

УДК 536.46

## АНАЛИТИЧЕСКИЙ РАСЧЕТ СКОРОСТИ ГОРЕНИЯ ПРИ ОТРИЦАТЕЛЬНОМ ЭРОЗИОННОМ ЭФФЕКТЕ

К. О. Сабденов, М. Ерзада

Евразийский национальный университет им. Л. Н. Гумилёва, 010008 Астана, Казахстан  
sabdenovko@yandex.kz

Проведен расчет скорости горения при отрицательном эффекте эрозии с использованием аналитических методов и в рамках простой модели химической реакции в газовой фазе  $A \rightarrow B$ . В модели учитывается переход части тепловой энергии в кинетическую энергию движения газовых продуктов горения вдоль поверхности газификации топлива. Решения получены для случаев, когда толщина ламинарного подслоя больше и меньше ширины зоны горения в газовой фазе. Результаты расчета подтверждают ранее сделанный авторами вывод: слабое проявление отрицательного эрозионного эффекта при снижении начальной температуры топлива вызвано сужением области его возникновения.

Ключевые слова: отрицательный эрозионный эффект, критическое число Виллонова, число Булгакова — Липанова, кинетическая энергия движения газа, начальная температура горения твердого топлива.

### ВВЕДЕНИЕ

Для успешного проектирования твердо-топливных ракетных двигателей необходимо предсказывание скорости горения топлива  $u$ . Эта скорость зависит от физических и химических свойств топлива, внешних условий и конструкции двигателя. Может показаться, что общая функциональная зависимость скорости горения от перечисленных факторов должна включать большое число параметров. Но в действительности эти параметры связаны между собой. Достаточно выделить те физические величины, которые являются определяющими для скорости горения твердого ракетного топлива. Как показывают многочисленные теоретические и экспериментальные исследования, такими величинами могут быть давление  $p$  и температура поверхности газификации  $T_s$ . Зависимость  $u = u(p, T_s)$  является специфической для каждого вида топлива. Установить поведение скорости горения при изменении давления относительно легко. Иначе обстоит дело с температурой  $T_s$ , поскольку дать ей строгое определение оказывается не так просто. Кроме того, при расчете  $T_s$  аналитическими методами возникают большие трудности, главным образом из-за отсутствия прямой связи между этой температурой и факторами, влияющими на нее. Исключения составляют единичные случаи, когда удается установить зависи-

мость температуры поверхности газификации от условий горения. Это те ситуации, когда относительно легко вычислить зависимость  $T_s$  от теплового потока  $q_g$  из газовой в твердую фазу топлива:  $T_s = T_s(q_g)$ .

### ПРИЧИНЫ ПОЯВЛЕНИЯ ЭРОЗИОННОГО ГОРЕНИЯ

Эрозионное горение твердых ракетных топлив [1–5] проявляется в изменении скорости горения  $u$  при движении газовых продуктов вдоль горящей поверхности топлива с характерной скоростью  $w_\infty$ , равной скорости в ядре потока. Иначе говоря, при наличии обдува. Независимо от того, уменьшается или увеличивается при этом скорость горения, речь идет об изменении теплового потока  $q_g = q_g(w_\infty)$ . При этом различают положительный и отрицательный эффекты эрозионного горения. Положительный эффект эрозионного горения наблюдается, когда скорость обдува  $w_\infty$  превышает некоторое пороговое значение  $w_*$ . В этом случае новое значение скорости горения  $u_w$  может быть представлено степенной зависимостью [6]

$$u_w = u \left( \frac{w_\infty}{w_*} \right)^n, \quad w_\infty \geq w_*, \quad (1)$$

где  $u$  — скорость горения, когда обдув отсутствует,  $n$  — числовой параметр,  $0 < n \leq 1$ .

Коэффициент эрозии, определяемый как отношение  $u_w/u = \varepsilon$ , может достигать значения  $1.7 \div 1.8$  [7].

Отрицательный эффект эрозионного горения имеет место при  $w_\infty < w_*$ . Он проявляется слабо, и коэффициент эрозии находится в интервале  $0.7 \div 1.0$  [10]. Причина тому кроется в конкурирующем действии факторов, вызывающих положительный и отрицательный эрозионные эффекты. Каждый из этих эффектов имеет характерную масштабную скорость: положительный —

$$w_* = \frac{32.5}{\sqrt{C_f}} \frac{\nu_g}{\delta_b},$$

где  $\nu_g$  — кинематическая вязкость,  $\delta_b$  — ширина зоны горения при отсутствии обдува,  $C_f$  — коэффициент гидродинамического сопротивления поверхности твердой фазы топлива; отрицательный [8] —

$$w_0 = \sqrt{\frac{c_p R T_b^2}{E}},$$

где  $c_p$  — теплоемкость газа (продуктов горения) при постоянном давлении,  $T_b$  — температура пламени,  $E$  — эффективная энергия активации химических реакций в газовой фазе,  $R$  — универсальная газовая постоянная. Если скорость  $w_\infty$  не слишком велика, то отрицательный коэффициент эрозии можно рассчитывать по формуле [8]

$$\varepsilon = \exp \left[ \frac{E}{2RT_b} \left( 1 - \frac{1}{1 - w_\infty^2/2w_0^2} \right) \right]. \quad (2)$$

Положительный эрозионный эффект связан с возникновением и развитием турбулентного пламени в газовой фазе [6, 9–11]. Решающее влияние турбулентности сохраняется и при скоростях обдува, превышающих скорость звука [12].

Отрицательный эрозионный эффект связан с переходом части внутренней энергии газовых продуктов горения в их кинетическую энергию движения вдоль поверхности топлива [8, 13–16], что ведет к снижению температуры пламени и, тем самым, скорости горения.

Один из возможных механизмов [17] отрицательного эффекта эрозионного горения связывают с двумерной по пространству неустойчивостью горения.

К снижению скорости горения также может привести появление дополнительной составляющей к скорости оттока газа от поверхности топлива вследствие формирования пограничного слоя при обдуве [6]. Но оценки показывают, что уменьшение скорости горения при этом очень мало и не согласуется с экспериментальными данными. Поэтому наиболее приемлемым объяснением возникновения отрицательного эрозионного эффекта остается газодинамический механизм [8, 16] ввиду своей универсальности и непротиворечивости экспериментальным данным. Этот механизм позволяет не только описать снижение скорости горения, но и объяснить ослабление отрицательного эрозионного эффекта при снижении начальной температуры топлива  $T_0$  [18]. Кроме того, газодинамический механизм предсказывает возможность возникновения акустической неустойчивости при увеличении скорости обдувающего потока [8].

При моделировании [14] процессов горения в ракетном двигателе предсказана возможность возникновения высокочастотных колебаний. В этой работе учитывается возможность проявления положительного и отрицательного эффектов эрозионного горения. Не исключено, что обнаруженная акустическая неустойчивость вызвана понижением температуры пламени при увеличении кинетической энергии движения газовых продуктов горения.

Расчет скорости горения с учетом эрозионного эффекта выполнен также в работах [19, 20]. В них проведено не только детальное моделирование турбулентного горения, но еще и учтены геометрические формы топлива. Однако множество физических и геометрических параметров в сложных моделях [3, 9, 12, 14, 19, 20] не позволяют выделить главные факторы, определяющие скорость горения.

В настоящей работе представлен расчет скорости горения при отрицательном эффекте эрозии на основе простейшей модели горения твердого топлива.

### ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ ГОРЕНИЯ ТВЕРДОГО РАКЕТНОГО ТОПЛИВА ПРИ НАЛИЧИИ ОБДУВА

Горение топлива характеризуется масштабами порядка  $10 \div 100$  мкм. Поэтому для выяснения основных параметров, определяющих скорость горения, необходимо рассматри-

вать физические и химические процессы, протекающие в этих масштабах.

При исследовании горения твердого ракетного топлива воспользуемся следующим модельным представлением: если обдув отсутствует, то горючая смесь оттекает с поверхности газификации  $x_s(t)$  со скоростью  $v_s$ . Эта смесь в дальнейшем сгорает в точке  $x_f(t)$  с тепловым эффектом  $Q$ , где расположен фронт горения, что предполагает бесконечно большую скорость химической реакции или ее бесконечно большую энергию активации. Реакция представляется протекающей по брутто-схеме  $A \rightarrow B$ , где  $A$  — горючая смесь,  $B$  — продукт химической реакции. Относительное расположение поверхностей  $x_s$  и  $x_f$  показано на рис. 1.

Топливо имеет переменную температуру  $T_c(x, t)$ . Его теплоемкость  $c_c$  считается постоянной. Газификация материала топлива происходит в бесконечно узкой зоне с тепловым эффектом  $L$ . В интервале  $x_f \div x_s$ , называемом зоной горения, газовая смесь характеризуется температурой  $T(x, t)$ , относительной концентрацией  $Y(x, t)$ ,  $0 \leq Y \leq 1$ , плотностью  $\rho$  и теплоемкостью при постоянном давлении  $c_p = \text{const}$ . Область  $x > x_f$  (зона пламени) занята продуктами горения. Здесь температура  $T_b$ , плотность  $\rho_b$ .

Массовая скорость горения при стационарном режиме —  $m = \rho_c u$ , причем  $u = dx_s/dt = dx_f/dt$ .

Пусть теперь обдув плоской поверхности топлива со скоростью  $w(x)$  происходит вдоль направления координаты  $y$  (см. рис. 1). Это приводит к появлению пограничного слоя. На достаточно большом удалении  $x \rightarrow \infty$  за пре-

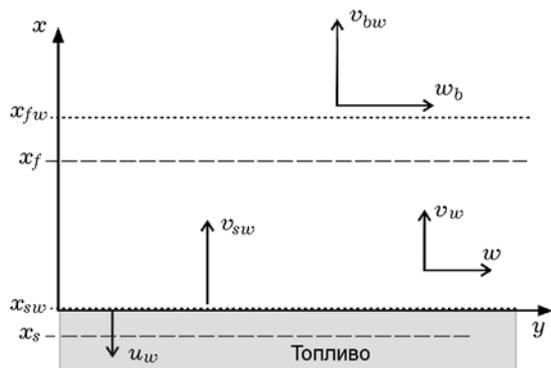


Рис. 1. Структура зоны горения при отсутствии (штриховые линии) и наличии (пунктирные линии) обдува,  $v_{sw} = v_w$  ( $x = x_{sw}$ )

делами пограничного слоя устанавливается постоянное значение этой скорости:  $w = w_\infty = \text{const}$ . Поверхности газификации и сгорания газовой смеси имеют координаты  $x_{fw}$  и  $x_{sw}$ .

Картина течения и структура зоны горения при обдуве поверхности горящего топлива показаны на рис. 1. Здесь и далее значения параметров при наличии обдува по мере необходимости будем снабжать нижним индексом  $w$ , а значения параметров на поверхности газификации — нижним индексом  $s$ .

Скорость газа до фронта горения  $V = iv_w + jw$  — вектор с проекциями  $v_w$ ,  $w$  на оси декартовых координат  $x$ ,  $y$  и единичными векторами  $i$ ,  $j$ . Непосредственно за фронтом горения, в зоне пламени, скорость газа  $V_{bw} = iv_{bw} + jw_b$ .

Представим пограничный слой состоящим из двух областей: ламинарного подслоя и зоны развитого турбулентного течения. Структура ламинарного подслоя такова [21], что гидродинамические параметры в нем сильно меняются по направлению координаты  $x$  и слабо по направлению  $y$  и последними можно пренебречь.

Примем следующие предположения:

- при относительно малых скоростях обдува толщина ламинарного подслоя  $\delta_g$  больше толщины зоны горения  $\delta_b = x_{fw} - x_{sw}$  в газовой фазе;
- теплоемкости газовой ( $c_p$ ) и твердой ( $c_c$ ) фаз топлива одинаковы;
- кинетической энергией движения газа по направлению нормали к поверхности топлива можно пренебречь;
- диссипация кинетической энергии газа за счет сил трения не учитывается.

Сначала необходимо найти основные соотношения для фронта горения. Воспользуемся подходом, принятым в теории пограничного слоя.

В пределах ламинарного подслоя скорости  $v_w$ ,  $w$ ,  $v_{bw}$ ,  $w_b$  будем полагать зависящими только от координаты  $x$ :

$$\begin{aligned} v_w &= v_w(x), & w &= w(x), \\ v_{bw} &= v_{bw}(x), & w_b &= w_b(x). \end{aligned}$$

Изложенная выше физическая картина установившегося режима горения гомогенного ракетного топлива при обдуве может быть описана системой уравнений:

$$-\infty < x < x_{sw}(t): \quad \frac{\partial T_c}{\partial t} = \frac{1}{\rho_c c_c} \frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda_c \frac{\partial T_c}{\partial x} \right);$$

$$\begin{aligned}
x_{sw}(t) < x < x_{fw}(t): \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \rho v_w = 0, \\
\frac{\partial Y}{\partial t} + v_w \frac{\partial Y}{\partial x} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} \left( D \rho \frac{\partial Y}{\partial x} \right), \\
\frac{\partial T}{\partial t} + v_w \frac{\partial T}{\partial x} = \\
= \frac{1}{\rho c_p} \frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) - \frac{1}{2c_p} \left( \frac{\partial w^2}{\partial t} + v_w \frac{\partial w^2}{\partial x} \right); \\
x_{fw}(t) < x < \delta_g: \quad \frac{\partial \rho_{b1}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \rho_{b1} v_{bw} = 0, \quad (3)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial T_{b1}}{\partial t} + v_{bw} \frac{\partial T_{b1}}{\partial x} = \\
= \frac{1}{\rho_{b2} c_p} \frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda \frac{\partial T_{b1}}{\partial x} \right) - \frac{1}{2c_p} \left( \frac{\partial w^2}{\partial t} + v_{bw} \frac{\partial w^2}{\partial x} \right).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\delta_g < x < +\infty: \quad \frac{\partial \rho_{b2}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \rho_{b2} v_{bw} = 0, \\
\frac{\partial T_{b2}}{\partial t} + v_{bw} \frac{\partial T_{b2}}{\partial x} = \frac{1}{\rho_{b2} c_p} \frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda \frac{\partial T_{b2}}{\partial x} \right).
\end{aligned}$$

Система дополняется уравнением состояния идеального газа (для горючей смеси и продуктов горения)  $p = \rho R_g T$ , где  $p$  — давление,  $R_g$  — газовая постоянная рассматриваемой смеси. Скорость обдува возьмем в виде кусочно-линейной зависимости:

$$w = \frac{c_f}{2} \frac{\rho_{bw} w_\infty^2}{\mu} (x - x_{sw}), \quad x < \delta_g; \quad (4)$$

$$w = w_\infty, \quad x \geq \delta_g.$$

Используются следующие граничные условия:

$$x \rightarrow -\infty: \quad T_c = T_0;$$

$$x = x_{sw}(t): \quad -\rho_c \frac{dx_{sw}}{dt} = -\rho \frac{dx_{sw}}{dt} + \rho v_w,$$

$$-\rho_c \frac{dx_{sw}}{dt} = -\rho Y \frac{dx_{sw}}{dt} + \rho v_w Y - D \rho \frac{\partial Y}{\partial x},$$

$$-\rho_c \frac{dx_{sw}}{dt} = m_w(T), \quad T = T_c,$$

$$\lambda_c \frac{\partial T_c}{\partial x} = \lambda \frac{\partial T}{\partial x} + L \rho_c \frac{dx_{sw}}{dt}; \quad (5)$$

$$x = x_{fw}(t): \quad Y = 0, \quad v_w = v_{bw}, \quad T = T_{b1},$$

$$\rho = \rho_{b1}, \quad \lambda \frac{\partial T}{\partial x} = \lambda \frac{\partial T_{b1}}{\partial x} - D \rho Q \frac{\partial Y}{\partial x},$$

$$-D \rho \frac{\partial Y}{\partial x} = m_{bw}(T_b);$$

$$x = \delta_g: \quad T_{b1} = T_{b2}; \quad \frac{\partial T_{b1}}{\partial x} = \frac{\partial T_{b2}}{\partial x};$$

$$x \rightarrow +\infty: \quad \frac{\partial T_{b2}}{\partial x} = 0.$$

Принятому в (5) знаку  $L$  соответствует эндотермическая реакция. Массовые скорости горения  $m_w$ ,  $m_{bw}$  равны между собой только в случае стационарного горения.

Зависимости коэффициентов диффузии  $D$ , теплопроводности  $\lambda$  и вязкости  $\mu$  газа от температуры примем в виде

$$D \sim T^2, \quad \lambda \sim T, \quad \mu \approx \text{const}; \quad (6)$$

по форме они близки экспериментально наблюдаемым [22] и, как мы покажем ниже, позволяют получить точные аналитические решения.

## РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ТЕМПЕРАТУРЫ И КОНЦЕНТРАЦИИ. СТАЦИОНАРНОЕ ГОРЕНИЕ

Перейдем в системе уравнений (3) при граничных условиях (5) к безразмерным величинам и лагранжевой координате  $\xi$  согласно выражениям:

$$-\infty < x < x_{sw}(t): \quad \xi = \frac{u}{\alpha c} [x - x_{sw}(t)];$$

$$x_{sw}(t) < x < +\infty: \quad \xi = \frac{u}{\sigma \alpha c \rho_c} \int_{x_{sw}(t)}^x \rho(x', t) dx',$$

$$\alpha_c = \frac{\lambda_c}{c_c \rho_c}, \quad \theta_c = \frac{T_c}{T_s}, \quad \theta = \frac{T}{T_s}, \quad \theta_b = \frac{T_b}{T_s}, \quad (7)$$

$$\theta_0 = \frac{T_0}{T_s}, \quad q = \frac{Q}{c_p T_s}, \quad \varepsilon = -\frac{\rho_c}{m} \frac{dx_{sw}}{dt},$$

$$l = \frac{L}{c_c T_s}, \quad \sigma = \frac{D \rho^2}{\alpha c \rho_c^2}, \quad m_w = m_{bw}, \quad \omega = \frac{w}{w_\infty}.$$

Переход к лагранжевой координате позволяет отделить гидродинамическую часть задачи от диффузионно-тепловой, что существенно облегчает аналитическое решение задачи. Переход к новым координатам выполним только для уравнения теплопроводности. Тогда для остальных уравнений переход к лагранжевым координатам не вызовет трудностей.

Частные производные в (3), (4) определены в эйлеровой системе координат. Переопределим их в новой, лагранжевой системе координат. Для различия производных по времени в указанных системах координат обозначим эйлерову производную индексом Eu. Необходимые же расчеты подробно приводятся только для температуры  $T$ . Таким образом,

$$\left. \frac{\partial T}{\partial t} \right|_{\text{Eu}} = \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial \xi}{\partial t} \frac{\partial T}{\partial \xi},$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = -\frac{u\rho}{\sigma \alpha_c \rho_c} \frac{dx_{sw}}{dt} + \frac{u}{\sigma \alpha_c \rho_c} \int_{x_{sw}(t)}^x \frac{\partial \rho}{\partial t} dx'.$$

В условиях рассматриваемого здесь стационарного горения  $\partial T / \partial t = 0$ .

Подстановка в выражение для производной от  $\xi$  значения  $\partial \rho / \partial t$  из второго уравнения в (3) и последующее вычисление интеграла дают

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = -\frac{u}{\sigma \alpha_c \rho_c} \left( \rho \frac{dx_{sw}}{dt} + \rho v_w - \rho v_w|_{x=x_{sw}(t)} \right).$$

Из второго граничного условия определяем

$$-\rho v_w|_{x=x_{sw}(t)} = -\rho \frac{dx_{sw}}{dt} + \rho_c \frac{dx_{sw}}{dt}.$$

Используя это выражение в формуле для  $\partial \xi / \partial t$ , получаем

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = -\frac{u}{\sigma \alpha_c \rho_c} \left( \rho_c \frac{dx_{sw}}{dt} + \rho v_w \right).$$

Вычислив производную от  $\xi$  по  $x$ ,

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{u\rho}{\sigma \alpha_c \rho_c}, \quad (8)$$

легко преобразовать левую часть уравнения для  $T$  к виду

$$\left. \frac{\partial T}{\partial t} \right|_{\text{Eu}} + v_w \frac{\partial T}{\partial x} =$$

$$\begin{aligned} &= -\frac{u}{\sigma \alpha_c \rho_c} \left( \rho_c \frac{dx_{sw}}{dt} + \rho v_w \right) \frac{\partial T}{\partial \xi} + v_w \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial \xi} = \\ &= -\frac{u}{\sigma \alpha_c} \frac{dx_{sw}}{dt} \frac{\partial T}{\partial \xi} = \frac{u^2}{\sigma \alpha_c} \left( -\frac{1}{u} \frac{dx_{sw}}{dt} \frac{\partial T}{\partial \xi} \right) = \\ &= \frac{u^2}{\sigma \alpha_c} \varepsilon \frac{\partial T}{\partial \xi}. \end{aligned}$$

Несколько проще осуществляется переход к лагранжевой координате  $\xi$  в члене, отвечающем за кондуктивный перенос тепла:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho c_p} \frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) &= \\ &= \frac{\lambda \rho}{c_p} \left( \frac{u}{\sigma \alpha_c \rho_c} \right)^2 \frac{\partial^2 T}{\partial \xi^2} = \frac{u^2}{\sigma \alpha_c} \frac{\partial^2 T}{\partial \xi^2}. \end{aligned}$$

Здесь использованы формула (8), выписанное для параметра  $\sigma$  выражение из (7) и принятое выше допущение равенства теплоемкостей ( $c_c = c_p$ ). По аналогии с левой частью уравнения теплопроводности можно записать

$$\frac{\partial w^2}{\partial t} + v_w \frac{\partial w^2}{\partial x} = \frac{u^2}{\sigma \alpha_c} \varepsilon \frac{\partial w^2}{\partial \xi},$$

где частная производная в лагранжевых координатах принята равной нулю:

$$\left. \frac{\partial w^2}{\partial t} \right|_{\text{La}} = 0.$$

Дальнейший переход к лагранжевой координате и безразмерным величинам в оставшихся уравнениях не вызывает затруднений. При преобразовании уравнения диффузии необходимо учесть, что в силу зависимостей (6) для  $D$  и  $\lambda$  справедливы равенства

$$\frac{D\rho^2}{\sigma \alpha_c \rho_c^2} = \frac{D\rho^2 c_p}{\lambda \rho} = \text{Le}, \quad \text{Le} = \frac{D\rho c_p}{\lambda} = \text{const.}$$

## РЕШЕНИЕ ПРИ $\xi_g > \xi_{fw}$

Для случая, когда ширина зоны химических реакций  $\xi_{fw}$  меньше толщины ламинарного подслоя  $\xi_g$ , математическая формулировка стационарной диффузионно-тепловой задачи в новых переменных имеет вид:

$$\begin{aligned}
-\infty < \xi < 0: \quad \varepsilon \frac{d\theta_c}{d\xi} - \frac{d^2\theta_c}{d\xi^2} &= 0; \\
0 < \xi < \xi_{fw}: \quad \varepsilon \frac{d\theta}{d\xi} - \frac{d^2\theta}{d\xi^2} &= -\delta\varepsilon \frac{d\omega^2}{d\xi}, \\
&\varepsilon \frac{dY}{d\xi} - \text{Le} \frac{d^2Y}{d\xi^2} &= 0; \\
\xi_{fw} < \xi < \xi_g: \quad \varepsilon \frac{d\theta_{b1}}{d\xi} - \frac{d^2\theta_{b1}}{d\xi^2} &= -\delta\varepsilon \frac{d\omega^2}{d\xi}, \\
&\delta = \frac{w_\infty^2}{2c_p T_s}; \\
\xi_g < \xi < +\infty: \quad \varepsilon \frac{d\theta_{b2}}{d\xi} - \frac{d^2\theta_{b2}}{d\xi^2} &= 0.
\end{aligned} \tag{9}$$

Запишем граничные условия для уравнений (9):

$$\begin{aligned}
\xi \rightarrow -\infty: \quad \theta_c &= \theta_0; \\
\xi = 0: \quad \theta_c = \theta, \quad \frac{d\theta_c}{d\xi} &= \frac{d\theta}{d\xi} - l\varepsilon, \\
&\varepsilon(1 - Y) + \text{Le} \frac{dY}{d\xi} &= 0; \\
\xi = \xi_{fw}: \quad \theta = \theta_{b1}, \quad \frac{d\theta}{d\xi} &= \frac{d\theta_{b1}}{d\xi} - q\text{Le} \frac{dY}{d\xi}, \\
&-\text{Le} \frac{dY}{d\xi} = \varepsilon, \quad Y = 0; \\
\xi = \xi_g: \quad \theta_{b1} = \theta_{b2}, \quad \frac{d\theta_{b1}}{d\xi} &= \frac{d\theta_{b2}}{d\xi}; \\
\xi \rightarrow +\infty: \quad \frac{d\theta_{b2}}{d\xi} &= 0.
\end{aligned} \tag{10}$$

Принятое выше предположение независимости вязкости  $\mu$  от температуры приводит к линейной зависимости скорости  $\omega$  от лагранжевой координаты  $\xi$ :

$$\begin{aligned}
\omega &= \frac{\xi}{\xi_g}, \quad 0 < \xi < \xi_g; \\
\omega &= 1, \quad \xi \geq \xi_g;
\end{aligned} \tag{11}$$

$$\xi_g = \frac{2\mu u}{C_f w_\infty \alpha c \rho c \sigma} = \frac{2v_s}{C_f w_\infty} \text{Sc} = \frac{2}{\sqrt{C_f}} \frac{\text{Sc}}{J},$$

где  $\text{Sc} = \nu/D$  — число Шмидта,  $\nu$  — кинематическая вязкость,  $\xi_g$  — толщина ламинарного подслоя в лагранжевых координатах,  $J$  — число Виллюнова:

$$J = \sqrt{C_f} \frac{w_\infty}{v_s}.$$

Дополнительно к граничным условиям (10) должно выполняться балансное соотношение

$$\varepsilon = \frac{m_w(T_{sw})}{m} = \frac{m_{bw}(T_{fw})}{m_b}, \tag{12}$$

где  $T_{sw}$  — температура на поверхности топлива,  $T_{fw}$  — температура горения, которая в силу принятого предположения бесконечно тонкой зоны горения в газовой фазе совпадает с температурой пламени  $T_{bw}$  ( $T_{fw} = T_{bw}$ ).

Решения системы (9) с граничными условиями (10) даются выражениями:

$$\begin{aligned}
-\infty < \xi < 0: \quad \theta_c &= \theta_0 + (\theta_{sw} - \theta_0) \exp(\varepsilon\xi); \\
0 < \xi < \xi_{fw}: \quad \theta &= \theta_0 - l + (\theta_{sw} - \theta_0 + l + l_w) \times \\
&\times \exp(\varepsilon\xi) - l_w \left( 1 + \varepsilon\xi + \frac{\varepsilon^2 \xi^2}{2} \right), \\
&Y = 1 - (1 - Y_{sw}) \exp \frac{\varepsilon\xi}{\text{Le}}; \\
\xi_{fw} < \xi < \xi_g: \quad Y &= 0, \\
\theta_{b1} &= \theta_0 - l + q + l_w(1 + \varepsilon\xi_g) \exp(-\varepsilon\xi_g) \times \\
&\times \exp(\varepsilon\xi) - l_w \left( 1 + \varepsilon\xi + \frac{\varepsilon^2 \xi^2}{2} \right);
\end{aligned} \tag{13}$$

$$\xi_g < \xi < +\infty: \quad \theta_{b2} = \theta_0 - l + q - \delta = \theta_{bw}.$$

Здесь для сокращения записи и удобства предложено использовать безразмерный параметр

$$l_w = \frac{2\delta}{\xi_g^2 \varepsilon^2}.$$

Он имеет смысл фиктивного теплового эффекта газификации твердой фазы топлива. Его появление вызвано потерей тепла в зоне горения газовой фазы вследствие перехода внутренней энергии газа в его кинетическую энергию движения.

Ширина зоны горения определяется формулой

$$\xi_{fw} = -\frac{Le}{\varepsilon} \ln(1 - Y_{sw}) = \quad (14)$$

$$= \frac{1}{\varepsilon} \ln \left[ \frac{q}{\theta_{sw} + l - \theta_0 + l_w(1 - (1 + \varepsilon\xi_g) \exp(-\varepsilon\xi_g))} \right],$$

где  $Y_{sw}$  — массовая концентрация горючего газа вблизи поверхности разложения топлива,  $\theta_{sw} = T_{sw}/T_s$  — безразмерная температура на поверхности газификации топлива,  $\theta_{bw} = T_{bw}/T_s$  — безразмерная температура пламени.

### РЕШЕНИЕ ПРИ $\xi_g < \xi_{fw}$

В случае, когда ширина зоны горения больше толщины ламинарного подслоя, влияние турбулентности на горение становится достаточно существенным. Но в турбулентном пограничном слое ламинарный подслоя от зоны развитой турбулентности отделен буферным слоем, толщина которого сравнима с толщиной ламинарного подслоя [21]. В буферном слое по мере удаления от твердой поверхности интенсивность турбулентности постепенно нарастает. Поэтому при  $\xi_g < \xi_{fw}$ , но  $\xi_g \approx \xi_{fw}$  влиянием турбулентности на горение можно пренебречь. При этом решения уравнений горения оказываются полезными при общем анализе процессов горения. Поэтому рассмотрим уравнения:

$$-\infty < \xi < 0: \quad \varepsilon \frac{d\theta_c}{d\xi} - \frac{d^2\theta_c}{d\xi^2} = 0;$$

$$0 < \xi < \xi_g: \quad \varepsilon \frac{d\theta}{d\xi} - \frac{d^2\theta}{d\xi^2} = -\delta\varepsilon \frac{d\omega^2}{d\xi},$$

$$\varepsilon \frac{dY}{d\xi} - Le \frac{d^2Y}{d\xi^2} = 0; \quad (15)$$

$$\xi_g < \xi < \xi_{fw}: \quad \varepsilon \frac{d\theta_{b1}}{d\xi} - \frac{d^2\theta_{b1}}{d\xi^2} = 0;$$

$$\varepsilon \frac{dY_1}{d\xi} - Le \frac{d^2Y_1}{d\xi^2} = 0;$$

$$\xi_{fw} < \xi < +\infty: \quad \varepsilon \frac{d\theta_{b2}}{d\xi} - \frac{d^2\theta_{b2}}{d\xi^2} = 0.$$

Граничные условия:

$$\xi \rightarrow -\infty: \quad \theta_c = \theta_0;$$

$$\xi = 0: \quad \theta_c = \theta, \quad \frac{d\theta_c}{d\xi} = \frac{d\theta}{d\xi} - l\varepsilon,$$

$$\varepsilon(1 - Y) + Le \frac{dY}{d\xi} = 0;$$

$$\xi = \xi_g: \quad \theta = \theta_{b1}, \quad \frac{d\theta}{d\xi} = \frac{d\theta_{b1}}{d\xi}, \quad Y = Y_1,$$

$$\frac{dY}{d\xi} = \frac{dY_1}{d\xi};$$

$$\xi = \xi_{fw}: \quad \theta_{b1} = \theta_{b2}, \quad \frac{d\theta_{b1}}{d\xi} = \frac{d\theta_{b2}}{d\xi} - qLe \frac{dY_1}{d\xi},$$

$$-Le \frac{dY_1}{d\xi} = \varepsilon, \quad Y_1 = 0;$$

$$\xi \rightarrow +\infty: \quad \frac{d\theta_{b2}}{d\xi} = 0.$$

Решение задачи (15) с приведенными граничными условиями не вызывает трудностей и дается следующими формулами:

$$-\infty < \xi < 0: \quad \theta_c = \theta_0 + (\theta_{sw} - \theta_0) \exp(\varepsilon\xi);$$

$$0 < \xi < \xi_g: \quad \theta = \theta_0 - l + (\theta_{sw} - \theta_0 + l + l_w) \times$$

$$\times \exp(\varepsilon\xi) - l_w \left( 1 + \varepsilon\xi + \frac{\varepsilon^2\xi^2}{2} \right),$$

$$Y = 1 - (1 - Y_{sw}) \exp \frac{\varepsilon\xi}{Le}; \quad (16)$$

$$\xi_g < \xi < \xi_{fw}: \quad Y_1 = 1 - (1 - Y_{sw}) \exp \frac{\varepsilon\xi}{Le},$$

$$\theta_{b1} = \theta_0 - l - \delta + [\theta_{sw} - \theta_0 + l +$$

$$+ l_w[1 - (1 + \varepsilon\xi_g) \exp(-\varepsilon\xi_g)]] \exp(\varepsilon\xi);$$

$$\xi_{fw} < \xi < +\infty: \quad \theta_{b2} = \theta_0 - l + q - \delta, \quad Y_{b2} = 0.$$

Ширина зоны горения по-прежнему определяется формулой (14).

В формулах (10)–(14), (16) остаются неопределенными температура пламени  $\theta_{bw}$  в газовой фазе и температура  $\theta_{sw}$  на поверхности газификации твердой фазы топлива. Они необходимы для расчета коэффициента эрозии  $\varepsilon$ . Вычислению этих величин посвящен следующий параграф.

## ВЫРАЖЕНИЕ ДЛЯ КОЭФФИЦИЕНТА ЭРОЗИИ

При отсутствии обдува ( $\delta = 0$ )  $\varepsilon = 1$ ,  $\theta_{sw} = 1$ ,  $\theta_{bw} = \theta_b = \theta_0 + q - l$ , а безразмерная ширина зоны горения определяется как

$$\xi_{fw} = \xi_f = \ln \frac{q}{1 + l - \theta_0}.$$

Второе равенство в (12) определяет коэффициент эрозии через скорость горения в газовой фазе [23]:

$$\begin{aligned} \varepsilon = \frac{m_{fw}}{m_b} &= \exp \left[ \frac{E}{2R} \left( \frac{1}{T_b} - \frac{1}{T_{fw}} \right) \right] = \\ &= \exp \left[ \frac{E}{2RT_b} \left( 1 - \frac{T_b}{T_{fw}} \right) \right], \end{aligned}$$

где  $E$  — эффективная энергия активации химических реакций. Перепишем эту формулу с учетом введенных безразмерных величин:

$$\varepsilon = \exp \left[ \frac{1}{2\beta\theta_b} \left( 1 - \frac{\theta_b}{\theta_{fw}} \right) \right], \quad \beta = \frac{RT_s}{E}. \quad (17)$$

Коэффициент эрозии можно также рассчитать через скорость газификации твердой фазы топлива [6]:

$$\varepsilon = \exp \left[ \frac{1}{2\beta_c} \left( 1 - \frac{1}{\theta_{sw}} \right) \right], \quad \beta_c = \frac{E_c}{RT_s}, \quad (18)$$

где  $E_c$  — энергия активации реакции, приводящей к газификации твердой фазы топлива.

Приравнивая выражения под экспонентой в (17) и (18), находим связь между температурой в бесконечно узкой зоне химических реакций и температурой поверхности газификации:

$$\theta_{sw} = \left[ 1 - \frac{\beta_c}{\beta\theta_b} \left( 1 - \frac{\theta_b}{\theta_{fw}} \right) \right]^{-1}. \quad (19)$$

Рассмотрим случай, когда ширина зоны горения меньше и больше толщины ламинарного подслоя. Если  $\xi_g > \xi_{fw}$ , то температуру  $\theta_{fw}$  можно рассчитывать, используя формулу для  $\theta_{b1}$  из (13). Следовательно,

$$\begin{aligned} \theta_{fw} = \theta_b - l_w \left[ 1 + \varepsilon\xi_{fw} + \frac{1}{2} \varepsilon^2 \xi_{fw}^2 - \right. \\ \left. - (1 + \varepsilon\xi_g) \exp(-\varepsilon\xi_g) \exp(\varepsilon\xi_{fw}) \right]. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\frac{\theta_{fw}}{\theta_b} = 1 - \frac{2\delta}{\varepsilon^2 \xi_g^2 \theta_b} \Phi,$$

$$\begin{aligned} \Phi = 1 + \varepsilon\xi_{fw} + \frac{1}{2} \varepsilon^2 \xi_{fw}^2 - \\ - (1 + \varepsilon\xi_g) \exp(-\varepsilon\xi_g) \exp(\varepsilon\xi_{fw}). \end{aligned} \quad (20)$$

Если  $\xi_g < \xi_{fw}$ , то температура  $\theta_{fw}$  рассчитывается по формуле

$$\theta_{fw} = \theta_0 - l + q - \delta = \theta_b - \delta$$

или

$$\frac{\theta_{fw}}{\theta_b} = 1 - \frac{\delta}{\theta_b}. \quad (21)$$

В первом случае расчет усложняется тем, что правая часть (20) неявно зависит от температуры  $\theta_{fw}$ . Поэтому приходится решать трансцендентное алгебраическое уравнение.

Уравнения (18)–(21), дополненные формулой (14), являются полной системой, позволяющей найти температуру поверхности газификации и зоны химических реакций, а также коэффициент эрозии [16]. Приведенные математические соотношения достаточно сложны, получить на их основе простые аналитические формулы, подобные (1) и (2), не представляется возможным.

## РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ

Система алгебраических уравнений (18)–(21), (14) с неизвестными величинами  $\varepsilon$ ,  $\theta_{sw}$ ,  $\theta_{fw}$ ,  $\xi_{fw}$  решалась применением итерационного процесса по следующему алгоритму. Вначале задается стартовое значение  $\theta_{sw}$ . После этого вычисляются эрозионный коэффициент по формуле (18), а также  $\xi_g$  и  $\xi_{fw}$  — по формулам (11) и (14). Далее проверяется, какое выбрать условие:  $\xi_g < \xi_{fw}$  или  $\xi_g > \xi_{fw}$ , и в зависимости от этого для расчета температуры  $\theta_{fw}$  применяется либо формула (20), либо (21). По найденному значению этой температуры проводится вторичное вычисление  $\theta_{sw}$ . Если это значение температуры сильно отличается от стартового, вся процедура расчета повторяется. Причем вычисленное значение  $\theta_{sw}$  принимается как стартовое для последующих итераций.

Скорость горения вычислялась по формуле Хаггиса [24]

$$u \sim \frac{p^\nu}{T_s - T_0}.$$

Она приводилась к безразмерной форме относительно базовых значений давления  $p_0$  и начальной температуры  $T_0$ :

$$u = \left(\frac{p}{p_0}\right)^\nu K_T, \quad K_T = \frac{1 - \theta_0}{1 - \theta_{0v}},$$

где  $\theta_{0v}$  — варьируемая начальная температура.

Скорость оттока газа от поверхности топлива при обдуве рассчитывалась по формуле

$$v_{sw} = v_s u \frac{p_0 T_{sw}}{p T_s}.$$

Эта формула следует из закона сохранения массы при исключении плотности газа с помощью уравнения состояния идеального газа.

Результаты расчета характеристик эрозионного горения, приведенные на рис. 2, 3, выполнены при следующих значениях параметров:  $w_\infty = 5 \div 200$  м/с ( $J = 0.4 \div 17.4$ ),  $p/p_0 = 10$ ,  $\nu = 0.6$ ,  $c_p = 800$  Дж/(кг·К),  $T_s = 600$  К,  $\beta = 0.01$ ,  $\beta_c = 0.1$ ,  $\theta_0 = \theta_{0v} = 0.35$ ,  $l = 0.2$ ,  $q = 3.5$ ,  $Sc = 0.8$ ,  $C_f = 0.03$ .

Критическому значению числа Виллюнова  $J_*$ , при превышении которого наблюдается положительный эрозионный эффект, можно дать два определения. Согласно первому определению [6]

$$J_{*1} = \frac{32.5Sc}{(\theta_b - q) \ln[q/(1 + l - \theta_0)] + \theta_b - 1}.$$

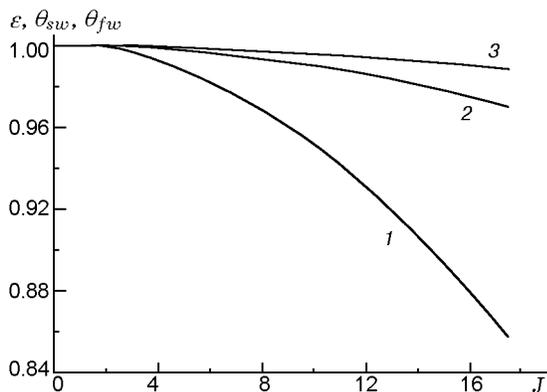


Рис. 2. Параметры  $\varepsilon$  (кривая 1),  $\theta_{sw}$  (2) и  $\theta_{fw}$  (3) как функции числа  $J$

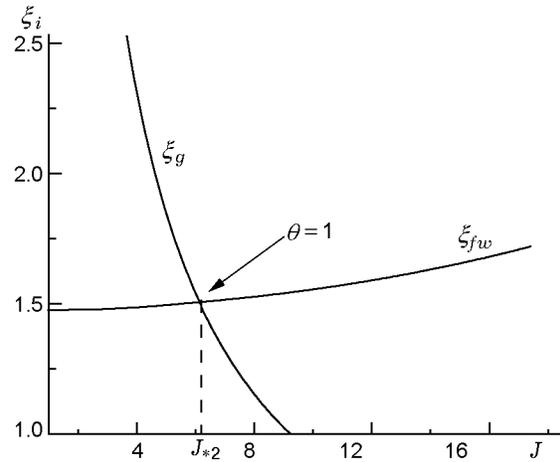


Рис. 3. Графическое определение второго критического числа Виллюнова  $J_{*2}$

Эта формула получена при условии отсутствия отрицательного эрозионного эффекта и достижения числом Булгакова — Липанова  $\Theta$  [6] критического значения  $\Theta = 1$ ,

$$\Theta = \frac{x_{fw} - x_{sw}}{\delta_g},$$

где  $\delta_g$  — толщина вязкого подслоя турбулентного пограничного слоя. Например, в представленных расчетах первое критическое число Виллюнова  $J_{*1} = 9.08$ .

Число Булгакова — Липанова в лагранжевых координатах записывается в виде  $\Theta = \xi_{fw}/\xi_g$ . При учете отрицательного эрозионного эффекта, который имеет место всегда, второе определение критического числа Виллюнова  $J_{*2}$  тоже получается из равенства  $\Theta = 1$ . Но второму определению соответствует точка пересечения кривых  $\xi_{fw}(J)$  и  $\xi_g(J)$  (см. рис. 3). Эта точка характеризуется равным по модулю вкладом отрицательного и положительного эрозионных эффектов [16], и в ней эрозионный коэффициент как функция параметра  $J$  достигает минимума.

Как известно [18], проявление отрицательного эрозионного эффекта ослабевает со снижением начальной температуры. Результаты расчета показывают следующее: хотя с уменьшением  $\theta_{0v}$  наблюдается (рис. 4) относительно слабое усиление отрицательного эрозионного эффекта, в действительности происходит снижение критической скорости  $w_*$  (рис. 5). Все три значения  $\theta_{0v3} < \theta_{0v2} < \theta_{0v1}$ , рассчитанные при различных начальных температурах, найдены из условия  $\Theta = 1$ .

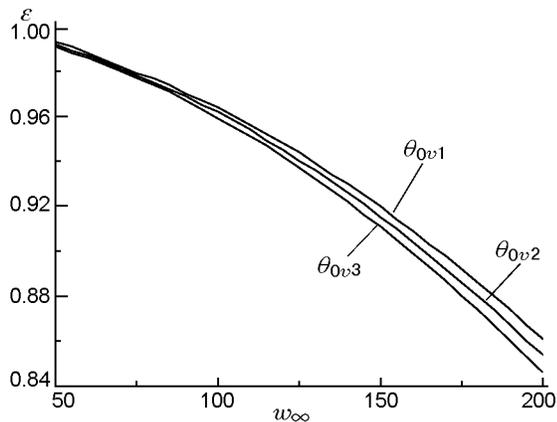


Рис. 4. Эрозионный коэффициент при начальных температурах  $\theta_{0v3} = 0.25$ ,  $\theta_{0v2} = 0.35$ ,  $\theta_{0v1} = 0.45$

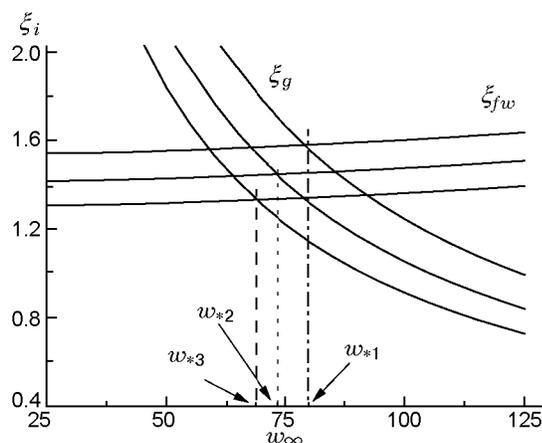


Рис. 5. Ширина ламинарного подслоя и ширина зоны горения в газовой фазе как функции скорости обдува  $w_\infty$  при различных начальных температурах  $\theta_{0vi}$ ,  $i = 1, 2, 3$  (см. рис. 4). Снижение критической скорости  $w_{*3} < w_{*2} < w_{*1}$  с уменьшением начальной температуры

При  $w_\infty > w_*$  ( $\Theta > 1$ ) начинают сильнее действовать механизмы, ответственные за проявление положительного эрозионного эффекта. Снижение критической скорости с уменьшением начальной температуры означает, что область возникновения отрицательной эрозии сужается. Проявление положительного эрозионного эффекта начинается при более низких начальных температурах, что в целом приводит к подавлению отрицательного эрозионного эффекта [16].

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Проведенный расчет скорости горения при проявлении отрицательного эрозионного эффекта аналитическими методами подтверждает основные выводы работы [16]. Совместное рассмотрение механизмов, ответственных за проявление отрицательного и положительного эрозионных эффектов, приводит к тому, что принимается второе определение критического числа Виллюнова: число определяет границу, где действия отрицательного и положительного эрозионных эффектов уравниваются. При этом использование числа Булгакова — Липанова оказывается универсальным средством для определения области доминирования положительной или отрицательной эрозии.

Переход части тепловой энергии, выделяющейся при химических реакциях, в кинетическую энергию движения газа вдоль поверхности горения твердого топлива проявляется в виде кажущегося теплового эффекта газификации  $l_w$  твердой фазы топлива.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Алемасов В. Е., Дрегаллин А. Ф., Тишин А. П. Теория ракетных двигателей. — М.: Машиностроение, 1969.
2. Орлов Б. В., Мазинг Г. Ю. Термодинамика и баллистические основы проектирования ракетных двигателей на твердом топливе. — М.: Машиностроение, 1968.
3. Булгаков В. К., Липанов А. М. Теория эрозионного горения твердых ракетных топлив. — М.: Наука, 2001.
4. Сабденов К. О. Теория нестационарного горения твердых ракетных топлив. — Томск: Издво ТПУ, 2006.
5. Mukunda H. S. A comprehensive theory of erosive burning in solid rocket propellants // Combust. Sci. Technol. — 1978. — V. 18, is. 3–4. — P. 105–118.
6. Сабденов К. О. К вопросу о пороговом характере эрозионного горения // Физика горения и взрыва. — 2008. — Т. 44, № 3. — С. 61–71.
7. Nakka's R. Experimental Rocketry Web Site. — <http://www.nakka-rocketry.net/burnrate.html>.
8. Сабденов К. О., Ерзада М. Скорость горения твердого ракетного топлива при отрицательной эрозии // Вестн. ЕНУ им. Л. Н. Гумилева. — 2012. — № 4. — С. 478–489.
9. Булгаков В. К., Липанов А. М., Камалетдинов А. Ш. Численные исследования эрозионного горения конденсированных веществ // Физика горения и взрыва. — 1986. — Т. 22, № 6. — С. 83–88.

10. Булгаков В. К., Липанов А. М. К теории горения конденсированного вещества при обдуве // Физика горения и взрыва. — 1983. — Т. 19, № 3. — С. 32–41.
11. McDonald B. A. The Development of an Erosive Burning Model for Solid Rocket Motors Using Direct Numerical Simulation. — Georgia Inst. of Technology, 2004.
12. Krishnan S., Rajesh K. K. Erosive burning of ammonium perchlorate/hydroxyl-terminated-polybutadiene propellants under supersonic cross-flows // J. Propuls. Power. — 2003. — V. 19, N 4. — P. 623–631.
13. Greatrix D. R. Scale effects on quasi-steady solid rocket internal ballistic behavior // Energies. — 2011. — N 3. — P. 1790–1804.
14. Greatrix D. R. Simulation of axial combustion instability development and suppression in solid rocket motors // Intern. J. Spray and Combust. Dynamics. — 2009. — V. 1, N 1. — P. 143–168.
15. Greatrix D. R. Model for prediction of negative and positive erosive burning // Can. Aeronaut. Space J. — 2007. — V. 53, N 1. — P. 13–21.
16. Сабденов К. О., Ерзада М. Механизм возникновения отрицательного эрозионного эффекта // Физика горения и взрыва. — 2013. — Т. 49, № 3. — С. 22–33.
17. Гусаченко Л. К., Зарко В. Е. Эрозионное горение. Проблемы моделирования // Физика горения и взрыва. — 2007. — Т. 43, № 3. — С. 47–58.
18. Виллюнов В. Н., Дворяшин А. А. О влиянии начальной температуры конденсированного вещества на величину отрицательной эрозии // Физика горения и взрыва. — 1973. — Т. 9, № 4. — С. 602.
19. Willcox M. A., Brewster M. Q., Tang K. C., Stewart D. S., Kuznetsov I. Solid rocket motor internal ballistics simulation using three-dimensional grain burnback // J. Propuls. Power. — 2007. — V. 23, N 3. — P. 575–584.
20. Srinivasan K., Narayanan S., Sharma O. P. Numerical studies on erosive burning in cylindrical solid propellant grain // Heat Mass Transfer. — 2008. — V. 44. — P. 579–585.
21. Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газа. — М.: Наука, 1987.
22. Гиршфельдер Дж., Кертисс Ч., Берд Р. Молекулярная теория газов и жидкостей: пер. с англ. — М.: Изд-во иностр. лит., 1961.
23. Зельдович Я. Б., Либрович В. Б., Баренблатт Г. И., Махвиладзе Г. М. Математическая теория горения и взрыва. — М.: Наука, 1980.
24. Жидкие и твердые ракетные топлива: сб. переводов с англ. / под ред. Ю. Х. Шаулова. — М.: Изд-во иностр. лит., 1959.

*Поступила в редакцию 4/XI 2012 г.*