УДК 539.3

ИЗГИБНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКОГО БИМОРФА С ВНУТРЕННИМ РАЗРЕЗНЫМ ЭЛЕКТРОДОМ

А. О. Ватульян, А. А. Рынкова

Ростовский государственный университет, 344090 Ростов-на-Дону

Исследуются стационарные колебания биморфной пластины, состоящей из двух пьезокерамических слоев одинаковой толщины. Между слоями находится бесконечно тонкий разрезной электрод. Предложена модель колебаний изгиба биморфа, основанная на вариационном уравнении, обобщающем принцип Гамильтона в электроупругости. Для плоской задачи построена система уравнений движения, сформулированы граничные условия и условия сопряжения на границе раздела областей разрезного электрода. Для пьезокерамики ЦТС-19 рассчитаны частоты резонанса и антирезонанса. Полученные значения сравниваются с результатами расчетов по классической модели Кирхгофа и методу конечного элемента. Показано, что использование пластины с разрезным электродом позволяет повысить эффективность возбуждения колебаний по сравнению со случаем сплошного внутреннего электрода.

Применение в технических устройствах пластинчатых пьезопреобразователей приводит к необходимости разработки моделей и методов расчета электрических и механических полей, возникающих в пьезоактивной среде.

Среди работ, посвященных построению прикладных моделей изгиба слоистых пьезоэлектрических конструкций, следует отметить работу [1], в которой проведен анализ общих закономерностей деформирования неоднородных электроупругих плит и предложен метод построения некоторого класса точных неоднородных решений.

Построение упрощенных моделей имеет большое значение для практических расчетов электроупругих полей. В [2] изложена общая схема исследования трехмерных уравнений электроупругости. В [3] с использованием гипотез о распределении электрических и механических полей задача сведена к классической задаче изгиба.

Как правило, при исследовании колебаний пьезоэлектрических пластин рассматриваются модели со сплошными электродами. В настоящей работе предложена модель пьезоэлектрической биморфной плиты с внутренним разрезным электродом. Подобная задача проанализирована в работе [4] на основе уравнений, полученных в [3], где с помощью гипотез Кирхгофа для кусочно-однородной пластины получены классические уравнения колебаний относительно функции прогиба срединной поверхности биморфной плиты, причем характер распределения электрических полей не учитывался.

Изучение колебаний слоистых пластин с разрезными электродами представляет интерес в связи с возможностью эффективного возбуждения определенных мод колебаний. В настоящей работе представлена модель изгибных колебаний двухслойной пластины с разрезным внутренним электродом, построенная с использованием вариационного уравнения для пьезоэлектрической среды, являющегося обобщением принципа Гамильтона в теории упругости.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 99-01-01011).

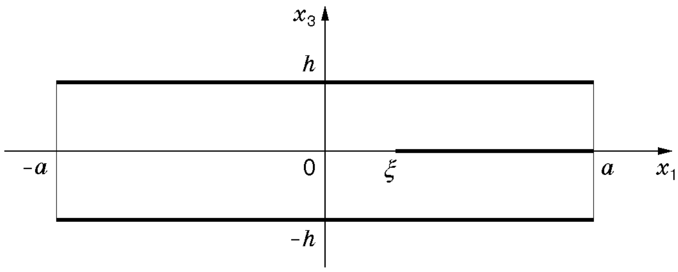

Рис. 1

Рассмотрим плоскую задачу об установившихся изгибных колебаниях бесконечной в направлении x_2 ленточной пластины, состоящей из двух пьезокерамических слоев одинаковой толщины, поляризованных в направлении оси x_3. Выберем начало координат на срединной плоскости пластины. Считаем, что все рассматриваемые функции не зависят от переменной x_2.

Пусть на лицевые поверхности пластины $x_3 = \pm h$ нанесены электроды (поверхности электродированы) и между слоями в плоскости $x_3 = 0$ имеется бесконечно тонкий разрезной электрод. Сечение пластины срединной плоскостью обозначим через $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$, где область Ω_1 является неэлектродированной, а область Ω_2 — электродированной. Пусть $\Omega_1 = \{(x_1, x_2)\colon x_1 \in [-a, \xi],\ x_2 \in (-\infty, +\infty)\}$, $\Omega_2 = \{(x_1, x_2)\colon x_1 \in [\xi, a],\ x_2 \in (-\infty, +\infty)\}$, где $\xi \in (-a, a)$ — координата точки раздела электродированной и неэлектродированной областей (рис. 1). Колебания возбуждаются разностью потенциалов на лицевых поверхностях и внутреннем разрезном электроде: $\varphi\big|_{x_3=0} = V_0\, \mathrm{e}^{i\omega t}, x_1 \in \Omega_2$; $\varphi\big|_{x_3=\pm h} = 0$, где φ — электрический потенциал; ω — частота колебаний; $V_0 = \mathrm{const}$ — заданная амплитуда.

Колебания пластины описываются следующими уравнениями [2]:

$$\sigma_{ij,j} = -\rho\omega^2 u_i, \qquad D_{i,i} = 0,$$

где σ_{ij} — компоненты тензора напряжений; D_i — компоненты вектора электрической индукции; $i,\ j = 1,\ 3$; ρ — плотность пьезокерамики. Считается, что боковая поверхность пластины свободна от напряжений: $\sigma_{11} = 0$, $\sigma_{13} = 0$ при $x_1 = \pm a$. На лицевых поверхностях $x_3 = \pm h$ нагрузки отсутствуют: $\sigma_{13} = \sigma_{33} = 0$. Пусть внешней средой является воздух, тогда $D_1 = 0$ при $x_1 = \pm a$.

Определяющие соотношения для электроупругой среды, поляризованной в направлении оси x_3, имеют вид [2]

$$\begin{gathered}\sigma_{11} = c_{11}^E \varepsilon_{11} + c_{13}^E \varepsilon_{33} + e_{31}\varphi_{,3}, \quad \sigma_{33} = c_{13}^E \varepsilon_{11} + c_{33}^E \varepsilon_{33} + e_{33}\varphi_{,3}, \quad \sigma_{13} = 2c_{44}^E \varepsilon_{13} + e_{31}\varphi_{,1},\\ D_1 = 2e_{15}\varepsilon_{13} - \epsilon_{11}^S \varphi_{,1}, \qquad D_3 = e_{31}\varepsilon_{11} + e_{33}\varepsilon_{33} + \epsilon_{33}^S \varphi_{,3}.\end{gathered} \tag{1}$$

Здесь ε_{ij} — компоненты тензора деформаций; c_{ij}^E — модули упругости, измеренные при постоянном электрическом поле; e_{31}, e_{33}, e_{15} — пьезоэлектрические постоянные; ϵ_{11}^S, ϵ_{33}^S — диэлектрические проницаемости при постоянных деформациях.

Далее при построении модели воспользуемся некоторыми упрощениями. Примем следующие гипотезы Кирхгофа о распределении перемещений по толщине: $u_1(x_1, x_3) = -x_3 w_{,1}$, $u_3(x_1, x_3) = w(x_1)$, где функция $w(x_1)$ — прогиб срединной поверхности пластины. В соответствии с гипотезами Кирхгофа полагаем, что всюду в области, занятой пластиной, нормальное напряжение $\sigma_{33} = 0$. С помощью определяющего соотношения для σ_{33} исключим деформацию ε_{33} из уравнений состояния пьезоэлектрической среды (1):

$$\sigma_{11} = c_{11}^* u_{1,1} + e_{31}^* \varphi_{,3}, \qquad D_3 = e_{31}^* u_{1,1} - \epsilon_{33}^* \varphi_{,3}. \tag{2}$$

Здесь $c^*_{11} = c^E_{11} - (c^E_{13})^2/c^E_{33}$; $e^*_{31} = e_{31} - c^E_{13}e_{33}/c^E_{33}$; $\epsilon^*_{33} = \epsilon^S_{33} + e^2_{33}/c^E_{33}$. Выражения для σ_{13}, D_1 останутся прежними.

В отличие от [3, 4], где задача сведена к уравнению одной функции, введем в рассмотрение две функции. Пусть функция $V(x_1)$ есть значение электрического потенциала $\varphi(x_1, x_3)$ на срединной плоскости $x_3 = 0$. В неэлектродированной области Ω_1 значение этой функции неизвестно, а в области Ω_2 $V(x_1) = V_0$. Очевидно, что функция электрического потенциала является непрерывной. Однако при наличии внутреннего электрода производная $\varphi_{,3}$ не является непрерывной при $x_3 = 0$. Поэтому на центральном электроде $x_3 = 0$ нормальная составляющая D_3 вектора электрической индукции имеет скачок, который обозначим $q(x_1) = D_3(x_1, +0) - D_3(x_1, -0)$. Заметим, что в области Ω_1 функция D_3 непрерывна, поэтому в ней $q(x_1) \equiv 0$.

Будем считать, что электрический потенциал имеет следующее распределение по координате x_3:

$$\varphi(x_1, x_3) = \Big(1 - \frac{x_3^2}{h^2}\Big)V(x_1) + \frac{h}{2\epsilon^*_{33}}\Big(\frac{x_3^2}{h^2} - \frac{|x_3|}{h}\Big)q(x_1). \qquad (3)$$

При выборе потенциала в виде (3) автоматически выполняются граничные условия на электрический потенциал на торцах $x_3 = \pm h$ и внутреннем электроде, в том числе условие разрывности $\varphi_{,3}$.

Воспользуемся вариационным уравнением, которое обобщает принцип Гамильтона в теории электроупругости и в случае стационарных колебаний при отсутствии массовых сил, поверхностных нагрузок и поверхностных зарядов для плоской деформации имеет вид [2]

$$\int\limits_{-a}^{a}\int\limits_{-h}^{h} \delta H\,dx_3\,dx_1 - \rho\omega^2 \int\limits_{-a}^{a}\int\limits_{-h}^{h} u_i\delta u_i\,dx_3\,dx_1 = 0. \qquad (4)$$

Электрическая энтальпия $H = U - E_iD_i$, где U — внутренняя энергия, является функцией деформаций ε_{ij} и электрического поля E_i. Вариация энтальпии имеет вид $\delta H = \sigma_{ij}\delta\varepsilon_{ij} - D_i\delta E_i$. С учетом принятых гипотез получим

$$\delta H = \sigma_{11}\delta\varepsilon_{11} - D_1\delta E_1 - D_3\delta E_3. \qquad (5)$$

Вычислим компоненты тензора напряжений и вектора электрической индукции в каждой области по формулам (1), (2) и подставим полученные выражения в (5). Пусть $\delta H^{\rm I}$ и $\delta H^{\rm II}$ — вариации энтальпии в области Ω_1 и области с внутренним электродом Ω_2 соответственно. Проварьируем $\delta H^{\rm I}$ на отрезке $[-a, \xi]$, $\delta H^{\rm II}$ на отрезке $[\xi, a]$. Полученные выражения проинтегрируем по толщине. Используя вариационное уравнение (4), получим уравнения, содержащие независимые вариации $\delta w^{\rm I}$, δV в области Ω_1 и $\delta w^{\rm II}$, δq в области Ω_2. Приравнивая к нулю коэффициенты при независимых вариациях, получим следующие системы дифференциальных уравнений:

$$a_{11}\frac{d^4w^{\rm I}}{dx_1^4} + a_{12}\frac{d^2V}{dx_1^2} + \frac{2}{3}\,h^3\rho\omega^2\,\frac{d^2w^{\rm I}}{dx_1^2} - 2h\rho\omega^2 w^{\rm I} = 0,$$

$$a_{21}\frac{d^2w^{\rm I}}{dx_1^2} + a_{22}\frac{d^2V}{dx_1^2} - a_{23}V = 0, \qquad x_1 \in \Omega_1,$$

$$a_{11}\frac{d^4w^{\rm II}}{dx_1^4} - a_{13}\frac{d^2q}{dx_1^2} + \frac{2}{3}\,h^3\rho\omega^2\frac{d^2w^{\rm II}}{dx_1^2} - 2h\rho\omega^2 w^{\rm II} = 0,$$

$$a_{31}\frac{d^2w^{\mathrm{II}}}{dx_1^2}-a_{32}\frac{d^2q}{dx_1^2}+a_{33}q-\frac{1}{3}V_0=0,\qquad x_1\in\Omega_2.$$

Коэффициенты в уравнениях зависят от физических констант материала и геометрических размеров пластины:

$$a_{11}=(2/3)h^3c_{11}^*,\qquad a_{12}=a_{21}=(4/3)he_{31}^*,\qquad a_{22}=(16/15)h\epsilon_{11}^S,$$

$$a_{23}=\frac{8}{3h}\epsilon_{33}^*,\qquad a_{13}=a_{31}=\frac{h^2}{6}\frac{e_{31}^*}{\epsilon_{33}^*},\qquad a_{32}=\frac{h^3}{60}\frac{\epsilon_{11}^S}{(\epsilon_{33}^*)^2},\qquad a_{33}=\frac{1}{6}\frac{h}{\epsilon_{33}^*}.$$

Граничные условия получим, приравняв к нулю коэффициенты при независимых вариациях во внеинтегральных слагаемых:

$$a_{11}\frac{d^3w^{\mathrm{I}}}{dx_1^3}+a_{12}\frac{dV}{dx_1}+\frac{2}{3}h^3\rho\omega^2\frac{dw^{\mathrm{I}}}{dx_1}=0,\quad a_{11}\frac{d^2w^{\mathrm{I}}}{dx_1^2}+a_{12}V=0,\quad \frac{dV}{dx_1}=0\quad \text{при}\ x_1=-a,$$

$$a_{11}\frac{d^3w^{\mathrm{II}}}{dx_1^3}-a_{13}\frac{dq}{dx_1}+\frac{2}{3}h^3\rho\omega^2\frac{dw^{\mathrm{II}}}{dx_1}=0,\quad a_{11}\frac{d^2w^{\mathrm{II}}}{dx_1^2}+a_{12}V_0-a_{13}q=0,\quad \frac{dq}{dx_1}=0\ \text{при}\ x_1=-a.$$

На границе областей $x_1=\xi$ в качестве условий сопряжения потребуем непрерывности прогиба и угла поворота $w^{\mathrm{I}}=w^{\mathrm{II}}$, $dw^{\mathrm{I}}/dx_1=dw^{\mathrm{II}}/dx_1$. Приравнивая коэффициенты во внеинтегральных слагаемых в вариационных уравнениях при соответствующих вариациях δw^{I} и δw^{II}, $d\delta w^{\mathrm{I}}/dx_1$ и $d\delta w^{\mathrm{II}}/dx_1$, δq, получим еще три условия согласования:

$$a_{11}\Big(\frac{d^3w^{\mathrm{I}}}{dx_1^3}-\frac{d^3w^{\mathrm{II}}}{dx_1^3}\Big)+\frac{2}{3}h^3\rho\omega^2\Big(\frac{dw^{\mathrm{I}}}{dx_1}-\frac{dw^{\mathrm{II}}}{dx_1}\Big)+a_{12}\frac{dV}{dx_1}+a_{13}\frac{dq}{dx_1}=0,$$

$$a_{11}\Big(\frac{d^2w^{\mathrm{I}}}{dx_1^2}-\frac{d^2w^{\mathrm{II}}}{dx_1^2}\Big)+a_{12}(V-V_0)-a_{13}q=0,\qquad \frac{dq}{dx_1}=0.$$

Потребуем также непрерывности потенциала при переходе через границу: $V=V_0$ при $x_1=\xi$.

Таким образом, получаем две системы дифференциальных уравнений относительно четырех неизвестных функций: функций прогиба w^{I} и потенциала V в области Ω_1, а также функций прогиба w^{II} и скачка нормальной составляющей вектора электрической индукции на срединной поверхности q в области Ω_2. В каждой системе одно из уравнений имеет четвертый порядок относительно функции прогиба.

Используя построенную модель, находим частоты резонанса ω_r. Частоты антирезонанса ω_a определим из условия равенства нулю тока, проходящего через электрод: $I=-i\omega\int\limits_S D_3\,ds=0$. В качестве поверхности S возьмем лицевой электрод $x_3=h$. Тогда условие для определения антирезонансных частот будет иметь вид

$$\int\limits_{-a}^{\xi}\Big(he_{31}^*\frac{d^2w^{\mathrm{I}}}{dx_1}-\frac{2}{h}\epsilon_{33}^*V\Big)dx_1+\int\limits_{\xi}^{a}\Big(he_{31}^*\frac{d^2w^{\mathrm{II}}}{dx_1}-\frac{2}{h}\epsilon_{33}^*V_0+\frac{1}{2}q\Big)dx_1=0.$$

Поставленная задача решалась для пластины с соотношением сторон $h/a=0{,}1$, выполненной из пьезокерамики ЦТС-19 [5]. Выполнена серия расчетов для определения частот ω_r и ω_a при различных значениях ξ. Эффективность колебаний оценивалась по величине динамического коэффициента электромеханической связи [2] $k_d^2=(\omega_a^2-\omega_r^2)/\omega_a^2$.

ξ	l	Вариационный принцип		Теория Кирхгофа		МКЭ	
		ω_r^*	ω_a^*	ω_r^*	ω_a^*	ω_r^*	ω_a^*
		Первая мода					
−0,5	0,75	1,0338	1,1152	0,9729	0,9834	1,0175	1,0422
0,1	0,45	1,0743	1,1108	0,9902	0,9939	1,0595	1,0672
0,8	0,10	1,1152	1,1155	1,0007	1,0008	1,0988	1,0989
		Вторая мода					
−0,5	0,75	2,8005	2,8056	2,6717	2,6718	2,6561	2,6592
0,1	0,45	2,8879	2,9940	2,7214	2,7363	2,7423	2,7649
0,8	0,10	2,9931	2,9972	2,7704	2,7705	2,8498	2,8508

Примечание. $\omega_r^* = \omega_r \cdot 10^{-5}$ Гц, $\omega_a^* = \omega_a \cdot 10^{-5}$ Гц.

Проведено сравнение частот колебаний предложенной модели с частотами, полученными согласно теории [4], построенной на основе классических гипотез Кирхгофа, и частотами, рассчитанными для электроупругого прямоугольника по методу конечного элемента. Некоторые частоты резонанса ω_r и антирезонанса ω_a для первых двух мод колебаний приведены в таблице ($l = (a - \xi)/(2a)$ — относительная длина электродированной поверхности Ω_2). Частоты монотонно возрастают при уменьшении длины электрода l, антирезонансные частоты не превосходят по величине частоты резонанса. Эти результаты согласуются с положениями, выведенными теоретически в [6], и с результатами, полученными численно в [4].

Первые частоты представленной модели и модели [4] отличаются от первых частот, полученных методом конечного элемента, на 1–2 и 4–9 % соответственно. Погрешность вторых частот относительно частот, полученных методом конечных элементов (МКЭ), составляет 4–5 % по представленной теории и 1–3 % по теории [4].

На рис. 2 представлены зависимости динамического коэффициента электромеханической связи k_d^2 от относительной длины электрода l для первых четырех мод колебаний (кривые *1*–*4*). Точки соответствуют значениям, полученным численным расчетом по представленной модели. Значению $l = 1$ соответствует случай сплошного электрода. Из полученных результатов следует, что для каждой моды колебаний возможно такое разрезание внутреннего электрода, при котором эффективность возбуждения колебаний выше,

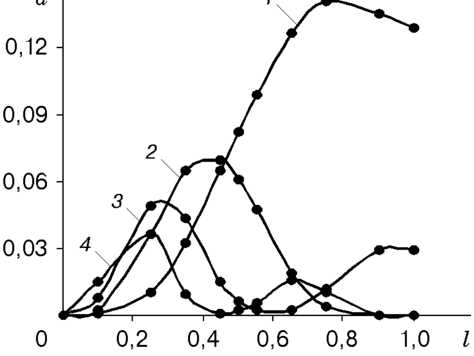

Рис. 2

чем в случае сплошного электрода. Для первой моды увеличение коэффициента k_d^2 может составить примерно 9 % при относительной длине внутреннего электрода 0,70–0,85. При необходимости возбуждения более высоких мод для повышения эффективности следует уменьшать длину электрода и выбирать ее в диапазоне от 0,3 до 0,5 для второй моды и от 0,2 до 0,4 для третьей и четвертой мод колебаний.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Гетман И. П., Устинов Ю. А.** К теории неоднородных электроупругих плит // Прикл. математика и механика. 1979. Т. 43, № 5. С. 923–932.
2. **Партон В. З., Кудрявцев Б. А.** Электромагнитоупругость пьезоэлектрических и электропроводных тел. М.: Наука, 1988.
3. **Ватульян А. О., Гетман И. П., Лапицкая Н. Б.** Об изгибе пьезоэлектрической биморфной пластины // Прикл. механика. 1991. Т. 27, № 10. С. 101–105.
4. **Ватульян А. О., Рынкова А. А.** К вопросу о расчете изгибных колебаний пьезоэлектрической биморфной пластины с разрезным электродом // Дефектоскопия. 1998. № 3. С. 61–66.
5. **Аронов Б. С.** Электромеханические преобразователи из пьезоэлектрической керамики. Л.: Энергоатомиздат. Ленингр. отд-ние, 1990.
6. **Белоконь А. В., Наседкин А. В.** О некоторых свойствах собственных частот электроупругих тел ограниченных размеров // Прикл. математика и механика. 1996. Т. 60, № 1. С. 151–158.

Поступила в редакцию 25/II 2000 г.,
в окончательном варианте — 19/IV 2000 г.