываются уравнениями

$$\begin{aligned} U_t + UU_r + \rho^{-1}p_r &= 0, \\ \rho_t + U\rho_r + \rho(U_r + 2r^{-1}U) &= 0, \\ S_t + US_r &= 0, \quad p = f(\rho, S), \quad a^2 = f_\rho, \end{aligned} \quad (1)$$

где U — радиальная скорость; $\rho \geq 0$ — плотность; p — давление; S — энтропия; a — скорость звука; r — радиус газовой сферы.

Уравнения допускают перенос по времени ∂_t , равномерное растяжение $t\partial_t + r\partial_r$, отражение $t' = -t$, $U' = -U$. Инвариантные решения рассматривались ранее [1, § 21].

Регулярное частично инвариантное решение на подгруппе растяжений имеет представление

$$U = U(s), \quad S = S(s), \quad \rho = \rho(t, r), \quad s = rt^{-1},$$

подстановка которого в систему (1) приводит к равенствам

$$\begin{aligned} (U - s)S' &= 0, \quad \rho(U - s)U' + tf_\rho\rho_r + f_S S' = 0, \\ \rho_t + U\rho_r &= -\rho t^{-1}(U' + 2s^{-1}U). \end{aligned}$$

Изучение совместности дает три случая.

1. $U = s$, $\rho = \rho_0 t^{-3} \mu(S)$; $\rho = g(p) \mu(S)$ — уравнение состояния с разделенной плотностью; $S = S(s)$ — произвольная функция.

2. $S = S_0$ — постоянная, тогда имеются интеграл

$$\frac{U^2}{2} - sU + \int U ds + \int f_\rho \rho^{-1} d\rho = D(t)$$

и уравнение

$$-tD' + (U - s)^2 U' = f_\rho (U' + 2s^{-1}U).$$

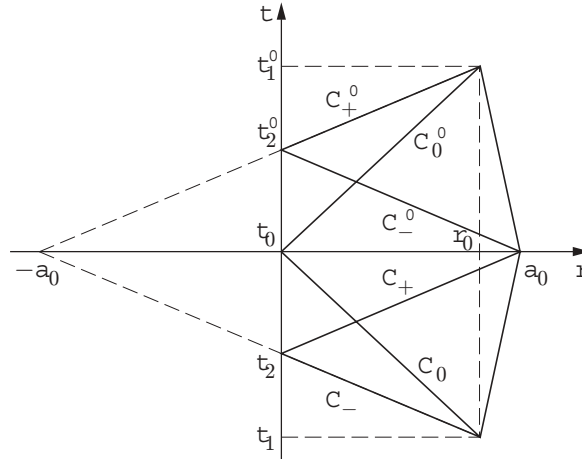


Рис. 1

Соотношения совместны лишь при $p = a^2\rho + p_0$ (скорость звука a постоянна), $D = a^2(k \ln t + \ln \rho_0)$ (k — постоянная).

Отсюда получим

$$\rho = \rho_0 t^k \exp \left[-\frac{u^2}{2} - \int u dx \right], \quad U = s + au(x), \quad s = ax.$$

Подмодель сводится к уравнению Абеля второго рода

$$\frac{dx}{du} = \frac{x(u^2 - 1)}{2u - x(u^2 - k - 3)}.$$

3. $S = S_0, U = s, \rho = \rho_0 t^{-3}$ для произвольного уравнения состояния.

Далее рассматривается изэнтропическое радиальное движение для случая 3, в котором сделан перенос по времени:

$$U = r(t - t_0)^{-1}, \quad \rho = \rho_0 |t - t_0|^{-3}, \quad S = S_0, \tag{2}$$

$$p = f(\rho_0 |t - t_0|^{-3}, S_0).$$

Плотность и давление неограниченно возрастают при $t \rightarrow t_0$.

Для специального политропного газа определяются давление и скорость звука

$$p = B\rho^{5/3} = p_0 |t - t_0|^{-5}, \quad a = a_0 |t - t_0|^{-1}.$$

Здесь $p_0 = B\rho_0^{5/3}, a_0 = \sqrt{5B/3}\rho_0^{1/3}$. При этом работа сил давления по сжатию газа в точку равна бесконечности.

Характеристики системы (1) на решении (2), выходящие из точки (t_1, r_0) , суть прямые линии

$$C_0: \quad r = r_0 \frac{t - t_0}{t_1 - t_0}, \quad C_{\pm}: \quad r = r_0 \frac{t - t_0}{t_1 - t_0} \pm a_0 \frac{t - t_1}{|t_1 - t_0|}.$$

Здесь t лежит между t_0 и t_1 . Расположение характеристик показано на рис. 1. Картина инвариантна при отражении от прямой $t = t_0$.

При $t_0 > t > t_1$ характеристика C_- доходит до центра ($r = 0$) в момент $t_2 = (r_0 t_0 + a_0 t_1)(r_0 + a_0)^{-1}$. При $t_0 < t < t'_1$ характеристика C'_+ выходит из центра ($r = 0$) в момент $t'_2 = (r_0 t_0 + a_0 t'_1)(r_0 + a_0)^{-1}$, чтобы попасть в точку (t'_1, r_0) .

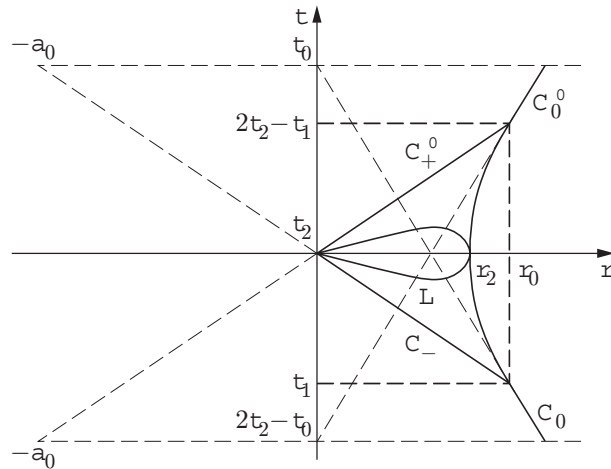


Рис. 2

Пусть поршень сжимает специальный политропный газ, двигая его по закону $U = r(t - t_0)^{-1}$, $a = a_0|t - t_0|^{-1}$, и в момент t_1 радиус газового шара r_0 , а давление достигает близкого к предельно допустимому значению: $p_1 = p_0|t_1 - t_0|^{-5}$.

Найдем движение поршня $r = R(t)$ и изменение давления на поршне, чтобы в момент $t = t_2$ прихода характеристики C_- к центру ($r = 0$) движение газа в шаре остановилось ($U = 0$). С этой целью решается краевая задача для системы уравнений ($a^2 = 5p/(3\rho)$, $S = S_0$)

$$\begin{aligned} U_t + UU_r + 3aa_r &= 0, \\ a_t + Ua_r + 3^{-1}a(U_r + 2r^{-1}U) &= 0 \end{aligned} \tag{3}$$

в угловой области (рис. 2), ограниченной прямой характеристикой C_- :

$$r = \frac{a_0(t - t_2)}{t_2 - t_0}, \quad U = \frac{a_0(t - t_2)}{(t_2 - t_0)(t - t_0)} < 0, \quad a = \frac{a_0}{|t - t_0|} \tag{4}$$

и прямой торможения l :

$$t = t_2 = \frac{r_0 t_0 + a_0 t_1}{r_0 + a_0}, \quad U = 0. \tag{5}$$

Условие согласования в точке $(t_2, 0)$ выполнено.

На поршне $r = R(t)$ должны выполняться условия

$$R' = U(t, R), \quad R(t_1) = r_0, \quad p = P(t) \leq p_0|t - t_0|^{-5}. \tag{6}$$

Из уравнений (6) находится закон движения поршня по решению краевой задачи.

Отражение от прямой $t = t_2$ дает решение вида (2), где параметр t_0 заменен на параметр $2t_2 - t_0$. Получается задача Гурса в пространственно подобной области с данными на характеристиках C_- и C'_+ (см. рис. 2). Задача инвариантна относительно отражения от прямой $t = t_2$, поэтому мировые линии частиц симметричны относительно прямой $t = t_2$ и данные задачи Гурса согласованы, т. е. мировая линия пересекает характеристики в симметричных точках с равными по величине, но противоположно направленными скоростями. Так же как в работе [2], полагаем, что для малых r_0 существует единственное аналитическое решение задачи Гурса. Доказательство этого факта требует дополнительного рассмотрения.

Задача о сопряжении инвариантных и частично инвариантных решений входит в программу ПОДМОДЕЛЕЙ уравнений газовой динамики [3, 4]. Здесь приводится пример непрерывного сопряжения через характеристику инвариантных решений.

2. Симметрии задачи. Вводятся новые функции по формулам

$$u = U/3 + a, \quad v = U/3 - a. \quad (7)$$

Система (3) принимает вид

$$u_t + (2u + v)u_r = \frac{v^2 - u^2}{2r}, \quad v_t + (2v + u)v_r = \frac{u^2 - v^2}{2r}. \quad (8)$$

Здесь операторы в левых частях уравнений являются дифференцированием вдоль характеристик. Система (8) инвариантна относительно отражений: 1) $u \leftrightarrow v$; 2) $t \rightarrow -t$, $u \rightarrow -u$, $v \rightarrow -v$; 3) $t \rightarrow -t$, $r \rightarrow -r$.

Краевые условия (4), (5) принимают вид

$$C_-: \quad r = \frac{a_0(t - t_2)}{t_2 - t_0}, \quad u + 2v = \frac{a_0}{t_2 - t_0}, \quad v - u = \frac{2a_0}{t - t_0}; \quad (9)$$

$$l: \quad t = t_2, \quad u + v = 0. \quad (10)$$

Теорема 1. Система уравнений (8) допускает алгебру Ли L_4 операторов с базисом

$$X_0 = \partial_t, \quad X_1 = t \partial_t + r \partial_r, \quad X_2 = r \partial_r + u \partial_u + v \partial_v, \\ X_3 = t^2 \partial_t + tr \partial_r + (r/3 - tu) \partial_u + (r/3 - tv) \partial_v.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Условие инвариантности системы (8) относительно оператора

$$X = \xi^t \partial_t + \xi^r \partial_r + \xi^u \partial_u + \xi^v \partial_v$$

достаточно записать для одного из уравнений системы. Для другого уравнения оно получается заменой $u \leftrightarrow v$.

2-уравнения условий инвариантности имеют вид (см. [5])

$$\xi_v^r = (2u + v)\xi_v^t, \quad \xi_u^r = (2v + u)\xi_u^t. \quad (11)$$

1-уравнения условий инвариантности таковы:

$$\xi_v^u = \frac{v^2 - u^2}{2r} \xi_v^t, \quad \xi_u^v = \frac{u^2 - v^2}{2r} \xi_u^t; \quad (12)$$

$$2\xi^u + \xi^v = (v - u) \frac{v^2 - u^2}{2r} \xi_u^t + \xi_t^r + (2u + v)[\xi_r^r - \xi_t^t - (2u + v)\xi_r^t], \quad (13)$$

$$2\xi^v + \xi^u = (v - u) \frac{v^2 - u^2}{2r} \xi_v^t + \xi_t^r + (2v + u)[\xi_r^r - \xi_t^t - (2v + u)\xi_r^t].$$

Остается записать 0-уравнения

$$\left(\frac{v^2 - u^2}{2r}\right)^2 (\xi_v^t - \xi_u^t) + \frac{v^2 - u^2}{2r} (\xi_u^u - \xi_t^t - \xi_v^v - (2u + v)\xi_r^t + r^{-1}\xi^r) + \\ + \xi_t^u + (2u + v)\xi_r^u = r^{-1}(v\xi^v - u\xi^u), \\ r^{-1}(u\xi^u - v\xi^v) = (2v + u)\xi_r^v + \left(\frac{v^2 - u^2}{2r}\right)^2 (\xi_u^t - \xi_v^t) + \\ + \frac{u^2 - v^2}{2r} (\xi_v^v - \xi_t^t - \xi_u^u - (2v + u)\xi_r^t + r^{-1}\xi^r) + \xi_t^v. \quad (14)$$

Линейная система (11) имеет общее решение

$$\begin{aligned}\xi^t &= -\frac{a_u + b_v}{(u-v)^2} + 2\frac{a-b}{(u-v)^3}, \\ \xi^r &= -\frac{(2v+u)a_u + (2u+v)b_v}{(u-v)^2} + 3(u+v)\frac{a-b}{(u-v)^3} + \eta(t,r),\end{aligned}\quad (15)$$

где $a(t, r, u)$, $b(t, r, v)$ — произвольные функции.

Уравнения (13) определяют представления для ξ^u , ξ^v :

$$\begin{aligned}3\xi^u &= (v-u)\frac{v^2-u^2}{2r}(2\xi_u^t - \xi_v^t) + \xi_t^r + 3u(\xi_r^r - \xi_t^t) - (7u^2 + 4uv - 2v^2)\xi_r^t, \\ 3\xi^v &= (u-v)\frac{u^2-v^2}{2r}(2\xi_v^t - \xi_u^t) + \xi_t^r + 3v(\xi_r^r - \xi_t^t) - (7v^2 + 4uv - 2u^2)\xi_r^t.\end{aligned}\quad (16)$$

Уравнения (12) после подстановки представлений для ξ^t , ξ^r , ξ^u , ξ^v становятся уравнениями для a и b , в которых надо разделить переменные u и v :

$$\begin{aligned}(u+v)(2r)^{-1}a'''(u-v)^3 - r^{-1}(2u+3v)a''(u-v)^2 - r^{-1}b''(u-v)^3 + \\ + r^{-1}[(3u+11v)a' + (7v-3u)b'](u-v) - a_t''(u-v)^2 + \\ + (4a_t' + 2b_t')(u-v) + [(4u+8v)a_r' + 6vb_r'](u-v) - (2u+v)a_r''(u-v)^2 = \\ = 18vr^{-1}(a-b) + 6a_t - 6b_t + (4u+14v)(a_r - b_r); \quad (17)\end{aligned}$$

второе уравнение получится, если заменить в (15) $u \leftrightarrow v$, $a \leftrightarrow b$. Здесь $a' = a_u$, $b' = b_v$.

В равенстве (17) перейдем к пределу при $u \rightarrow v$, в результате получим

$$18r^{-1}va + 6a_t + 18va_r = 18r^{-1}vb + 6b_t + 18vb_r. \quad (18)$$

В силу (18) правую часть равенства (17) представим в виде

$$18vr^{-1}(a(u) - a(v)) + 6(a_t(u) - a_t(v)) - 4(u-v)b_r(v) - 18v(a_r(v) - a_r(u)) + 4(u-v)a_r(u).$$

Разделив уравнение (17) на $(u-v)$ и перейдя к пределу при $u \rightarrow v$, получим

$$4vr^{-1}a' + 2a_t' + 6va_r' + 4a_r = 4vr^{-1}b' + 2b_t' + 6vb_r' + 4b_r. \quad (19)$$

В силу (18) и (19) равенство (17) представляется в виде

$$\begin{aligned}[(2r)^{-1}(u+v)a'''(u) - r^{-1}b''(v)](u-v) = r^{-1}(2u+3v)a''(u) + a_t''(u) + (2u+v)a_r''(u) + \\ + 18vr^{-1}\frac{a(u) - a(v) - a'(v)(u-v)}{(u-v)^2} - 3r^{-1}a'(u) - 14vr^{-1}\frac{a'(u) - a'(v)}{u-v} + \\ + 6\frac{a_t(u) - a_t(v) - a_t'(v)(u-v)}{(u-v)^2} - 4\frac{a_t'(u) - a_t'(v)}{u-v} + 18v\frac{a_r(u) - a_r(v) - a_r'(v)(u-v)}{(u-v)^2} - \\ - 12v\frac{a_r'(u) - a_r'(v)}{u-v} + 4\frac{a_r(u) - a_r(v)}{u-v} - 4a_r'(u) + 3r^{-1}b'(v).\end{aligned}$$

Переходя к пределу при $u \rightarrow v$, получим $b' = a'$, тогда из (18) и (19) следует $a_r = b_r$, $a_t = b_t$. Значит, $a(t, r, v) = b(t, r, v)$ и уравнение (17) становится функциональным уравнением для определения a . Представим функции $a(u)$, $a_r(u)$, $a_t(u)$, $a'(u)$, ... в виде рядов по степеням $(u-v)$, тогда уравнение (17) примет вид

$$\frac{(u-v) + 2v}{2r} \left[a'''(v) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} a^{(k+3)}(v)(u-v)^k \right] - \frac{a''(v)}{r} =$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{18v}{r} \sum_{k=3} \frac{1}{k!} a^{(k)}(v)(u-v)^{k-3} - \frac{14v}{r} \sum_{k=2} \frac{1}{k!} a^{(k+1)}(v)(u-v)^{k-2} + \\
 &+ \frac{5v}{r} \sum_{k=1} \frac{1}{k!} a^{(k+2)}(v)(u-v)^{k-1} + \frac{2a''(v)}{r} + \frac{2}{r} \sum_{k=1} \frac{1}{k!} a^{(k+2)}(v)(u-v)^k - \\
 &- \frac{3}{r} \sum_{k=1} \frac{1}{k!} a^{(k+1)}(v)(u-v)^{k-1} + 6 \sum_{k=3} \frac{1}{k!} a_t^{(k)}(v)(u-v)^{k-3} - \\
 &- 4 \sum_{k=2} \frac{1}{k!} a_t^{(k+1)}(v)(u-v)^{k-2} + \sum_{k=1} \frac{1}{k!} a_t^{(k+2)}(v)(u-v)^{k-1} + \\
 &+ 18v \sum_{k=3} \frac{1}{k!} a_r^{(k)}(v)(u-v)^{k-3} - 12v \sum_{k=2} \frac{1}{k!} a_r^{(k+1)}(v)(u-v)^{k-2} + \\
 &+ 3v \sum_{k=1} \frac{1}{k!} a_r^{(k+2)}(v)(u-v)^{k-1} + 2a_r''(v) + 2 \sum_{k=1} \frac{1}{k!} a_r^{(k+2)}(v)(u-v)^k + \\
 &\quad + 4 \sum_{k=2} \frac{1}{k!} a_r^{(k)}(v)(u-v)^{k-2} - 4 \sum_{k=1} \frac{1}{k!} a_r^{(k+1)}(v)(u-v)^{k-1}.
 \end{aligned}$$

Приравниваем к нулю коэффициенты при степенях $(u-v)^k$, $k = 1, 2, 3$:

$$\begin{aligned}
 vr^{-1}a^{IV} &= a_t^{IV} + 3va_r^{IV} + 8a_r''', \\
 2vr^{-1}a^V &= a_t^V + 3va_r^V + 10a_r^{IV}, \\
 a_t^{VI} + 3va_r^{VI} + 12a_r^V &= 3vr^{-1}a^{VI} + 5(2r)^{-1}a^V.
 \end{aligned} \tag{20}$$

Исключим производные по переменной t :

$$va^V + ra_r^{IV} = a^{IV}, \quad va^{VI} + ra_r^V = -2^{-1}a^V.$$

Исключив производные по r , получим $a^V = 0$. Тогда из (20) следует $a_r^{IV} = 0$, $vr^{-1}a^{IV} = a_t^{IV} + 8a_r''' \Rightarrow a^{IV} = 0$, $a''' = -6\xi(t) \Rightarrow$

$$a = -\xi u^3 + k_2 u^2 + k_1 u + k_0, \quad b = -\xi v^3 + k_2 v^2 + k_1 v + k_0,$$

где $\xi(t)$, $k_i(t, r)$ — произвольные функции. Подстановка в (15), (16) дает $\xi^t = \xi(t)$, $\xi^r = \eta(t, r)$, $\xi^u = \eta_t/3 + u(\eta_r - \xi_t)$, $\xi^v = \eta_t/3 + v(\eta_r - \xi_t)$.

0-уравнения (14) расщепляются по переменным u и v :

$$\begin{aligned}
 r\eta_r = \eta, \quad \eta_{tt} = 0, \quad r\xi_{tt} = 2\eta_t &\implies \\
 \xi^r = r(C_1 t + C_0), \quad \xi^t = C_1 t^2 + C_2 t + C_3, \\
 \xi^u = (r/3 - tu)C_1 + (C_0 - C_2)u, \quad \xi^v = (r/3 - tv)C_1 + (C_0 - C_2)v.
 \end{aligned}$$

Теорема 2. *Существует единственный оператор Y из алгебры L_4 , который оставляет инвариантным краевое условие (9) на характеристике C_- .*

Краевые условия на характеристике C_- и прямой l записываются через инварианты оператора Y .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Общий оператор алгебры L_4 запишем в виде

$$\begin{aligned}
 X = x^0 X_0 + x^1 X_1 + x^2 X_2 + x^3 X_3 &= (x^0 + x^1 t + x^3 t^2) \partial_t + (x^1 + x^2 + x^3 t) r \partial_r + \\
 &\quad + (x^2 u + x^3 (r/3 - tu)) \partial_u + (x^2 v + x^3 (r/3 - tv)) \partial_v.
 \end{aligned}$$

Критерий инвариантности многообразия C_- приводит к соотношениям

$$x^2 = t_2 x^3, \quad x^0 = t_0 t_2 x^3, \quad x^1 = -(t_0 + t_2) x^3.$$

Значит, многообразие C_- инвариантно относительно оператора

$$\begin{aligned} Y &= t_0 t_2 X_0 - (t_0 + t_2) X_1 + t_2 X_2 + X_3 = \\ &= (t - t_0)(t - t_2) \partial_t + (t - t_0) r \partial_r + (r/3 - (t - t_2)u) \partial_u + (r/3 - (t - t_2)v) \partial_v. \end{aligned}$$

Инварианты оператора Y задаются базисом

$$\begin{aligned} r^{-1}(t - t_2) &= s < 0, & (t - t_0)(su - 1/3) &= u_1(t_0 - t_2), \\ (t - t_0)(sv - 1/3) &= v_1(t_0 - t_2). \end{aligned}$$

Краевые условия (9), (10) записываются через инварианты

$$C_-: \quad s = a_0^{-1}(t_2 - t_0) = s_0 < 0, \quad u_1 = 4/3, \quad v_1 = -2/3; \quad (21)$$

$$l: \quad u_1 + v_1 = 2/3, \quad s \rightarrow -0. \quad (22)$$

Краевое условие (10) более сильное, чем (22),

$$U = \left(\frac{1 - 3/2(u_1 + v_1)}{s} - \frac{r}{t_0 - t_2} \right) \left(1 - \frac{rs}{t_0 - t_2} \right)^{-1} \rightarrow 0 \quad (23)$$

при $s \rightarrow -0$. Условие (23) не инвариантно относительно оператора Y . Здесь u_1, v_1 — функции переменных s, r .

3. Инвариантные решения. Решение краевой задачи (8), (21), (22) можно искать как инвариантное Y -решение вида

$$\begin{aligned} u &= s^{-1}(1/3 + (t_0 - t_2)(t - t_0)^{-1}u_1(s)), \\ v &= s^{-1}(1/3 + (t_0 - t_2)(t - t_0)^{-1}v_1(s)). \end{aligned} \quad (24)$$

Подстановка в (8) дает инвариантную подмодель

$$\begin{aligned} -(2u_1 + v_1)su_1' &= 2^{-1}(v_1 - u_1)^2 - 3u_1^2 + u_1, \\ -(2v_1 + u_1)sv_1' &= 2^{-1}(u_1 - v_1)^2 - 3v_1^2 + v_1. \end{aligned} \quad (25)$$

Инвариантное решение (24) примыкает к решению (2) и определено в области $0 < s < s_0$. При этом выполняется условие: на кривой L (см. рис. 2)

$$(2/3)rs + (t_2 - t_0)(2/3 - u_1 - v_1) = 0 \quad (26)$$

выполняется равенство $U = 0$.

Подмодель (25) сводится к автономному уравнению

$$(2u_1 + v_1)[(v_1 - u_1)^2/2 - 3v_1^2 + v_1] du_1 = (2v_1 + u_1)[(v_1 - u_1)^2/2 - 3u_1^2 + u_1] dv_1 \quad (27)$$

и квадратуре

$$-\frac{ds}{s} = \frac{(2u_1 + v_1) du_1}{(v_1 - u_1)^2/2 - 3u_1^2 + u_1} = \frac{(2v_1 + u_1) dv_1}{(v_1 - u_1)^2/2 - 3v_1^2 + v_1}. \quad (28)$$

Уравнение (27) исследовано в работах [6; 7; 8, § 162] об автомоделных сжатиях покоящегося газового шара под действием сферического поршня. Здесь уравнение (27) является подмоделью проективного оператора Y для отыскания инвариантного решения, примыкающего к радиальному решению (2). Инвариантные подмодели одинаковы для разных

подалгебр: X_1 -решения вида $u = s^{-1}(1/3 - u_1)$, $v = s^{-1}(1/3 - v_1)$, $s = (t - t_2)r^{-1}$ и Y -решения вида (24) определяются подмоделью (25). Такие инвариантные решения связаны преобразованием

$$u' = \frac{t_2 - t_0}{t - t_0} u + \frac{r}{3(t - t_0)}, \quad v' = \frac{t_2 - t_0}{t - t_0} v + \frac{r}{3(t - t_0)},$$

которое есть преобразование подобия только для рассматриваемых инвариантных решений. Система уравнений (8) не инвариантна относительно этих преобразований, поэтому подалгебры X_1 и Y не подобны.

Приведем результаты качественного исследования поведения интегральных кривых. Уравнение (27) имеет интегральные прямые $l_1: u_1 = v_1$ и $l_2: u_1 + v_1 = 2/3$. Картина интегральных кривых симметрична относительно прямой $u_1 = v_1$, так как уравнение (27) инвариантно относительно замены $u_1 \leftrightarrow v_1$. Имеется 6 особых точек.

Точка O : $u_1 = v_1 = 0$ — двойной узел с общими касательными интегральных кривых $u_1 = 0$ и $v_1 = 0$.

Точка B_1 : $u_1 = -2/3$, $v_1 = 4/3$ и точка B : $u_1 = 4/3$, $v_1 = -2/3$ — вырожденные узлы с общей касательной l_2 у интегральных кривых. Точка B совпадает с условиями (21) на характеристике C_- .

Точка A : $u_1 = v_1 = 1/3$ — дикритический узел, удовлетворяющий условию (22) на прямой l .

Точка C : $u_1 = (1 + \sqrt{3})/6$, $v_1 = (1 - \sqrt{3})/6$ — седло с сепаратрисами, касательными к прямым

$$v_1 - (1 - \sqrt{3})/6 + (\sqrt{3} + 1)(\sqrt{3} \mp \sqrt{5/2})(u_1 - (1 + \sqrt{3})/6) = 0.$$

Точка C_1 : $u_1 = (1 - \sqrt{3})/6$, $v_1 = (1 + \sqrt{3})/6$ — седло с сепаратрисами, касательными к прямым

$$v_1 - (1 + \sqrt{3})/6 + (\sqrt{3} - 1)(\sqrt{3} \mp \sqrt{5/2})(u_1 - (1 - \sqrt{3})/6) = 0.$$

Интегральные кривые имеют направления с нулевым углом наклона к оси v_1 в точках прямой m_1 ($2v_1 + u_1 = 0$) и гиперболы g_1 ($6(u_1 - v_1)^2 = (6u_1 - 1)^2 - 1$); интегральные кривые имеют направления с нулевым углом наклона к оси u_1 в точках прямой m_2 ($2u_1 + v_1 = 0$) и гиперболы g_2 ($6(u_1 - v_1)^2 = (6v_1 - 1)^2 - 1$) (рис. 3).

Гиперболы g_1 , g_2 и прямые m_1 , m_2 — линии перемены знака в выражении (28). Стрелки на рис. 3 указывают направления движения по интегральным кривым, чтобы при этом выполнялось неравенство $ds > 0$. Имеются две прямые m_1 и m_2 , на которых меняется направление стрелок.

Расположение гипербол и сепаратрис в седле определяется по их углам наклона. Аналогично определяется расположение гиперболы и касательной интегральных кривых в вырожденном узле.

Краевое условие (22) либо определяет интегральную прямую l_2 , либо выделяет интегральные кривые, проходящие через точку A .

Итак, интегральная кривая, соединяющая вырожденный узел B и дикритический узел A , задает решение краевой задачи (8), (9), (26), если вдоль этой интегральной кривой выражение ds не меняет знак. На рис. 3 видно, что таких кривых много: $v_1 = \varphi(u_1, k)$, k — параметр кривых такой, что $v_1 - 1/3 \sim -k(u_1 - 1/3)$ при $u_1 \rightarrow 1/3$, $1 < k < k_0 = 2 + \sqrt{3}$. Кривые находятся между прямой $u_1 + v_1 = 2/3$ и сепаратрисами седла, идущими в вырожденный узел и дикритический узел: $\varphi(4/3, k) = -2/3$, $\varphi(1/3, k) = 1/3$, $\varphi'(4/3, k) = -1$, $\varphi'(1/3, k) = -k$.

Интегральной прямой $u_1 + v_1 = 2/3$ соответствует решение задачи (25), (21), (22): $u_1 = 1/3 + ss_0^{-1}$, $v_1 = 1/3 - ss_0^{-1}$. Формулы (7), (24) дают распределение газовых параметров (2).

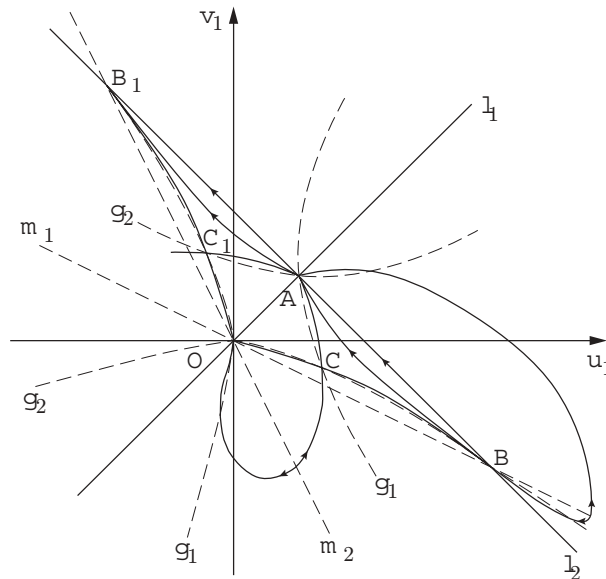


Рис. 3

Лемма. Для любой интегральной кривой, входящей в дискритический узел, величина $s \rightarrow 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В линейном приближении интегральная кривая имеет вид $v_1 \simeq 1/3 - k(u_1 - 1/3)$ при $u_1 \rightarrow 1/3$. Уравнение (28) запишется так:

$$-\frac{ds}{s} \simeq \left(-\frac{3}{3u_1 - 1} + \frac{3(k^2 - 1)}{3((k+1)^2 - 6)u_1 - (k+1)^2} \right) du_1.$$

Отсюда следует

$$-s_0^{-1}s \simeq (u_1 - 1/3) \left(1 - ((k+1)^2/2 - 3)(u_1 - 1/3) \right)^{\frac{1-k^2}{(k+1)^2-6}}$$

при $u_1 \rightarrow 1/3$. Следовательно, $s \rightarrow -0$, $u_1 \simeq 1/3 - s_0^{-1}s$, $v_1 \simeq ks_0^{-1}s + 1/3$.

Асимптотическое поведение решения системы (24) в окрестности точки $s = 0$, $u_1 = v_1 = 1/3$ таково:

$$u_1 = \frac{1}{3} + s_1 \left(-1 + \sum_{j=1}^{\infty} a_j s_1^j \right), \quad v_1 = \frac{1}{3} + s_1 \left(k + \sum_{j=1}^{\infty} b_j s_1^j \right), \quad (29)$$

где

$$s_1 = s s_0^{-1}, \quad -b_1 = a_1 = (1 - k^2)/2, \quad b_2 = k a_2, \quad a_2 = a_1/2,$$

$$(j+1)a_{j+1} = -k b_j - (1 + (k-2)j)a_j - \sum_{i=1}^{j-1} \left[\frac{b_i b_{j-i}}{2} + \left(2(j-i) - \frac{1}{2} \right) a_i a_{j-i} + (j-i)a_i b_{j-i} \right],$$

$$(j+1)b_{j+1} = a_j + (k - (2k-1)j)b_j - \sum_{i=1}^{j-1} \left[\frac{a_i a_{j-i}}{2} + \left(2(j-i) - \frac{1}{2} \right) b_i b_{j-i} + (j-i)a_i b_{j-i} \right], \quad j \geq 2.$$

На инвариантном решении из (23) следует

$$U \rightarrow \frac{3(1-k)}{2s_0} + \frac{r}{a_0 s_0} \quad \text{при } s \rightarrow 0$$

и $U = 0$ при $r = r_2 = 3a_0(k - 1)/2$. Отсюда имеем $U \rightarrow 3(1 - k)/(2s_0) \neq 0$ при $r \rightarrow 0$ и $k \neq 1$ вдоль $t = t_2$. Наклон характеристик возрастает монотонно при возрастании r , что соответствует сжатию. При этом в области $0 < s < s_0$ характеристики одного семейства не пересекаются.

4. Движение поршня. Для нахождения закона движения поршня, изменения давления на поршне и положения поршня r_2 при $t = t_2$ надо решить задачу (6).

Введем переменную $s_1 = r_1^{-1}(t - t_2)$, $s_1 = ss_0^{-1}$, $r_1 = ra_0^{-1}$ вместо t ; получим

$$\frac{dr_1}{r_1} = \left[\frac{2(r_1 s_1 + 1)}{3(u_1 + v_1)} - 1 \right] \frac{ds_1}{s_1}. \quad (30)$$

Начальные данные $r = r_2 = 3a_0(k - 1)$ определяют движение поршня, ортогонально подходящего к прямой $t = t_2$. При $s_1 = 1$ однозначно определяется положение поршня $r = r_0$ на характеристике $s = s_0$ прямолинейного радиального движения.

Отражение от прямой $t = t_2$ дает продолжение решения через разрыв скорости (скорость меняет направление), скорость звука непрерывна. Выполняется условие контактного разрыва сразу во всех точках шара $r \leq r_2$.

5. Вариация постоянных инвариантного решения. Инвариантное решение (24) зависит от двух постоянных: k , s_0 . Представим решение системы (8) в виде

$$u = \frac{1}{s} \left(\frac{1}{3} - \frac{u_1(k, n)}{s_1 r_1 + 1} \right), \quad v = \frac{1}{s} \left(\frac{1}{3} - \frac{v_1(k, n)}{s_1 r_1 + 1} \right), \quad (31)$$

где $s = (t - t_2)r^{-1}$, $r_1 = ra_0^{-1}$, $s_1 = ss_0^{-1}$, $k = k(s_1, r_1)$, $n = n(s_1, r_1)$, а функции $u_1(k, s_1)$, $v_1(k, s_1)$ задают представление инвариантного решения (29).

Асимптотическое поведение $n \sim s_1$, $k \sim 2r_1/3 + 1$ при $s_1 \rightarrow 0$ обеспечивает ортогональность мировых линий к прямой $t = t_2$. Потребуем $U = 0$ при $r = 0 \implies u_1 + v_1 = 2/3$ при $r_1 = 0$.

Условия $n = 1$, $k_{r_1} = 0$ при $s_1 = 1$ обеспечивают примыкание решения к прямолинейному радиальному движению (2).

Подстановка (31) в (8) приводит к уравнениям для функций n , k :

$$\begin{aligned} (2u_1 + v_1)[u_{1k}s_1 k_{s_1} + u_{1n}(s_1 n_{s_1} - n)] + (1 + s_1 r_1 - 2u_1 - v_1)r_1(u_{1k}k_{r_1} + u_{1n}n_{r_1}) &= 0, \\ (2v_1 + u_1)[v_{1k}s_1 k_{s_1} + v_{1n}(s_1 n_{s_1} - n)] + (1 + s_1 r_1 - 2v_1 - u_1)r_1(v_{1k}k_{r_1} + v_{1n}n_{r_1}) &= 0. \end{aligned} \quad (32)$$

Эта система вырождается при $s_1 = 0$ и $r_1 = 0$. В окрестности $s_1 = 0$ строится решение в виде ряда по степеням s_1 , удовлетворяющее требуемому асимптотическому поведению при $s_1 \rightarrow 0$ и $r_1 = 0$.

Действительно, если $n = s_1 + n_2 s_1^2 + n_3 s_1^3 + \dots$, $k = 1 + 2r_1/3 + k_1 s_1 + \dots$, то из (32) следует $n_2 = 0$, $k_1 = 2r_1/3(1 + r_1/3)$, $n_3 = -2r_1/3(1 + r_1/3)(1 + 2r_1/3)$, \dots . В силу разложения $u_1 + v_1 - 2/3 = n(k - 1) + O(n^2) \sim 2r_1 s_1/3(1 + (1 + r_1/3)s_1 + \dots) \rightarrow 0$ при $r \rightarrow 0$ условие на границе $r = 0$ выполняется.

Так строится асимптотика решения задачи Гурса в окрестности прямой $t = t_2$ при $s < 0$.

6. Отраженное решение. Рассмотрим решение, которое является отражением от прямой $t = t_2$ построенного решения. Оно описывает непрерывное ограниченное расширение газа до прямолинейного радиального движения по закону (2), где t_0 заменено на $2t_2 - t_0$. При этом характеристика C_- перейдет в характеристику

$$C'_+ : \quad r = a_0 \frac{t - t_0}{t_0 - t_2}, \quad 2u + v = \frac{a_0}{t_0 - t_2}, \quad v - u = -\frac{2a_0}{t - 2t_2 + t_0}. \quad (33)$$

Условие (5) на прямой l остается прежним: $u + v = 0$.

Многообразие (33) инвариантно относительно оператора, аналогичного оператору Y из теоремы 2, в котором t_0 заменено на $2t_2 - t_0$.

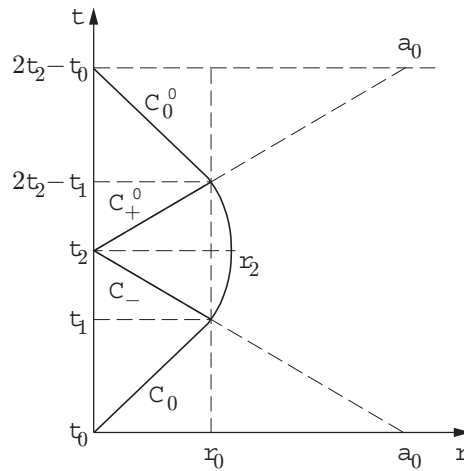


Рис. 4

В соответствии с этим меняются инварианты и вид инвариантного решения:

$$u = s^{-1}(1/3 + (t_2 - t_0)(t + t_0 - 2t_2)^{-1}u_1(s)),$$

$$v = s^{-1}(1/3 + (t_2 - t_0)(t + t_0 - 2t_2)^{-1}v_1(s)), \quad s = (t - t_2)r^{-1}.$$

Подстановка в систему (3) приводит к системе (25) с краевыми условиями C'_+ : $s = (t_0 - t_2)a_0^{-1} = -s_0 > 0$, $u_1 = -2/3$, $v_1 = 4/3$ и $l: u_1 + v_1 = 2/3$ при $s \rightarrow 0$. Этим условиям отвечают интегральные кривые уравнения (27), соединяющие особую точку A — дикритический узел и особую точку B_1 — вырожденный узел, вдоль которых монотонно возрастает величина s ($ds > 0$), если двигаться по стрелке (см. рис. 3). Эти интегральные кривые симметричны относительно биссектрисы $u_1 = v_1$ интегральным кривым $v_1 = \varphi(u_1, k)$, решающим задачу о непрерывном ограниченном сжатии газа до его остановки на кривой (26), т. е. представляются формулой $u_1 = \varphi(v_1, k)$ с асимптотикой $u_1 - 1/3 \sim -k(v_1 - 1/3)$ при $v_1 \rightarrow 1/3$.

Краевое условие (23) перейдет в следующее:

$$\frac{2/3 - u_1 - v_1}{s_1} \rightarrow \frac{2r_1}{3} \quad \text{при} \quad s_1 \rightarrow 0.$$

Уравнение для мировой линии совпадает с задачей (30), где s_0 заменяется на $-s_0$ и рассматривается для $s > 0$. Задача инвариантна относительно замены $s_0 \rightarrow -s_0$, $s \rightarrow -s$, $u_1 \leftrightarrow v_1$, поэтому ответ выписывается по решению задачи (30). Вариация постоянных отраженного инвариантного решения дает асимптотику решения задачи Гурса в окрестности прямой $t = t_2$ при $s > 0$.

7. Периодическое движение. Рассмотрим задачу о непрерывном переводе расширяющегося газа по закону (2) в сжимающийся газ по аналогичному закону (отражение от некоторой прямой $t = \text{const}$).

Пусть поршень,двигающийся по прямой $C_0: r(t_1 - t_0) = r_0(t - t_0)$, в момент $t = t_1$ изменяет свое движение так, что газ останавливается в момент $t = t_2$ во всем шаре, и движение гладко для всех t . Момент $t_2 = (r_0 t_0 - a_0 t_1)(r_0 - a_0)^{-1}$ определяется пересечением характеристики C_- на решении (2) с осью t (рис. 4). Должно выполняться неравенство $r_0 < a_0$, иначе прямая характеристика C_- не пересечет ось t . Если такое движение построено, то отражение от прямой $t = t_2$ даст решение поставленной задачи.

Отыскивается решение уравнения (3) в угловой области, ограниченной характеристикой $C_-: r = a_0(t - t_2)(t_0 - t_2)^{-1}$, где заданы функции $U = a_0(t - t_2)(t_0 - t_2)^{-1}(t - t_0)^{-1} > 0$, $a = a_0(t - t_0)^{-1}$, и прямой торможения $l: t = t_2$, где скорость $U = 0$. На поршне $r = R(t)$ выполняется условие прилипания (6). Из этого уравнения находятся мировые линии частиц.

Задача инвариантна относительно оператора Y из теоремы 2, поэтому решение можно искать в виде (24) для уравнений (27), (28) с условиями, совпадающими с (21) и (22). Значит, решение $u_1(s)$, $v_1(s)$ такое же, как в задаче о переводе сжимающегося газа в расширяющийся газ.

При вычислении мировых линий в формулах (30) будет различие лишь в знаке выражения $t_2 - t_0 = -a_0 s_0$. Тогда правомерны все рассуждения из пп. 3–6.

Последовательное сопряжение радиального расширения с радиальным сжатием приводит к периодическому непрерывному радиальному движению газового шара под действием периодического движения сферического поршня.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Овсянников Л. В.** Лекции по основам газовой динамики. М.: Наука, 1981.
2. **Крайко А. Н.** О неограниченной кумуляции при одномерном нестационарном сжатии идеального газа // Прикл. математика и механика. 1994. Т. 60, вып. 6. С. 1000–1007.
3. **Овсянников Л. В.** Программа ПОДМОДЕЛИ. Газовая динамика // Прикл. математика и механика. 1994. Т. 58, вып. 4. С. 30–55.
4. **Овсянников Л. В.** Некоторые итоги выполнения программы ПОДМОДЕЛИ для уравнений газовой динамики // Прикл. математика и механика. 1999. Т. 63, вып. 3. С. 362–372.
5. **Овсянников Л. В.** О свойстве x -автономии // Докл. РАН. 1993. Т. 330, № 5. С. 559–561.
6. **Брушлинский К. В., Каждан Я. М.** Об автомодельных решениях некоторых задач газовой динамики // Успехи мат. наук. 1963. Т. 18, вып. 2 (110). С. 3–23.
7. **Каждан Я. М.** К вопросу об адиабатическом сжатии газа под действием сферического поршня // ПМТФ. 1977. № 1. С. 23–30.
8. **Курант Г., Фридрихс К.** Сверхзвуковое течение и ударные волны. М.: Изд-во иностр. лит., 1950.

*Поступила в редакцию 5/V 2003 г.,
в окончательном варианте — 22/X 2003 г.*