УДК 519.23

Поиск допустимых решений алгоритмами внутренних точек*

В.И. Зоркальцев

Институт систем энергетики им. Л.А. Мелентьева Сибирского отделения Российской академии наук, ул. Лермонтова, 130, г. Иркутск, 664033
E-mail: zork@isem.irk.ru

Зоркальцев В.И. Поиск допустимых решений алгоритмами внутренних точек // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние. — Новосибирск, 2016. — Т. 19, № 3. — С. 249–265.

Рассматривается семейство алгоритмов внутренних точек для решения задачи линейного программирования. В этих алгоритмах процедуры ввода в область допустимых решений исходной задачи представлена как процесс оптимизации в области допустимых решений расширенной задачи. Причем расширение осуществляется добавлением только одной новой переменной. Основная цель статьи — изложение теоретического обоснования процесса ввода в область допустимых решений исходной задачи при условии невырожденности расширенной задачи. В частности, доказано, что в случае совместности ограничений исходной задачи, исследуемые процедуры ввода в область допустимых решений приводят к относительно внутренней точке этой области.

DOI: 10.15372/SJNM20160302

Ключевые слова: *метод внутренних точек, линейное программирование, ввод в область допустимых решений.*

Zorkaltsev V.I. The search for admissible solutions by the interior point algorithms // Siberian J. Num. Math. / Sib. Branch of Russ. Acad. of Sci. — Novosibirsk, 2016. — Vol. 19, № 3. — P. 249–265.

A family of interior point algorithms for the linear programming problems is considered. In these algorithms, the entering into the domain of admissible solution of the original problem is represented as optimization process of the extended problem. This extension is realized by adding just one new variable. The main objective of the paper is to give a theoretical justification of the proposed procedure of entering into the feasible domain of the original problem, under the assumption of non-degeneracy of the extended problem. Particularly, we prove that given the constraints of the original problem being consistent, the procedure leads to a relative interior point of the feasible solutions domain.

Keywords: *interior point algorithm, linear programming, techniques of arriving at the feasible solutions region.*

1. Семейство алгоритмов внутренних точек

Исходной задачей будем называть задачу линейного программирования в стандартной форме:

$$c^\top x \to \min, \quad x \in X, \tag{1}$$

где

*Работа поддержана грантом РФФИ (проект № 15-07-074121а).

$$X = \{x \in R^n : \ Ax = b, \ x \geq 0\} \tag{2}$$

есть множество допустимых решений. Задана матрица A размера $m \times n$, векторы $b \in R^m$, $c \in R^n$ при некоторых натуральных m и n.

Обозначения. Множество номеров компонент вектора $y \in R^n$ с положительными, отрицательными, нулевыми и ненулевыми значениями обозначим:

$$J_+(y) = \{j : \ y_j > 0\}, \qquad J_-(y) = \{j : \ y_j < 0\},$$

$$J_0(y) = \{j : \ y_j = 0\}, \qquad J(y) = J_+(y) \cup J_-(y).$$

Набор $J(y)$ — носитель вектора y.

Рассматривается вычислительный процесс, вырабатывающий последовательность векторов $x^k \in R^n$ по правилу

$$x^{k+1} = x^k + \lambda_k s^k, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, \tag{3}$$

где k — номер итерации, s^k — вектор R^n направления корректировки решения, λ^k — вещественная величина шага корректировки.

Причем на всех итерациях $x^k > 0$, т. е. все компоненты вектора x^k положительные. В качестве стартовой точки может использоваться любой вектор x^0 с положительными всеми компонентами. Например, можно положить $x_j^0 = 1$, $j = 1, \ldots, n$.

Вспомогательная задача поиска направления корректировки решения. Направление улучшения решения определяется как результат решения задачи минимизации квадратичной, сепарабельной, строго выпуклой функции от вектора переменных $s \in R^n$ при линейных ограничениях–равенствах:

$$s^k = \arg\min\{F_k(s) : \ \ As = r^k\}. \tag{4}$$

Здесь

$$F_k(s) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} (s_j)^2 / d_j^k + \sum_{j=1}^{n} c_j s_j, \tag{5}$$

$$r^k = b - Ax^k \tag{6}$$

есть вектор невязок ограничений–равенств

$$Ax = b, \tag{7}$$

d_j^k — компоненты итеративно изменяющегося вектора весовых коэффициентов d^k из R^n.

От весовых коэффициентов требуется выполнение неравенств:

$$\underline{\sigma}\big(x_j^k\big) \leq d_j^k \leq \bar{\sigma}\big(x_j^k\big), \ \ j = 1, \ldots, n, \tag{8}$$

где $\underline{\sigma}$, $\bar{\sigma}$ — некоторые непрерывные функции от неотрицательного аргумента, удовлетворяющие при любом $\alpha > 0$ неравенствам:

$$0 < \underline{\sigma}(\alpha) \leq \bar{\sigma}(\alpha). \tag{9}$$

Причем существуют $\varepsilon > 0$, $M_1 > 0$ такие, что при любых $\alpha > 0$, $\beta > 0$, удовлетворяющих условию $\alpha/\beta \leq \varepsilon$, выполняется неравенство

$$(\bar{\sigma}(\alpha)/\underline{\sigma}(\beta)) \le M_1(\alpha/\beta). \quad (10)$$

Требованиям (8)–(10) удовлетворяют многие правила задания весовых коэффициентов, обладающие своими достоинствами и недостатками [1–4]. Поэтому описываемый здесь вычислительный процесс интерпретируется как некоторое семейство алгоритмов. В частности, можно воспользоваться следующим правилом:

$$d_j^k = \left(x_j^k\right)^p, \quad j = 1, \ldots, n, \quad (11)$$

при заданном $p \ge 1$.

Отметим, из (10) вытекает выполнение неравенства

$$\bar{\sigma}(\alpha) \le M_2 \alpha \quad (12)$$

при всех $\alpha \in (0, \epsilon\}$ для некоторых $\epsilon > 0$, $M_2 > 0$. Условию (12) удовлетворяет более широкий класс правил задания весовых коэффициентов, чем условию (10).

Задача (4) не имеет решения в том и только в том случае, если несовместны ее ограничения. Это означает несовместность системы уравнений (7), что выявляется сразу на нулевой итерации. Далее считаем систему (7) совместной.

Применяя к вспомогательной задаче (4) метод множителей Лагранжа, получаем расчетные формулы:

$$s_j^k = -d_j^k g_j^k, \quad j = 1, \ldots, n, \quad (13)$$

где

$$g^k = g\left(u^k\right), \quad (14)$$

$$u^k = \arg\min\{\Phi_k(u) : \ \ u \in R^m\}, \quad (15)$$

$$\Phi_k(u) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} d_j^k \left(g_j(u)\right)^2 - \sum_{i=1}^{m} r_i^k u_i, \quad (16)$$

$$g(u) = c - A^\top u. \quad (17)$$

Основной вычислительной проблемой является решение задачи безусловной минимизации (15) квадратичной выпуклой функции.

Векторы s^k, g^k приведенными правилами определяются однозначно. Неединственное значение может иметь только вектор u^k, если $\mathrm{rank} A < m$. Рассматриваемый вычислительный процесс можно обобщить с однозначным определением вектора u^k и на этот случай. Например, можем считать, что u^k — решение задачи (15) с минимальной евклидовой нормой. Далее, чтобы не усложнять изложение теоретического обоснования вычислительного процесса, будем предполагать, что

$$\mathrm{rank} A = m. \quad (18)$$

Шаг корректировки решения вычисляется по правилу:

если $r^k \ne 0$, то

$$\lambda_k = \min\{1, \ \hat{\lambda}_k\}; \quad (19)$$

если $r^k = 0$, то

$$\lambda_k = \hat{\lambda}_k, \quad (20)$$

где

$$\hat{\lambda}_k = \gamma \min \left\{ \frac{-x_j^k}{s_j^k} : \ j \in J_-\big(s^k\big) \right\}, \tag{21}$$

при заданном параметре

$$\gamma \in (0,\ 1)\,. \tag{22}$$

Заметим, из (3), (19)–(21) следует

$$x^{k+1} \geq (1-\gamma)\, x^k. \tag{23}$$

Поэтому в силу (22) из условия $x^0 > 0$ следует, что $x^k > 0$ для всех k.

Из (3), (6) вытекает равенство

$$r^{k+1} = (1-\lambda_k)\, r^k, \quad k = 0, 1, 2, \ldots\,. \tag{24}$$

Этим объясняется использование правила (19) для вычисления шага при $r^k \neq 0$. В этом случае, согласно (24), происходит сокращение по итерациям абсолютных значений всех компонент вектора невязок ограничений–равенств (7). До тех пор пока $r^k \neq 0$ осуществляется этап ввода в область допустимых решений.

Отметим, если вектор x^k является допустимым для задачи (1), т. е. $r^k = 0$, то допустимым будет и вектор x^{k+1}, так как, согласно (24), $r^{k+1} = 0$. На данной и последующих итерациях будет осуществляться этап оптимизации в области допустимых решений задачи (1).

Шаг корректировки нельзя вычислить, только если $J_-\left(s^k\right) = \emptyset$. В таком случае, если $r^k \neq 0$, то следует положить $\lambda^k = 1$.

Если $J\left(s^k\right) = \emptyset$ при $r^k = 0$, то решение x^k будет не только допустимым, но и оптимальным для задачи (1). Поскольку $x^k > 0$, то в этом случае любое решение из X будет оптимальным для задачи (1). Вычисления завершаются.

Если $J_-\left(s^k\right) = \emptyset$ при $r^k = 0$ и $s^k \neq 0$, то такая ситуация будет означать отсутствие оптимальных решений у задачи (1). По направлению s^k можно бесконечно уменьшать значение целевой функции задачи (1), не выходя из области ее допустимых решений. Вычисления при обнаружении такой ситуации также завершаются.

В монографии [1] рассматривались алгоритмы внутренних точек, соответствующие изложенному вычислительному процессу с весовыми коэффициентами (11) при $p = 2$. И.И. Дикиным было дано [1, 2] обоснование процесса оптимизации в области допустимых решений таким алгоритмом при условии невырожденности задачи (1).

В препринте [3] было анонсировано, в [4, 5] были опубликованы доказательства утверждений, обосновывающих процесс оптимизации в области допустимых решений изложенным здесь семейством алгоритмов при предположении о невырожденности задачи (1). В данной статье дадим обоснование алгоритмов для этапа ввода в область допустимых решений при условии невырожденности расширенной задачи, которая рассматривается в следующем пункте.

В изложенном вычислительном процессе при вводе допустимых решений учитывается целевая функция исходной задачи (1). Это позволяет получать первые допустимые решения, более близкие к оптимальному. При вводе в область допустимых решений можно и не учитывать целевую функцию, т. е. полагать $c = 0$. Оба варианта вычислительного метода (с учетом и без учета целевой функции при вводе в область допустимых решений) рассматривались в монографии [1]. В данной статье ограничимся исследованием процесса ввода в область допустимых решений без учета целевой функции задачи (1).

Уместно отметить, что длительное время, с конца 60-х годов до начала 80-х прошлого столетия, рассматриваемый здесь тип алгоритмов внутренних точек разрабатывался в работах только российских математиков в Институте математики СО АН СССР, в Сибирском энергетическом институте СО АН СССР, в Вычислительном центре АН СССР. В работах И.И. Дикина, С.М. Анцыза, Ю.Г. Евтушенко, В.Г. Жадана, автора данной статьи были получены пионерные результаты в разработке, экспериментальном и теоретическом исследовании этих алгоритмов, их непрерывных аналогов [1, 6, 7]. Уже с 70-х годов прошлого столетия эти алгоритмы успешно используются при реализации ряда моделей энергетики [1, 4].

С середины 80-х годов к данным алгоритмам проявился повышенный интерес в мире. Причем многие из опубликованных первоначально работ по этим алгоритмам (например, [8–11]) были по сути переоткрытием сделанного ранее в России. В результате ряда независимых исследований было установлено, что эти алгоритмы являются наиболее эффективным средством решения задач линейного и нелинейного программирования. Не имея возможности здесь дать сколь-нибудь представительный обзор многих сотен публикаций по этим алгоритмам, отметим только, что многие аспекты представленных в данной статье алгоритмов, в том числе рассматриваемое здесь правило ввода в область допустимых решений, нуждаются в теоретическом осмыслении и обосновании.

Обозначения. Множество относительно внутренних точек выпуклой области Q из R^n (внутренних точек относительно минимального линейного многообразия, содержащего Q), следуя Рокаффеллару [12], будем обозначать $\mathrm{ri}Q$. Для полиэдра, определяемого как множество решений системы линейных неравенств относительно внутренних точек, будут решения системы с минимальным (не сужаемым) набором активных ограничений. В частности, для множества допустимых решений исходной задачи (1) относительно внутренними будут точки из X с максимальным носителем (т. е. с минимальным набором нулевых компонент):

$$\mathrm{ri}X = \{x \in X : \ \nexists\, y \in X,\ J(x) \subset J(y)\}. \tag{25}$$

Символ $\subset$ обозначает строгое включение одного множества в другое (включено и не совпадает). Для нестрогого включения (когда не исключено и совпадение) будем использовать символ $\subseteq$.

2. Задача ввода в область допустимых решений

Пусть имеется вектор $\tilde{x} \geq 0$ из R^n. Вычислим для него вектор невязок ограничений–равенств задачи (1):

$$\tilde{r} = b - A\tilde{x}. \tag{26}$$

Рассмотрим задачу линейного программирования с $(n+1)$-й переменной:

$$\beta \to \min, \quad Ax + \beta\tilde{r} = b. \tag{27}$$

Ее будем называть расширенной задачей. Дополнительной переменной является величина β. Значения $x = \tilde{x}$, $\beta = 1$ составляют допустимое по условиям задачи (27) ее решение, с которого можно начать процесс оптимизации в области допустимых решений.

Отметим, если исходная задача (1) имеет допустимые решения, $X \neq \emptyset$, то у задачи (27) допустимое решение будут составлять любой вектор $x \in X$ и значение $\beta = 0$. При этом оптимальное решение задачи (27) может достигаться при $\beta = 0$ и при $\beta < 0$. Возможен и случай, что задача (27) не имеет оптимального решения из-за того, что ее целевая функция не ограничена снизу на множестве допустимых решений. Если для оптимального решения $\beta < 0$ или задача (27) не имеет оптимального решения (целевая функция неограниченна снизу на множестве допустимых решений), то в процессе итеративного улучшения решения при переходе текущего значения β через уровень $\beta = 0$ следует остановиться на этом уровне. Собственно это и реализует правило выбора шага (19).

Если же оптимальное решение задачи (27) достигается при $\beta > 0$, то у исходной задачи (1) нет допустимых решений. Указанные факты и позволяют называть расширенную задачу (27) задачей ввода в область допустимых решений для исходной задачи (1).

Отметим, задача (27) может использоваться и для ввода в область допустимых решений исходной задачи (1) алгоритмами симплекс-метода. Чтобы иметь базисное допустимое решение, следует положить $\tilde{x}_j = 1$ (или любому другому положительному числу) для компонент j в количестве $m-1$. Остальные компоненты вектора $\bar{x}$ следует положить нулевыми.

Двойственная к задаче (27) является следующая задача линейного программирования:

$$b^\top u = \max \tag{28}$$

при ограничениях

$$A^\top u \le 0, \tag{29}$$

$$\tilde{r}^\top u = 1. \tag{30}$$

Определение 1. Вектор $x \in R^n$ и величина $\beta \ge 0$, удовлетворяющие условиям задачи (25), будут называться ее стационарным решением, если при некотором $u \in R^n$ выполняется условие (30) и соотношение

$$J\,(x) \subseteq J_0\big(A^\top u\big). \tag{31}$$

Заметим, если при этом вектор u будет удовлетворять ограничению (29) двойственной задачи, то пара x, β будет составлять оптимальное решение задачи (27). Вектор u будет оптимальным решением задачи (28)–(30). В таком случае соотношение (31) выражает условие дополняющей нежесткости для взаимно-двойственных задач (27) и (28)–(30).

Если и только если для допустимых решений задач (27) и (28)–(30) выполняется условие дополняющей нежесткости (31) в строгой форме

$$J(x) = J_0\big(A^\top u\big), \tag{32}$$

то пара x, β будет находиться в относительной внутренности оптимальных решений задачи (27). Вектор u будет относительно внутренней точкой оптимальных решений задачи (28)–(30).

Отметим, что если в рассматриваемой ситуации $\beta = 0$, то вектор x будет находиться в множестве $\mathrm{ri}X$. Такое допустимое решение задачи (1) имеет свои преимущества. В этом случае, согласно (25), при оптимизации в области допустимых решений задачи (1) следует исключить из рассмотрения компоненты вектора переменных с номерами из $J_0(x)$ для полученного x из $\mathrm{ri}X$. Эти и только эти компоненты вектора переменных будут равны нулю для любого решения из X.

Далее считаем, что в задаче (27) $\tilde{r} = r^0$. Будем использовать также предположение о невырожденности задачи (27).

Определение 2. Расширенную задачу (27) будем называть невырожденной, если для ее любого стационарного решения x, β существует единственный вектор u из R^m, при котором выполняются соотношения (30), (31).

Предметом дальнейших исследований будет вычислительный процесс из предыдущего пункта в случае, когда на всех итерациях

$$r^k \neq 0, \quad 0 < \lambda_k < 1, \quad k = 0, 1, 2, \dots . \tag{33}$$

При этом для упрощения считаем, что на этапе ввода в область допустимых решений задачи (1) не учитывается целевая функция этой задачи, т. е.

$$c = 0. \tag{34}$$

Положим

$$\beta_0 = 1, \quad \beta_k = \prod_{\tau=0}^{k-1} (1 - \lambda_\tau), \quad k = 1, 2, \dots . \tag{35}$$

Из (24) следует, что пара x^k, β^k будет составлять допустимое решение расширенной задачи (27).

Производная по любому направлению из R^m целевой функции Φ_k задачи (15) в точке u^k должна быть равна нулю. Используя в качестве такого направления сам вектор u^k, с учетом условия (34), получаем

$$\sum_{j=1}^{m} d_j^k \left(g_j^k\right)^2 = \sum_{i=1}^{m} r_i^k u_i^k.$$

Поскольку $s^k \neq 0$ и в силу (13), $g^k \neq 0$, то это равенство означает, что

$$\sum_{i=1}^{m} r_i^k u_i^k > 0.$$

Учитывая (24), (33), получаем, что

$$\sum_{i=1}^{m} r_i^0 u_i^k > 0.$$

Положим

$$v^k = \frac{1}{\sum\limits_{i=1}^{m} r_i^0 u_i^k} u^k, \quad k = 0, 1, 2, \dots . \tag{36}$$

В последующих пунктах этой статьи будет дано доказательство следующего утверждения.

Теорема. *Пусть для вычислительного процесса из п. 1 не происходит ввода в область допустимых решений исходной задачи* (1) *за конечное число итераций, т. е. выполняются соотношения* (33). *При этом выполняется условие* (34) *и условие невырожденности расширенной задачи* (27). *Тогда при* $k \to \infty$ *последовательность пар* x^k, β_k *сходится линейно к некоторым значениям* $\bar{x}$, $\bar{\beta}$, *являющимися оптимальными решениями расширенной задачи* (27) *с минимальным набором активных ограничений. Причем этот набор не пуст,* $J_0(\bar{x}) \neq \emptyset$. *Векторы* v^k *сходятся линейно при* $k \to \infty$ *к относительно внутренней точке оптимальных решений задачи* (29)–(31).

Замечание. Согласно сформулированной теореме, если для решения x из ri$X$ все компоненты ненулевые, $J_0(x) = \emptyset$, то изложенный в п. 1 процесс должен приводить через конечное число итерации к решению $x^k \in \mathrm{ri}X$.

3. Сходимость к оптимальному решению

Из (33), (35) следует, что величины β_k образуют убывающую последовательность положительных чисел. Следовательно, существует

$$\bar{\beta} = \lim_{k\to\infty} \beta_k, \tag{37}$$

причем $\bar{\beta} \geq 0$.

Из (24), (35) имеем

$$r^k = \beta_k r^0, \quad k = 0, 1, 2 \dots . \tag{38}$$

Поэтому

$$\lim_{k\to\infty} r^k = \bar{r} \tag{39}$$

при

$$\bar{r} = \bar{\beta} r^0. \tag{40}$$

Докажем теперь сходимость последовательности векторов x^k.

Эквивалентный вычислительный процесс. Положим

$$\tilde{s}^k = \frac{1}{\beta_k} s^k, \qquad \tilde{\lambda}_k = \beta_k \lambda_k. \tag{41}$$

Итеративный переход (3) равносилен следующему:

$$x^{k+1} = x^k + \tilde{\lambda}_k \tilde{s}_k, \quad k = 0, 1, 2 \dots . \tag{42}$$

Из (4), (34), (38), (41) следует, что вектор $\tilde{s}^k$ является результатом решения задачи:

$$\sum_{j=1}^{n} (s_j)^2 / d_j^k \to \min, \qquad As = r^0. \tag{43}$$

Из (6), (42), (43) следует

$$r^{k+1} = r^k - \tilde{\lambda}_k r^0, \quad k = 0, 1, 2, \dots . \tag{44}$$

Поэтому

$$r^k = r^0 - \sum_{i=0}^{k-1} \tilde{\lambda}_i r^0. \tag{45}$$

В силу (37), (40) ряд $\sum \tilde{\lambda}_\tau$ — сходящийся,

$$\sum_{\tau=0}^{\infty} \tilde{\lambda}_\tau = 1 - \bar{\beta}. \tag{46}$$

Доказательство приводимого ниже вспомогательного утверждения имеется в работах [3–5].

Лемма 1. *В любом линейном многообразии L из R^n существует ограниченная область $Q\,(L)$, которой при любых значениях заданных весовых коэффициентов $h_j > 0$, $j = 1, \ldots, n$, принадлежит вектор*

$$y(h) = \arg\min\left\{\sum_{j=1}^{n} h_j\,(y_j)^2 : \quad y \in L\right\}.$$

Из леммы 1, поскольку в задаче (43) $d_j^k > 0$ для всех j и всех k, следует, что при некотором $M_3 > 0$:

$$\left|\tilde{s}_j^k\right| \le M_3, \quad j = 1, \ldots, n, \quad k = 0, 1, 2, \ldots\,. \tag{47}$$

Этот факт и (46) влекут сходимость последовательности векторов x^k в итеративном процессе (42). Существует

$$\bar{x} = \lim_{k\to\infty} x^k. \tag{48}$$

Поскольку $x^k > 0$ для всех k, то $\bar{x} \ge 0$. Из (6), (39), (40) следует, что вектор $\bar{x}$ и величина $\bar{\beta}$ составляют допустимое решение задачи (27).

Из сходимости x^k следует ограниченность множества этих векторов. Этот факт позволяет обобщить условие (12) на всю область значений компонент векторов x^k. Итак, считаем, что при некотором $M_2 > 0$:

$$d_j^k \le M_2 x_j^k, \quad j = 1, \ldots, n, \quad k = 0, 1, 2, \ldots\,. \tag{49}$$

В полученном доказательстве сходимости векторов x^k условия (8)–(10) для выбора весовых коэффициентов в полной мере не использовались. Использовался только факт положительности значений d_j^k. Докажем теперь, используя (49), что вектор $\bar{x} > 0$ и величина $\bar{\beta}$ образуют стационарное решение задачи (27).

Еще один эквивалентный вариант описания вычислительного процесса. Пусть вектор z^k и величина α_k составляют оптимальное решение задачи:

$$\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} (z_j)^2 / d_j^k - \alpha \to \min, \quad Az - \alpha r^0 = 0. \tag{50}$$

Из (43) следует

$$z^k = \alpha_k \tilde{s}^k, \quad k = 0, 1, 2, \ldots\,. \tag{51}$$

Согласно (42), при

$$\rho_k = \tilde{\lambda}_k / \alpha_k \tag{52}$$

справедливо соотношение

$$x^{k+1} = x^k + \rho_k z^k, \quad k = 0, 1, 2, \ldots\,. \tag{53}$$

Из сходимости величин $\tilde{\lambda}_k$ к нулю при $k \to \infty$, в силу (46) и выражения (52), следует

$$\lim_{k\to 0} \rho_k \alpha_k = 0. \tag{54}$$

Отметим, что согласно (41), (51), (52),

$$z^k = (\alpha_k/\beta_k)\, s^k, \quad \rho_k = (\beta_k/\alpha_k)\, \lambda_k. \tag{55}$$

Из (19), (21), (33) следует

$$\rho_k = \gamma \min \left\{ \frac{-x_j^k}{z_j^k} : \quad j \in J_- \left(z^k \right) \right\}. \tag{56}$$

Двойственная к (50) задача. Пусть y^k, υ^k — векторы из R^n, R^m являются решением следующей задачи оптимизации:

$$\frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} d_j^k \left(y_j \right)^2 \to \min \tag{57}$$

при условиях

$$y - A^\top \upsilon = 0, \tag{58}$$

$$\sum_{i=1}^{m} r_i^0 \upsilon_i = 1. \tag{59}$$

Задача (57)–(59) является двойственной к задаче (50). Вектор υ^k состоит из множителей Лагранжа ограничений задачи (50). В свою очередь вектор z^k состоит из множителей Лагранжа ограничений (58). Величина α_k является множителем Лагранжа условия (59). Из (15), (34) следует, что введенный здесь вектор υ^k в качестве составляющей решения задачи (57)–(59) будет тем же вектором υ^k, который был определен в (36).

Из условий оптимальности для задач (50) и (57)–(59) вытекают равенства:

$$z_j^k = d_j^k y_j^k, \quad j = 1, \ldots, n, \tag{60}$$

$$\sum_{j=1}^{n} \left(z_j^k \right)^2 / d_j^k = \alpha_k, \tag{61}$$

$$\sum_{j=1}^{n} d_j^k \left(y_j^k \right)^2 = \alpha_k, \quad k = 0, 1, 2, \ldots . \tag{62}$$

Из леммы 1, примененной к задаче (57)–(59), следует ограниченность векторов y^k. При некотором $M_4 > 0$:

$$\left| y_j^k \right| \le M_4, \quad j = 1, \ldots, n, \quad k = 0, 1, 2, \ldots . \tag{63}$$

В силу (60)

$$\frac{\left| z_j^k \right|}{d_j^k} \le M_4, \quad j = 1, \ldots, n. \tag{64}$$

Из (49) получаем

$$\frac{x_j^k}{\left| z_j^k \right|} \ge \frac{1}{M_2 M_4}, \quad j = 1, \ldots, n. \tag{65}$$

Согласно (56),

$$\rho_k \ge \frac{\gamma}{M_2 M_4}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots . \tag{66}$$

Поэтому из (54) следует

$$\lim_{k \to \infty} \alpha_k = 0. \tag{67}$$

Согласно (62),

$$\lim_{k \to \infty} \sum d_j^k \big(y_j^k\big)^2 = 0. \tag{68}$$

Поскольку все компоненты векторов x^k при всех k положительные, то существует $\varepsilon > 0$, при котором для всех $k = 0, 1, 2, \ldots$:

$$x_j^k \ge \varepsilon, \quad j \in J\big(\bar{x}\big). \tag{69}$$

Из (8) следует, что при некотором $\varepsilon > 0$:

$$d_j^k \ge \varepsilon, \quad j \in J\big(\bar{x}\big), \quad k = 0, 1, 2, \ldots . \tag{70}$$

Из (68) вытекает

$$\lim_{k \to \infty} y_j^k = 0, \quad j \in J\big(\bar{x}\big). \tag{71}$$

Из (18), (58), (63) следует, что векторы υ^k находятся также в некотором ограниченном множестве. Следовательно, их предельные значения при $k \to \infty$ существуют и образуют ограниченное множество. Пусть $\bar{\upsilon}$ — одно из предельных значений векторов υ^k при $k \to \infty$ для некоторой последовательности номеров итераций. Обозначим через $\bar{y}$ предельное значение для этой же последовательности номеров итераций при $k \to \infty$ векторов y^k.

Векторы $\bar{y}$, $\bar{\upsilon}$ удовлетворяют условиям (58), (59), поскольку им удовлетворяют все пары векторов y^k, υ^k. При этом в силу (71) для вектора $\bar{\upsilon}$ будет выполняться условие стационарности (31) при $x = \bar{x}$, $\beta = \bar{\beta}$. Следовательно, $\bar{x}$, $\bar{\beta}$ — стационарное решение задачи (27).

Из условия невырожденности задачи (27) следует, что существуют единственные значения пределов последовательности векторов υ^k и y^k. Итак,

$$\lim_{k \to \infty} \upsilon^k = \bar{\upsilon}, \tag{72}$$

$$\lim_{k \to \infty} y^k = \bar{y}. \tag{73}$$

Предположим, что для $\bar{\upsilon}$ не выполняется условие (29), т. е. $J_+(\bar{y}) \ne 0$. В силу (71):

$$J_+(\bar{y}) \subseteq J_0\left(\bar{x}\right). \tag{74}$$

Согласно (60), (73), для $j \in J_+(\bar{y})$, начиная с некоторой итерации, на всех последующих $z_j^k > 0$. Из (53) следует, что величины x_j^k при $j \in J_+(\bar{y})$ не будут сходиться к нулю, что противоречит (74). Полученное противоречие доказывает ошибочность предположения.

Итак, векторы $\bar{x}$, $\bar{\beta}$ образуют оптимальное решение задачи (27), вектор $\bar{\upsilon}$ является оптимальным решением двойственной задачи (28)–(30).

4. Линейная сходимость к относительно внутренним точкам оптимальных решений

В приведенном доказательстве сходимости к оптимальному решению вместо условия (10) на выбор весовых коэффициентов использовалось пока только более слабое условие (12). Докажем теперь, используя (10), что $\bar{x}$, $\bar{\beta}$ составляют оптимальное решение задачи (27) с минимальным набором активных ограничений. Вектор $\bar{v}$ является относительно внутренней точкой оптимальных решений двойственной задачи (28)–(30). Для этого требуется доказать выполнение условия дополняющей нежесткости в строгой форме (32), т. е. равенства

$$J(\bar{x}) = J_0(\bar{y}). \tag{75}$$

Докажем также, что последовательности векторов x^k и v^k сходятся к своим предельным значениям не медленней, чем линейно. А именно, установим, что при некоторых $M_5 > 0$, $M_6 > 0$, $\sigma \in (0,1)$ выполняются неравенства:

$$\left\|x^k - \bar{x}\right\| \le M_5(\sigma)^k, \tag{76}$$

$$\left\|u^k - \bar{u}\right\| \le M_6\left\|x^k - \bar{x}\right\|. \tag{77}$$

Для доказательства (75) нам потребуется следующее вспомогательное утверждение.

Лемма 2. *Рассматривается последовательность величин $\delta_k > 0$, $k = 0,1,2,\dots$, сходящихся при $k \to \infty$ к некоторому значению $\bar{\delta} \ge 0$. Пусть*:
1) *величины $(\delta_k - \delta_{k+1})$ сходятся к нулю не медленней, чем линейно*:

$$|\delta_k - \delta_{k+1}| \le M\,(\omega)^k, \quad k = 0,1,2,\dots, \tag{78}$$

при некоторых $M > 0$, $\omega \in (0,1)$;
2) *величины $(\delta_k - \delta_{k+1})/\delta_k$ сходятся к нулю при $k \to \infty$.*

Тогда $\bar{\delta} > 0$.

Доказательство. Согласно второму условию леммы, при любом $\varepsilon > 0$ существует k_0 такое, что при всех $k \ge k_0$:

$$|\delta_k - \delta_{k+1}| \le \varepsilon\delta_k. \tag{79}$$

Предположим, что $\bar{\delta} = 0$. Тогда из (78) и формулы суммы ряда геометрической прогрессии следует

$$\delta_k = \sum_{\tau=k}^{\infty}(\delta_\tau - \delta_{\tau+1}) \le \sum_{\tau=k}^{\infty}|\delta_\tau - \delta_{\tau+1}| \le M\frac{1}{1-\omega}\,(\omega)^k, \quad k = 0,1,2,\dots .$$

Учитывая (79), получаем

$$|\delta_k - \delta_{k+1}| \le M\left(\frac{\varepsilon}{1-\omega}\right)^t(\omega)^k, \quad k \ge k_0, \tag{80}$$

при $t = 1$.

Используя вместо (78) неравенство (80) и повторяя рассуждения, получим (80) для $t + 1$. Следовательно, (80) справедливо при любом натуральном t.

Величину ε можно взять меньше, чем $(1-\omega)$. Тогда при $t \to \infty$ величина, стоящая в правой части неравенства (80), сходится к нулю. Следовательно, при $k \ge k_0$:

$$\delta_k - \delta_{k+1} = 0,$$

т. е. $\bar{\delta} = \delta_k$ и поэтому $\bar{\delta} > 0$. Что противоречит предположению. Лемма 2 доказана. □

Теперь перейдем к обоснованию (75)–(77). Для облегчения восприятия будем нумеровать отдельные фрагменты доказательства.

1. Отметим, что $J(\bar{y}) \neq \emptyset$. Это следует из (18) и из того, что для векторов $\bar{\upsilon}$, $\bar{y}$ выполняются условия (29), (58), (59). Согласно (29), (58), $J(\bar{y}) = J_-(\bar{y})$.

Введем обозначения:

$$j(k) = \arg\min \left\{ \frac{-x_j^k}{z_j^k} : \ \ j \in J_-\big(z^k\big) \right\},$$

$$l(k) = \arg\max \Big\{ d_j^k : \ \ j \in J(\bar{y}) \Big\}, \quad L_k = d_{l(k)}^k,$$

$$h_k = \max \Big\{ \big|y_j^k\big| : \ \ j \in J(\bar{y}) \Big\},$$

$$t(k) = \arg\max \Big\{ x_j^k : \ \ j \in J(\bar{y}) \Big\}, \quad T_k = x_{t(k)}^k.$$

Докажем, что при некотором $M_7 > 0$:

$$\big\|\upsilon^k - \bar{\upsilon}\big\| \leq M_7 h_k, \quad k = 0, 1, 2, \ldots . \tag{81}$$

Предположим, что (81) не выполняется. Тогда должна существовать бесконечная подпоследовательность номеров итераций k такая, что при всех $j \in J(\bar{y})$, при $k \in K$, $k \to \infty$:

$$\frac{y_j^k}{\|\upsilon^k - \bar{\upsilon}\|} \to 0. \tag{82}$$

Согласно (58), (71)–(73), $y_j^k = y_j^k - \bar{y}_j = \sum_{i=1}^m \alpha_{ij}\big(\upsilon_i^k - \bar{\upsilon}_i\big)$, $j \in J_0(\bar{y})$, где α_{ij} — коэффициенты матрицы A.

Из (82) получаем, что любая предельная точка векторов при $k \in K$, $k \to \infty$:

$$\tilde{\upsilon}^k = \frac{1}{\|\upsilon^k - \bar{\upsilon}\|}\big(\upsilon^k - \bar{\upsilon}\big)$$

будет нетривиальным (не равным нулевому вектору) решением следующей системы уравнений относительно $\upsilon \in R^m$:

$$\sum_{i=1}^m r_i^0 \upsilon_i = 0, \quad \sum_{i=1}^m \alpha_{ij} \upsilon_i = 0, \quad j \in J_0(\bar{y}).$$

Наличие ненулевого решения у этой системы противоречит невырожденности решения $\bar{x}$, $\bar{\beta}$. Действительно, если $\tilde{\upsilon}$ нетривиальное решение указанной системы, то с вектором $\upsilon' = \bar{\upsilon} + \varepsilon\tilde{\upsilon}$, где ε — некоторая малая величина, так же как и с вектором $\bar{\upsilon}$, будут выполняться условия (29)–(31) при $x = \bar{x}$. Предположение не верно. Неравенство (81) установлено.

Так как $y^k - \bar{y} = A^\top(\upsilon^k - \bar{\upsilon})$, то из (81) следует

$$\left\|y^k - \bar{y}\right\| \le M_8 h_k, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, \tag{83}$$

при $M_8 = M_7 \|A\|$.

2. Поскольку векторы $\bar{\upsilon}$, $\bar{y}$ удовлетворяют условиям задачи (57)–(59), то

$$\sum_{j=1}^{n} d_j^k \left(y_j^k\right)^2 \le \sum_{j \in J(\bar{y})} d_j^k \, (\bar{y}_j)^2.$$

Следовательно,

$$\sum_{j \in J_0(\bar{y})} d_j^k \left(y_j^k\right)^2 \le \sum_{j \in J(\bar{y})} d_j^k \left(\bar{y}_j + y_j^k\right)\left(\bar{y}_j - y_j^k\right).$$

Используя ограниченность величин d_j^k и (83), имеем $h_k^2 \le M_9 L_k h_k$ при некотором $M_9 > 0$, т. е. $h_k \le M_9 L_k$, $k = 0, 1, 2, \ldots$.

Из (81), (83) следует при $M_{10} = M_7 M_4$, $M_{11} = M_8 M_9$:

$$\left\|\upsilon^k - \bar{\upsilon}\right\| \le M_{10} L_k, \tag{84}$$

$$\left\|y^k - \bar{y}\right\| \le M_{11} L_k, \quad k = 0, 1, 2, \ldots . \tag{85}$$

3. Отметим, что, начиная с некоторой итерации k_0, для всех $k \ge k_0$ выполняются неравенства:

$$\bar{\varepsilon} \ge \left|y_j^k\right| \ge \underline{\varepsilon}, \quad j \in J(\bar{y}), \tag{86}$$

где

$$\underline{\varepsilon} = \frac{1}{2} \min_{j \in J(\bar{y})} |\bar{y}_j|, \quad \bar{\varepsilon} = 2 \max_{j \in J(\bar{y})} |\bar{y}_j|.$$

4. Для любого $j \in J_0(\bar{y})$ выполняется соотношение

$$\lim_{k \to \infty} \left(\frac{y_j^k}{L_k} \frac{d_j^k}{x_j^k} \frac{x_{l(k)}^k}{y_{l(k)}^k}\right) = 0. \tag{87}$$

Действительно, первый сомножитель в выражении под знаком предела ограничен по абсолютной величине в силу (85). Второй сомножитель ограничен в силу (49). Третий сомножитель при $k \to \infty$ сходится к нулю. Величины $x_{l(k)}^k$ сходятся к нулю, так как $l(k) \in J(\bar{y})$, $J(\bar{y}) \subseteq J_0(\bar{x})$. Величины $\left|y_{l(k)}^k\right|$ не меньше $\underline{\varepsilon}$.

5. Из (60) и определения L_k имеем

$$\frac{y_j^k}{L_k} \frac{d_j^k}{x_j^k} \frac{x_{l(k)}^k}{y_{l(k)}^k} = \frac{z_j^k}{x_j^k} \frac{x_{l(k)}^k}{z_{l(k)}^k}, \quad j = 1, \ldots, n. \tag{88}$$

Причем согласно (60), (86), величины $z_{l(k)}^k$ должны быть отрицательными при $k \ge k_0$. Поэтому из (87) вытекает, что, начиная с некоторой итерации $k_1 \ge k_0$, для всех $k \ge k_1$:

$$0 < \frac{-x_{l(k)}^k}{z_{l(k)}^k} \le \frac{x_j^k}{\left|z_j^k\right|}, \quad j \in J_0(\bar{y}).$$

Это означает, что на итерации $k \ge k_1$ значение в формуле (56) ρ_k реализуется только на номерах из множества $J(\bar{y})$, которому принадлежат на этих итерациях номера $l(k)$. Итак, доказано, что при всех $k \ge k_1$:

$$j(k) \in J(\bar{y}). \tag{89}$$

6. Из определения $t(k)$ и (89) следует, что при $k \geq k_1$:

$$\left(x^k_{j(k)}/x^k_{t(k)}\right) \leq 1. \tag{90}$$

Заметим, из выполнения (10) при некотором $\varepsilon > 0$ следует, что это условие выполняется и для $\varepsilon = 1$ при некотором $M_1 \geq 1$. Следовательно, для $k \geq k_1$:

$$\frac{\bar{\sigma}\left(x^k_{j(k)}\right)}{\underline{\sigma}\left(x^k_{t(k)}\right)} \leq M_1 \frac{x^k_{j(k)}}{x^k_{t(k)}}. \tag{91}$$

По условию (8) для всех k:

$$\frac{d^k_{j(k)}}{d^k_{t(k)}} \leq \frac{\bar{\sigma}\left(x^k_{j(k)}\right)}{\underline{\sigma}\left(x^k_{t(k)}\right)}. \tag{92}$$

Из (91), (92) получаем для $k \geq k_1$:

$$\frac{x^k_{j(k)}}{x^k_{t(k)}} \frac{d^k_{t(k)}}{d^k_{j(k)}} \geq \frac{1}{M_1}. \tag{93}$$

7. Из (53), (56) имеем для всех $j = 1, \ldots, n$, $k = 0, 1, 2, \ldots$:

$$\frac{x^{k+1}_j}{x^k_j} = 1 - \gamma \frac{x^k_{j(k)} z^k_j}{z^k_{j(k)} x^k_j}.$$

Отсюда при $j = t(k)$ с учетом (60), (86), (91) имеем для $k \geq k_1$:

$$\frac{x^{k+1}_{t(k)}}{x^k_{t(k)}} \leq 1 - \frac{\gamma \underline{\varepsilon}}{\bar{\varepsilon} M_1}. \tag{94}$$

Поскольку при $j \in J(\bar{y})$, $k \geq k_1$ величины z^k_j отрицательные, то величины x^k_j монотонно убывают. Следовательно, монотонно убывают и величины T_k. Пусть τ — число номеров в наборе $J(\bar{y})$. Номер $t(k)$, как минимум через это число τ, повторяется. Из (94) получаем неравенство для $k \geq k_1$:

$$T_{k+\tau} \leq (1 - \tilde{\gamma})\, T_k, \tag{95}$$

где

$$\tilde{\gamma} = \frac{\gamma \underline{\varepsilon}}{\bar{\varepsilon} M_1}.$$

Неравенство (95) означает, что величина T_k и, следовательно, величины x^k_j для всех $j \in J(\bar{y})$ сходятся к нулю не медленней, чем линейно. Из (49), определения L_k, (84), (85) получаем такую же оценку скорости сходимости к нулю величин: L_k, $\|v^k - \bar{v}\|$, $\|y^k - \bar{y}\|$.

8. Поскольку $z^k_{l(k)} < 0$ при $k \geq k_1$, то из (53), (60) и определения L_k имеем при $k \geq k_1$, $j \in J_0(\bar{y})$:

$$\left|x_j^{k+1} - x_j^k\right| = \left|\rho_k z^k\right| \le \frac{\left|y_j^k\right|}{L_k} \frac{d_j^k}{\left|y_{l(k)}^k\right|} x_{l(k)}. \tag{96}$$

Первый сомножитель в правой части этого неравенства ограничен в силу (85). Вектор d^k ограничены в силу (49) и ограниченности векторов x^k. Величины $|y_{l(k)}^k|$ не меньше, чем $\underline{\varepsilon}$ согласно (86). Поэтому второй сомножитель также ограничен. Так как $l(k) \in J(\bar{y})$, то, как было установлено выше, величина в правой части неравенства (96) сходится к нулю не медленнее, чем линейно.

Итак, доказано, что все компоненты вектора x_j^k сходятся к своим предельным значениям не медленней, чем линейно, т. е. неравенство (76) доказано.

Перейдем теперь к доказательству (75). Для этого мы должны доказать, что величины $\hat{x}_j$ положительные для $j \in J_0(\bar{y})$. Воспользуемся леммой 2. Первое условие леммы 2 выполняется в силу (76).

Поделим левую и правую части неравенства (96) на x_j^k. Получим следующее неравенство для $j \in J_0(\bar{y})$, $k \ge k_1$:

$$\frac{\left|x_{k+1}^j - x_k^j\right|}{x_k^j} \le \frac{\left|y_k^j\right|}{L_k} \frac{d_k^j}{x_k^j} \frac{x_k^{l(k)}}{\left|y_k^{l(k)}\right|}.$$

Выражение в правой части этого неравенства совпадает с абсолютным значением выражения под знаком предела в (87). Следовательно, величина в левой части этого неравенства сходится к нулю. Это означает выполнение второго условия леммы 2. Следовательно, $\bar{x}_j > 0$ для всех $j \in J_0\,(\bar{y})$. Равенство (75) доказано.

Для завершения доказательства осталось установить справедливость неравенства (77). Оно имеет место при $M_6 = M_2 M_{10}$. Действительно, используя (84), затем (49) и соотношение $l(k) \in J_0(\bar{x})$, имеем

$$\left\|v^k - \bar{v}\right\| \le M_{10} L_k = M_{10} d_k^{l(k)} \le M_{10} M_2 x_k^{l(k)} \le M_{10} M_2 \left\|x^k - \bar{x}\right\|.$$

Литература

1. **Дикин И.И., Зоркальцев В.И.** Итеративное решение задач математического программирования: алгоритмы метода внутренних точек. — Новосибирск: Наука, 1980.
2. **Дикин И.И.** О сходимости одного итерационного процесса // Управляемые системы. — Новосибирск, ИМ СО АН СССР. — 1974. — Вып. 12. — С. 54–60.
3. **Зоркальцев В.И.** Метод относительно внутренних точек. — Сыктывкар: Коми филиал АН СССР, 1984. — (Сер. препринтов “Автоматизация научных исследований”, вып. 7.)
4. **Зоркальцев В.И.** Методы прогнозирования и анализа эффективности функционирования системы топливоснабжения. — М.: Наука, 1988.
5. **Зоркальцев В.И.** Класс алгоритмов внутренних точек // Журн. вычисл. матем. и мат. физики. — 2004. — Т. 49, № 12. — С. 1–18.
6. **Анцыз С.М., Дикин И.И.** Об одном численном методе решения задачи линейного программирования в некоторых ее обобщений // Управляемые системы. — Новосибирск, ИМ СО АН СССР. — 1969. — Вып. 3. — С. 54–56.
7. **Евтушенко Ю.Г., Жадан В.Г.** Релаксационный метод решения задач нелинейного программирования // Журн. вычисл. матем. и мат. физики. — 1977. — Т. 17, № 4. — С. 890–904.
8. **Vanderbei R.J., Meketon M.S., and Freedman B.A.** Modification of Karmarkar's linear programming algorithm // Algorithmika. — 1986. — № 1. — P. 395–407.

9. **Barnes E.R.** A variation on Karmarkar's algorithm for solving linear problems // Mathematical Programming. — 1986. — Vol. 36. — P. 174–182.
10. **Alder I., Rende M.G., and Veiga G.** An implementation of Karmarkar's algorithm for linear programming // Mathematical Programming. Ser. A. — 1989. — Vol. 44, № 3. — P. 297–335.
11. **Monma C.L., Morton A.J.** Computational experience with a dual affino variant of Karmarkar's method for linear programming // Operations Research Letters. — 1987. — Vol. 6, iss. 6. — P. 261–267.
12. **Рокафеллар Р.** Выпуклый анализ. — М.: Мир, 1973.

Поступила в редакцию 28 ноября 2015 г.,
в окончательном варианте 23 декабря 2015 г.

Литература в транслитерации

1. **Dikin I.I., Zorkal'tsev V.I.** Iterativnoe reshenie zadach matematicheskogo programmirovaniya: algoritmy metoda vnutrennikh tochek. — Novosibirsk: Nauka, 1980.
2. **Dikin I.I.** O skhodimosti odnogo iteratsionnogo protsessa // Upravlyaemye sistemy. — Novosibirsk, IM SO AN SSSR. — 1974. — Vyp. 12. — S. 54–60.
3. **Zorkal'tsev V.I.** Metod otnositel'no vnutrennikh tochek. — Syktyvkar: Komi filial AN SSSR, 1984. — (Ser. preprintov "Avtomatizatsiya nauchnykh issledovaniy", vyp. 7.)
4. **Zorkal'tsev V.I.** Metody prognozirovaniya i analiza effektivnosti funktsionirovaniya sistemy toplivosnabzheniya. — M.: Nauka, 1988.
5. **Zorkal'tsev V.I.** Klass algoritmov vnutrennikh tochek // Zhurn. vychisl. matem. i mat. fiziki. — 2004. — T. 49, № 12. — S. 1–18.
6. **Antsyz S.M., Dikin I.I.** Ob odnom chislennom metode resheniya zadachi lineynogo programmirovaniya v nekotorykh ee obobshcheniy // Upravlyaemye sistemy. — Novosibirsk, IM SO AN SSSR. — 1969. — Vyp. 3. — S. 54–56.
7. **Evtushenko Yu.G., Zhadan V.G.** Relaksatsionnyy metod resheniya zadach nelineynogo programmirovaniya // Zhurn. vychisl. matem. i mat. fiziki. — 1977. — T. 17, № 4. — S. 890–904.
8. **Vanderbei R.J., Meketon M.S., and Freedman B.A.** Modification of Karmarkar's linear programming algorithm // Algorithmika. — 1986. — № 1. — P. 395–407.
9. **Barnes E.R.** A variation on Karmarkar's algorithm for solving linear problems // Mathematical Programming. — 1986. — Vol. 36. — P. 174–182.
10. **Alder I., Rende M.G., and Veiga G.** An implementation of Karmarkar's algorithm for linear programming // Mathematical Programming. Ser. A. — 1989. — Vol. 44, № 3. — P. 297–335.
11. **Monma C.L., Morton A.J.** Computational experience with a dual affino variant of Karmarkar's method for linear programming // Operations Research Letters. — 1987. — Vol. 6, iss. 6. — P. 261–267.
12. **Rokafellar R.** Vypuklyy analiz. — M.: Mir, 1973.