

## ИЗУЧЕНИЕ ВРЕМЕННЫХ ИЗМЕНЕНИЙ НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ ГЕОСРЕДЫ В ПРОЦЕССЕ РАЗРУШЕНИЯ

**В.Т. Беликов, А.Ф. Шестаков**

*Институт геофизики УрО РАН, 620016, Екатеринбург, ул. Амундсена, 100, Россия*

С использованием уравнений тепломассопереноса в гетерогенной геосреде изучен баланс энергии разрушающегося твердого тела, учитывающий объемную и поверхностную его составляющие. Для твердого тела с трещинами, рассматриваемого как гетерогенная двухфазная среда, выведено соотношение, являющееся аналогом критерия Гриффитса, определяющего условие распространения отдельной трещины. С привлечением его и данных об относительных изменениях удельной внутренней поверхности в процессе разрушения изучены соответствующие изменения свободной энергии деформации и давления в разрушающемся массиве горных пород.

*Разрушение, баланс энергии, гетерогенная среда, поверхностная энергия, напряженное состояние и его изменение в процессе разрушения.*

### TIME-DEPENDENT STRESS CHANGE DURING FAILURE OF ROCKS

**V. T. Belikov and A. F. Shestakov**

The energy balance of a solid subject to fracture has been explored using heat and mass transfer equations with regard to the volumetric and superficial components. In the suggested model, brittle fracture of a cracked solid considered as a heterogeneous two-phase medium is described by an equation analogous to the Griffith's criterion for propagation of a single crack. The derived equation is used, together with estimates of relative change in specific interface area, to study the respective change of free strain energy and pressure in rocks associated with failure.

*Rock failure, energy balance, surface energy, stress, fracture-related stress change*

---

### ВВЕДЕНИЕ

Проблема изучения временных изменений напряженного состояния в разрушающемся массиве горных пород актуальна как с точки зрения анализа специфических особенностей процесса разрушения в природной геосреде, так и выявления критериев, определяющих возможный характер (эволюционный или катастрофический) его развития. Умение прогнозировать тот или иной сценарий протекания процессов разрушения и определять условия реализации каждого из них позволяет вплотную подойти к предсказанию катастрофических событий типа горных ударов и землетрясений. Естественно, что осуществить это можно только в том случае, когда имеются индикаторы деструктивных процессов. При их изучении удается восстановить характер временных изменений тех структурно-петрофизических параметров геосреды, которые в первую очередь влияют на реализацию того или иного режима развития процесса разрушения. Одним из таких индикаторов являются газы радиогенной природы, например радон. В настоящее время установлено, что временные аномалии концентрации радона связаны с разрушением и часто предшествуют наступлению катастрофических событий [Гидрогеохимические предвестники..., 1985]. В работах [Беликов, Шестаков, 1997а,б] была предложена количественная физическая модель миграции радона в разрушающейся геосреде. Полученные уравнения были использованы для интерпретации временных аномалий концентрации радона, зарегистрированных в глубоких шахтах. В результате построены временные зависимости относительных величин открытой пористости и удельной внутренней поверхности (УВП) в процессе разрушения. Эти данные, а также количественная модель для описания разрушающегося массива горных пород, рассматриваемая ниже, были положены в основу предлагаемой в работе методики оценки относительных временных изменений напряженного состояния разрушающейся геосреды.

### ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ВЫВОД ОСНОВНЫХ СООТНОШЕНИЙ

Твердое тело (геосреда), в котором происходят процессы разрушения, является гетерогенным по своей природе и состоит по крайней мере из двух фаз. В силу наличия межфазных поверхностей, имеющих достаточно большую площадь, поверхностная энергия разрушающегося твердого тела может составлять значительную долю его полной энергии. По мере развития процессов разрушения в геосреде меняется и

ее поверхностная энергия. На тот факт, что последняя играет важную роль в процессах разрушения, одним из первых обратил внимание А.А. Гриффитс [Griffith, 1920], рассматривавший условия, необходимые для распространения отдельной трещины. В последующем этот вопрос неоднократно обсуждался [Качанов, 1974; Черепанов, 1974; Разрушение, 1975; Хеллан, 1988; и др.]. Если считать разрушающееся твердое тело гетерогенным и трактовать процесс разрушения как фазовый переход первого рода [Беликов, 1996], то для изучения развития этих процессов в пространстве и времени следует использовать уравнения, описывающие процессы теплопереноса в гетерогенной геосреде [Беликов, 1991]. При этом в общем балансе энергии следует учитывать также и поверхностную ее часть. В такой постановке объектом изучения будет уже не отдельная трещина и условия ее распространения, а гетерогенная среда с изменяющимися структурными характеристиками, такими как доля объема, занимаемая той или иной фазой и УВП (межфазная поверхность, приходящаяся на единицу объема). Разрушение в этом случае будет рассматриваться уже не как чисто механический, а как физический процесс. При этом будут меняться составляющие энергетического баланса, в котором наряду со слагаемыми, описывающими объемную часть энергии твердого тела, присутствуют члены, учитывающие также и поверхностную энергию.

Целью настоящей работы является, во-первых, анализ уравнения энергетического баланса разрушающегося твердого тела, учитывающего как объемную, так и поверхностную составляющие его энергии и формулировка на его основе критерия, определяющего условия развития процессов разрушения в геосреде. Во-вторых, разработка основанной на этом критерии методики оценки временных относительных изменений свободной энергии деформации и напряженного состояния геосреды в процессе разрушения с привлечением данных о соответствующих изменениях УВП, полученных по результатам интерпретации радоновых измерений.

Рассмотрим объемную часть энергии твердого тела, в котором происходят процессы разрушения. Для простоты примем, что тело является однофазным и однокомпонентным. Таким образом, при изучении процессов разрушения необходимо рассмотреть минимум две фазы: твердую (скелет) и трещинную (флюид), разделенные соответствующей межфазной поверхностью  $S_{\text{ф-ск}}$ , которую считаем гладкой. В дальнейшем символ  $S_{\text{ф-ск}}$  будет применяться и для обозначения величины площади межфазной поверхности в некотором объеме  $V$  (называемом далее объемом осреднения) твердого тела. Уравнение баланса полной объемной энергии произвольной фазы гетерогенной среды было получено в работе [Беликов, 1991]. В соответствии с ее результатами, осредненное уравнение баланса энергии твердой фазы может быть записано так:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \left[ \rho_c \left( E_c + \frac{v_i^{c^2}}{2} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial x_i} \left[ \rho_c \left( E_c + \frac{v_i^{c^2}}{2} \right) v_i^c - (\sigma_{ik}^c + \tau_{ik}^c) v_k^c + J_i^c \right] - \\ & - \frac{1}{V} \int_{S_{\text{ф-ск}}} \rho'_c \left( E'_c + \frac{v_i'^{c^2}}{2} \right) u_i'^{\text{TP}} n_i^c dS - \frac{1}{V} \int_{S_{\text{ф-ск}}} (\sigma'_{ik}{}^c + \tau'_{ik}{}^c) v_k'^c n_i^c dS + \frac{1}{V} \int_{S_{\text{ф-ск}}} J_i^c n_i^c dS = 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Индекс „с“ указывает на принадлежность данной величины к твердой фазе (скелету),  $\rho'_c$ ,  $v_i'^c$ ,  $\sigma'_{ik}{}^c$  и  $\tau'_{ik}{}^c$  — соответственно плотность, скорость, тензоры упругих и вязких напряжений в точке,  $E'_c$  — внутренняя энергия твердой фазы в точке, рассчитанная на единицу массы,  $J_i^c$  —  $i$ -я компонента кондуктивного потока тепла в твердой фазе в точке,  $\rho_c$ ,  $v_i^c$ ,  $E_c$ ,  $\sigma_{ik}^c$ ,  $\tau_{ik}^c$ ,  $J_i^c$  — соответствующие осредненные значения указанных параметров,  $n_i^c$  — единичный вектор нормали, внешней по отношению к твердой фазе,  $V$  — величина объема осреднения,  $u_i'^{\text{TP}}$  —  $i$ -я компонента скорости движения межфазной границы при разрушении, рассматриваемом как фазовый переход из твердого в газообразное состояние [Карслоу, Егер, 1964; Беликов, 1991]. Первые два слагаемых слева в (1) присутствуют и в уравнении баланса энергии гомогенной среды [Румер, Рывкин, 1977], поэтому обсуждение их физического смысла не требуется. Последние три слагаемых являются специфическими и их появление вызвано особенностями гетерогенной среды, а именно наличием межфазной поверхности. Первый интеграл слева описывает потерю энергии (вместе с массой) твердой фазой в результате фазового перехода, обусловленного движением межфазной поверхности  $S_{\text{ф-ск}}$  со скоростью  $u_i'^{\text{TP}}$  внутрь твердого тела (при разрушении). Второй интеграл слева в (1) описывает изменение энергии твердой фазы за счет работы упругих и вязких напряжений, связанной с деформацией межфазной границы. Третий интеграл — это изменение энергии твердой фазы, обусловленное кондуктивным потоком тепла через межфазную поверхность в соседнюю фазу. Аналогичное (1) уравнение с точностью до индексов можно записать и для энергии флюидной (трещинной) фазы, которое мы для краткости выписывать не будем.

Изучим баланс поверхностной энергии в процессе разрушения твердого тела. Как известно, термодинамические величины гетерогенной системы можно представить в виде суммы двух частей — объемной

и поверхностной [Ландау, Лифшиц, 1964; Румер, Рывкин, 1977; Лыков, 1978]. Тогда поверхностный аналог основного термодинамического соотношения будет иметь вид

$$dE_\xi = TdS_\xi + \sigma d\xi, \quad (2)$$

где  $\xi$  — площадь поверхности; этот же индекс указывает на то, что данная величина относится к поверхности. Параметры  $S_\xi$  и  $E_\xi$  — поверхностная энтропия и энергия соответственно,  $\sigma$  — коэффициент поверхностного натяжения,  $T$  — температура. Последнее слагаемое справа в (2) описывает работу  $dR$ , затрачиваемую на обратимое изменение площади поверхности раздела фаз на бесконечно малую величину  $d\xi$ , т. е.  $dR = \sigma d\xi$  [Ландау, Лифшиц, 1964]. Если процесс происходит при постоянной температуре, то в соответствии с (2)  $dR = \sigma d\xi = d(E_\xi - TS_\xi) = dF_\xi$ , где  $F_\xi = E_\xi - TS_\xi$  — поверхностная свободная энергия.

Для дифференциала  $F_\xi$ , согласно (2), имеем соотношение

$$dF_\xi = -S_\xi dT + \sigma d\xi. \quad (3)$$

Подставляя сюда  $\sigma d\xi = d(\sigma\xi) - \xi d\sigma$ , получим

$$d\Phi_\xi = -S_\xi dT - \xi d\sigma, \quad (4)$$

где  $\Phi_\xi = F_\xi - \sigma\xi$  — поверхностный термодинамический потенциал Гиббса. С другой стороны, пользуясь аналогией с объемным потенциалом Гиббса, имеем  $\Phi_\xi = N_\xi \mu_\xi$ , где  $N_\xi$  — число частиц,  $\mu_\xi$  — химический потенциал, приходящийся на одну частицу. Так как для поверхности  $N_\xi = 0$  [Ландау, Лифшиц, 1964], то  $\Phi_\xi = 0$  и тогда

$$F_\xi = \sigma\xi. \quad (5)$$

Поверхностное натяжение анизотропного твердого тела (кристалла) является функцией направления граней. В такой ситуации выражение (5) для  $F_\xi$  должно быть заменено интегралом по поверхности [Ландау, Лифшиц, 1964]. В данной работе этот случай мы рассматривать не будем, считая фазы изотропными. В случае однокомпонентных фаз коэффициент поверхностного натяжения зависит лишь от температуры  $\sigma = \sigma(T)$  [Ландау, Лифшиц, 1964]. Используя (2), можно записать

$$\frac{dE_\xi}{dt} = T \frac{dS_\xi}{dt} + \sigma \frac{d\xi}{dt}. \quad (6)$$

Тогда баланс поверхностной энергии, соответствующий поверхности  $S_{\phi-ck}$ , разделяющей твердую и трещинную фазы в объеме  $V$ , с учетом (6), есть

$$\frac{d}{dt} \int_{S_{\phi-ck}} \varepsilon'_s dS = T \frac{d}{dt} \int_{S_{\phi-ck}} s'_s dS + \sigma \frac{d}{dt} S_{\phi-ck},$$

где  $\varepsilon'_s$  и  $s'_s$  — поверхностные энергия и энтропия соответственно, рассчитанные на единицу поверхности. Разделив последнее соотношение на величину объема осреднения  $V$  и введя среднюю по межфазной поверхности  $S_{\phi-ck}$  поверхностные энергию и энтропию в виде

$$\varepsilon_\Omega = \frac{1}{V\Omega} \int_{S_{\phi-ck}} \varepsilon'_s dS; \quad s_\Omega = \frac{1}{V\Omega} \int_{S_{\phi-ck}} s'_s dS,$$

где

$$\Omega = \frac{1}{V} \int_{S_{\phi-ck}} dS = \frac{S_{\phi-ck}}{V}$$

— УВП твердого тела с трещинами, получим

$$\frac{d}{dt} (\varepsilon_\Omega \Omega) = T \frac{d}{dt} (s_\Omega \Omega) + \sigma \frac{d\Omega}{dt}. \quad (7)$$

Если ввести поверхностные энергию и энтропию единицы объема следующим образом:  $E_\Omega = \varepsilon_\Omega \Omega$  и  $S_\Omega = s_\Omega \Omega$ , то (7) примет вид

$$\frac{dE_\Omega}{dt} = T \frac{dS_\Omega}{dt} + \sigma \frac{d\Omega}{dt}. \quad (8)$$

Поверхностная свободная энергия единицы объема, в соответствии с (5), будет

$$F_{\Omega} = \sigma\Omega. \quad (9)$$

Записав для  $F_{\Omega}$  выражение  $dF_{\Omega} = -S_{\Omega}dT + \sigma d\Omega$ , аналогичное (3), с учетом (9), будем иметь

$$S_{\Omega} = -\left(\frac{\partial F_{\Omega}}{\partial T}\right)_{\Omega} = -\Omega\left(\frac{d\sigma}{dT}\right)_{\Omega}.$$

Далее получим

$$\frac{dS_{\Omega}}{dt} = -\Omega\frac{d}{dt}\left(\frac{d\sigma}{dT}\right)_{\Omega} - \left(\frac{d\sigma}{dT}\right)_{\Omega}\frac{d\Omega}{dt}. \quad (10)$$

Учитывая (10), выражение (8) можно записать так:

$$\frac{dE_{\Omega}}{dt} = -T\Omega\frac{d}{dt}\left(\frac{d\sigma}{dT}\right)_{\Omega} + \left[\sigma - T\left(\frac{d\sigma}{dT}\right)_{\Omega}\right]\frac{d\Omega}{dt}. \quad (11)$$

Это уравнение описывает изменение поверхностной энергии единицы объема твердого тела с трещинами. Когда коэффициент поверхностного натяжения постоянен (или постоянна температура), с учетом (9) имеем

$$\frac{dE_{\Omega}}{dt} = \sigma\frac{d\Omega}{dt} = \frac{d}{dt}(\sigma\Omega) = \frac{dF_{\Omega}}{dt}. \quad (12)$$

Таким образом, в данном случае изменение поверхностной энергии совпадает с изменением свободной поверхностной энергии. В выражение (12) входит производная от  $\Omega$  по времени, которая должна быть определена из кинематических соображений. Чтобы получить уравнение для нее, воспользуемся теоремой Гаусса—Остроградского

$$\int_{s_0} \mathbf{a}n dS = \int_{V_0} \operatorname{div} \mathbf{a} dV,$$

где  $\mathbf{a}$  — некоторый вектор,  $V_0$  — объем, ограниченный поверхностью  $S_0$ ,  $\mathbf{n}$  — единичный вектор внешней по отношению к  $V_0$  нормали. Рассмотрим в качестве  $V_0$  объем, занимаемый твердой фазой в пределах объема осреднения  $V$ , а в роли вектора  $\mathbf{a}$  используем единичный вектор внешней к этому объему нормали  $\mathbf{n}$ . Чтобы использовать теорему Гаусса—Остроградского, необходимо определить вектор  $\mathbf{n}$  в объеме  $V_0$ . В этой связи необходимо отметить следующее. В результате протекания процессов тепломассопереноса в геосреде непрерывно происходит (за счет фазовых переходов и деформаций) движение межфазных границ. Вследствие этого через каждую ее точку в настоящий момент или в прошлом происходило (по крайней мере один раз в момент образования данной фазы, а вообще говоря, неоднократно) перемещение межфазной поверхности. В такой ситуации будем полагать, что вектор единичной нормали совпадает с тем его значением, которое было в данной точке геосреды в момент последнего прохождения через нее межфазной поверхности. Таким образом, поле векторов единичной нормали  $\mathbf{n}$  будет однозначно определено в каждой точке объема  $V_0$  в любой момент времени. Кроме того, если допустить непрерывность вторых производных от функций, описывающих межфазную поверхность  $S_{\Phi-\text{ск}}$ , условия применимости теоремы Гаусса—Остроградского будут выполнены. Итак, имеем

$$\int_{S_0} \mathbf{n}n dS = \int_{S_0} dS = \int_{V_0} \operatorname{div} \mathbf{n} dV. \quad (13)$$

Поверхность  $S_0$ , ограничивающая объем  $V_0$ , равна  $S_0 = S_{\Phi-\text{ск}} + S'_0$ , где  $S'_0$  — часть  $S_0$ , совпадающая с поверхностью объема осреднения, которая фиксирована в пространстве по определению. Таким образом, (13) запишется так:

$$\int_{S'_0} dS + \int_{S_{\Phi-\text{ск}}} dS = \int_{V_0} \operatorname{div} \mathbf{n} dV.$$

Дифференцируя данное соотношение по времени и замечая, что

$$\frac{d}{dt} \int_{S_{\Phi-\text{ск}}} dS = \frac{dS_{\Phi-\text{ск}}}{dt}, \quad \frac{d}{dt} \int_{S'_0} dS = \frac{dS'_0}{dt} = 0,$$

а также учитывая, что величина  $V_0$  как и  $S_{\Phi-ck}$  — меняется, получаем

$$\frac{dS_{\Phi-ck}}{dt} = \int_{V_0} \operatorname{div} \frac{d\mathbf{n}}{dt} dV + \int \operatorname{div} \mathbf{n} \frac{\delta V_0}{\delta t}.$$

Замечая, что  $\delta V_0/\delta t = \mathbf{w}' \cdot \mathbf{n} dS$ , где  $\mathbf{w}'$  — скорость движения поверхности  $S_0$ , а также применяя теорему Гаусса—Остроградского к первому интегралу справа в последнем соотношении, будем иметь

$$\frac{dS_{\Phi-ck}}{dt} = \int_{S_0} \frac{d\mathbf{n}}{dt} \cdot \mathbf{n} dS + \int_{S_{\Phi-ck} + S'_0} \mathbf{w}' \cdot \mathbf{n} \operatorname{div} \mathbf{n} dS.$$

Так как вектор  $\mathbf{n}$  единичный, то  $\mathbf{n}(d\mathbf{n}/dt) = 0$  и первый справа интеграл исчезает. Поделив предыдущее равенство на величину объема осреднения  $V$  и замечая, что на  $S'_0$ ,  $\mathbf{w}'$  равно нулю, а также учитывая, что  $\Omega = S_{\Phi-ck}/V$ , получим

$$\frac{d\Omega}{dt} = \frac{1}{V} \int_{S_{\Phi-ck}} \mathbf{w}' \cdot \mathbf{n} \operatorname{div} \mathbf{n} dS. \quad (14)$$

Введем среднее по площади  $S_{\Phi-ck}$  значение подинтегрального выражения в правой части (14) с точностью до малых более высокого порядка, совпадающее со средним по объему  $V_0$ , следующим образом:

$$\langle \mathbf{w}' \cdot \mathbf{n} \operatorname{div} \mathbf{n} \rangle_{S_{\Phi-ck}} \Omega = \frac{1}{V} \int_{S_{\Phi-ck}} \mathbf{w}' \cdot \mathbf{n} \operatorname{div} \mathbf{n} dS.$$

Обозначим

$$v = \langle \mathbf{w}' \cdot \mathbf{n} \operatorname{div} \mathbf{n} \rangle_{S_{\Phi-ck}},$$

тогда (14) перепишется так:

$$\frac{d\Omega}{dt} = v\Omega. \quad (15)$$

Параметр  $v$  характеризует изменение УВП, обусловленное движением межфазной границы  $S_{\Phi-ck}$ .  
Причем

$$\mathbf{w}' = \mathbf{v}^c + \mathbf{u}'^{TP},$$

где  $\mathbf{v}^c$  — скорость твердой фазы на границе  $S_{\Phi-ck}$  (скорость деформации границы),  $\mathbf{u}'^{TP}$  — введенная выше в (1) скорость движения межфазной поверхности  $S_{\Phi-ck}$  при разрушении, рассматриваемом как фазовый переход. Таким образом, величина  $v$  описывает изменение УВП, вызванное как деформацией твердой фазы (скелета), так и фазовыми переходами.

Рассмотрим физический смысл параметра  $\operatorname{div} \mathbf{n}$  в (14). По определению дивергенции [Фихтенгольц, 1968]

$$\operatorname{div} \mathbf{n} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\int_{\partial V} \mathbf{n} \cdot d\mathbf{S}}{\Delta V} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\int_{\partial V} dS}{\Delta V} = \frac{dS}{dV}.$$

Следовательно,  $\operatorname{div} \mathbf{n}$  совпадает с кривизной [Левич, 1969] и является структурным параметром, определяющим эволюцию топологических свойств межфазной поверхности при ее перемещении. Подставляя (15) в (12), получаем

$$\frac{dE_{\Omega}}{dt} = \frac{dF_{\Omega}}{dt} = v\sigma\Omega. \quad (16)$$

Рассмотрим уравнение баланса всей (объемной и поверхностной) энергии твердого тела (рассматриваемого как двухфазная среда), в котором происходят процессы разрушения. Объемная часть баланса энергии может быть получена суммированием уравнения (1) и аналогичного соотношения для флюидной фазы. Если не учитывать (в общем балансе энергии) энергию флюидной фазы в силу малой плотности последней, уравнение для объемной энергии всей среды будет определяться соотношением (1), которым мы и будем пользоваться в дальнейшем.

Складывая (1) и (16), получим уравнение баланса полной (объемной и поверхностной) энергии разрушающегося твердого тела. Вычитая из него соотношение для баланса кинетической энергии твердой фазы (составленное с использованием ее уравнения движения [Беликов, 1991]) и учитывая, что тензоры  $\sigma_{ik}^c$  и  $\tau_{ik}^c$  — симметричны, а также вводя осредненный тензор скоростей деформации  $v_{ik}^c$  [Ландау, Лифшиц, 1987; Беликов, 1991], получим выражение, описывающее изменение объемной внутренней и поверхностной энергии разрушающегося твердого тела

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} (U_c + E_\Omega) + \frac{\partial}{\partial X_i} (U_c v_i^c) - (\sigma_{ik}^c + \tau_{ik}^c) v_{ik}^c + \frac{\partial J_i^c}{\partial X_i} - \\ & - \frac{1}{V} \int_{S_{\Phi-ск}} U'_c u'_i{}^{np} n_i^c dS + \frac{1}{V} \int_{S_{\Phi-ск}} J_i^c n_i^c dS - \sigma v \Omega = 0, \end{aligned} \quad (17)$$

где  $U'_c = \rho'_c E'_c$  и  $U_c = \rho_c E_c$  — внутренняя энергия в точке и осредненная внутренняя энергия твердой фазы, приходящиеся на единицу объема. Это основное уравнение, описывающее преобразование полной энергии твердого тела (геосреды) при разрушении.

Пренебрежем в (17) слагаемыми, связанными с конвективным потоком внутренней энергии, кондуктивной теплопроводностью, тепловыделением за счет вязкой диссипации, а также функциями источника, обусловленными фазовыми переходами и теплообменом между фазами (оба поверхностных интеграла в (17)), тогда это выражение примет вид

$$\frac{\partial}{\partial t} (U_c + E_\Omega) - \sigma_{ik}^c v_{ik}^c - \sigma v \Omega = 0. \quad (18)$$

В квазистационарном случае, при

$$\frac{\partial}{\partial t} (U_c + E_\Omega) = 0,$$

т. е. тогда, когда скорость изменения объемной части энергии равна взятой с противоположным знаком скорости изменения поверхностной энергии, соотношение (18) переходит в следующее:

$$\sigma_{ik}^c v_{ik}^c + \sigma v \Omega = 0. \quad (19)$$

Первое слагаемое в этом соотношении есть работа, совершаемая за единицу времени упругими силами, равная взятому с противоположным знаком изменению поверхностной энергии. Иными словами, при выполнении соотношения (19) разрушение происходит таким образом, что мощность упругих сил компенсирована работой, затрачиваемой в единицу времени на изменение поверхности.

Соотношение (19) можно рассматривать как аналог энергетического критерия А.А. Гриффитса [Griffith, 1920; Черепанов, 1974; Разрушение, 1975]. Однако в данном случае мы имеем дело не с отдельной трещиной, о чем уже было сказано ранее, а с трещинным пространством, структурной характеристикой которого является удельная внутренняя поверхность. Выражение (18) получено для случая, когда мы пренебрегаем диссипативными явлениями, т. е. фактически предполагаем адиабатичность процесса, при этом  $S_c = \text{const}$ , где  $S_c$  — энтропия твердой фазы, приходящаяся на единицу объема. Если же процесс разрушения происходит при постоянной температуре, то постоянной будет и связанная энергия  $TS_c$ . Тогда

$$\frac{\partial U_c}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} (F_c + TS_c) = \frac{\partial F_c}{\partial t},$$

где  $F_c$  — свободная энергия, приходящаяся на единицу объема. Кроме того, в этих условиях (при  $T = \text{const}$ ,  $\sigma = \text{const}$ ), согласно (12),  $\partial E_\Omega / \partial t = \partial F_\Omega / \partial t$ .

В квазистационарном случае мы можем записать

$$\frac{\partial}{\partial t} (F_c + F_\Omega) = 0. \quad (20)$$

Это же условие можно получить и из (19), если вспомнить, что в изотермическом случае при малых деформациях и скоростях деформации

$$\sigma_{ik}^c v_{ik}^c = \sigma_{ik}^c \frac{du_{ik}^c}{dt} = \sigma_{ik}^c \frac{\partial u_{ik}^c}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} [\sigma_{ik}^c u_{ik}^c] = \frac{\partial F_c}{\partial t}.$$

Учитывая далее, что

$$\sigma v \Omega = \sigma \frac{\partial \Omega}{\partial t} = \frac{\partial F_\Omega}{\partial t}$$



и подставляя это в (19), снова будем иметь (20). Соотношение (20) можно рассматривать как еще один вариант условия (19). Если мощность упругих сил превышает скорость изменения поверхностной энергии, процесс разрушения будет развиваться уже не в квазистационарном режиме. Динамика этого развития будет определяться как внешними (напряженное состояние массива), так и внутренними (структура и текстура горной породы) факторами в силу того, что петрофизические свойства геосреды определяют характер трещинообразования, а следовательно, скорость изменения поверхностной энергии. Процесс разрушения в этом случае будет описываться не условием (19) или (20), а более общим соотношением, получающимся суммированием уравнений (1) и (16). При этом часть энергии упругой деформации будет расходоваться в том числе и на акустическое излучение, возбуждаемое межфазной поверхностью  $S_{\phi-ск}$ . Характер развития процесса разрушения, соответствующий условию (19), (20), когда практически отсутствует акустический импульс, можно (в достаточной степени условно) назвать эволюционным.

Из выражения (20) следует, что в каждой точке области разрушения выполняется соотношение

$$F_c + F_{\Omega} = F_c^0 + F_{\Omega}^0 = \text{const}, \quad (21)$$

где  $F_c^0$  и  $F_{\Omega}^0$  — значения объемной свободной энергии деформации и поверхностной свободной энергии в начальный момент времени соответственно. Учитывая, что, согласно (9),  $F_{\Omega}^0 = \sigma\Omega_0$ ,  $F_{\Omega} = \sigma\Omega$ , где  $\Omega_0$  — начальное значение УВП, перепишем (21) в виде

$$F_c + \sigma\Omega = F_c^0 + \sigma\Omega_0.$$

Отсюда

$$\frac{F_c}{F_c^0} = 1 - A_0 \left( \frac{\Omega}{\Omega_0} - 1 \right), \quad (22)$$

где  $A_0 = \sigma\Omega_0/F_c^0$  — параметр, характеризующий начальное соотношение между поверхностной свободной энергией и свободной энергией деформации в данной точке.

Вообще говоря, величина  $\Omega$  включает в себя как УВП открытых (сообщающихся)  $\Omega^o$ , так и закрытых (изолированных)  $\Omega^3$  пор. Поэтому можно записать

$$\frac{\Omega}{\Omega_0} = \frac{\Omega^o + \Omega^3}{\Omega_0^o + \Omega_0^3}. \quad (23)$$

В том случае, когда мы рассматриваем (как в данной работе) короткопериодические аномалии радона, реализуется ситуация, в которой изолированные поры и трещины имеют достаточно большие размеры, а количество их относительно невелико. Поэтому будем считать, что в начальный момент времени и на протяжении всего процесса разрушения выполняются соотношения  $\Omega_0^3 \ll \Omega_0^o$  и  $\Omega^3 \ll \Omega^o$ . Тогда условие (23) можно записать так:

$$\frac{\Omega}{\Omega_0} = \frac{\Omega^o}{\Omega_0^o},$$

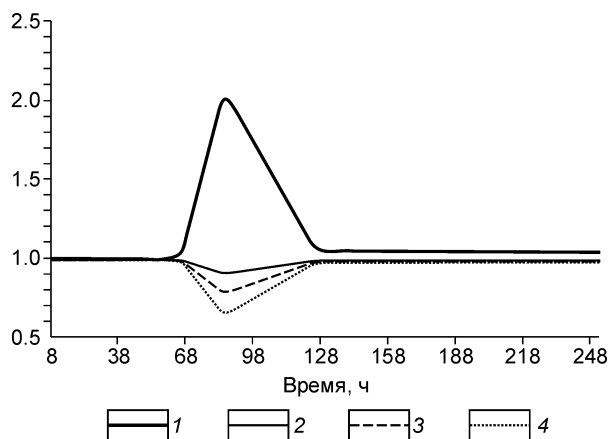
а соотношение (22) примет вид

$$\frac{F_c}{F_c^0} = 1 - A_0 \left( \frac{\Omega^o}{\Omega_0^o} - 1 \right). \quad (24)$$

Равенство (24) — окончательное выражение для определения временных относительных изменений свободной энергии деформации разрушающегося массива горных пород. Конкретное численное значение параметра  $A_0$  в (22) и (24) определяется теми процессами, которые происходили в предшествующие моменты времени. Причем они необязательно были связаны только с хрупким разрушением, а могли включать в себя и такие явления, как растворение и кристаллизация. В связи с этим теоретическая оценка  $A_0$  вряд ли возможна, существуют определенные трудности и при попытке экспериментального определения данной величины. Поэтому мы рассматривали  $A_0$  как параметр и изучали характер временных изменений  $F_c/F_c^0$  в зависимости от его численного значения.

#### ЧИСЛЕННЫЕ РАСЧЕТЫ И ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

Наши последующие расчеты основываются на результатах интерпретации радоновых аномалий, проведенной нами ранее с целью определения временных изменений структурно-петрофизических характеристик геосреды синхронно с временными вариациями концентрации радона, наблюдавшимися на



**Рис. 1. График относительных изменений удельной внутренней поверхности и свободной энергии деформации.**

1 — зависимость  $\Omega^0/\Omega_0^0$  от времени; 2—4 — изменение  $F_c/F_c^0$ :  
2 — для параметра  $A_0 = 1/10$ , 3 — для  $A_0 = 1/5$ , 4 — для  $A_0 = 1/3$ .

Североуральском бокситовом руднике [Булашевич и др., 1996]. В частности, в работе [Беликов, Шестаков, 1997] рассчитаны временные изменения относительной удельной внутренней поверхности открытых пор  $\Omega^0/\Omega_0^0$ . Используя тот же экспериментальный материал, были определены пространственно-временные характеристики очага разрушения.

Вследствие этого, для его описания можно использовать соотношения (19), (22) и (24).

На рис. 1 приведены кривые, соответствующие уравнению (24), при трех значениях параметра  $A_0$ : 1/10, 1/5, 1/3 и график относительных изменений удельной внутренней поверхности открытых пор (величина  $\Omega^0/\Omega_0^0$ ), полученный нами ранее [Беликов, Шестаков, 1997]. Из графиков (см. рис. 1) видно, что, с одной стороны, характер временных изменений  $F_c/F_c^0$  в значительной степени зависит от величины  $A_0$ , а с другой — амплитуда падения  $F_c/F_c^0$ , вызванного ростом поверхностной энергии, с увеличением  $A_0$  возрастает. Отметим, что величина  $\Omega^0/\Omega_0^0$  при постоянном коэффициенте поверхностного натяжения (в силу (9)) совпадает с относительным значением свободной поверхностной энергии. Поэтому полученные графики являются иллюстрацией того факта, что рост последней компенсируется падением свободной энергии деформации в соответствии с условием (19).

Перейдем к изучению изменений напряженного состояния геосреды в процессе разрушения, индикатором которого являются временные вариации концентрации радона. В результате решения такой задачи должны быть исследованы временные зависимости компонент тензора упругих напряжений в процессе разрушения. В силу того, что последний является симметричным и его можно привести к главным осям, конечным этапом интерпретации должно стать получение зависимости главных напряжений  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  от времени. Однако используемые нами экспериментальные данные только радонового мониторинга при отсутствии дополнительных сведений, касающихся напряженно-деформированного состояния геосреды, не позволяют решить эту задачу в полном объеме. Поэтому в первом приближении мы рассмотрим простейший случай — состояние равномерного всестороннего сжатия, при котором  $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = -P (P > 0)$ . При этом мы будем предполагать, что концентрация пор и трещин относительно невелика, и их упругим взаимодействием можно пренебречь. В рамках данного предположения напряженное состояние в горном массиве слабо отличается от состояния равномерного всестороннего сжатия на достаточно больших расстояниях от пор и трещин [Тимошенко, Гудьер, 1975; Шермергор, 1977], в то же время вблизи последних локальная картина напряженного состояния будет искажена по сравнению с состоянием всестороннего сжатия. Отметим, что принятое выше допущение не противоречит экспериментальным данным, согласно которым пористые материалы естественного происхождения (мрамор, песчаник) в состоянии равномерного всестороннего сжатия обнаруживают явные признаки разрушения [Надаи, 1954].

Свободная энергия деформированного твердого тела в случае равномерного всестороннего сжатия, при котором  $\sigma_{ik}^c = -P_c \delta_{ik}$  [Ландау, Лифшиц, 1987], определяется выражением:

$$F_c = \frac{P_c^2}{2K}, \quad (25)$$

где  $P_c$  — осредненное давление в твердом теле,  $K$  — эффективный модуль всестороннего сжатия [Салганик, 1973]. Если считать, что доля объема, занимаемая трещинной фазой, а также эффективные упругие модули слабо меняются в процессе разрушения (при рассматриваемом нами эволюционном режиме его развития), то с учетом (25) можно написать



**Рис. 2. График относительных изменений удельной внутренней поверхности и давления в горном массиве.**

1 — зависимость  $\Omega^\circ/\Omega_0^\circ$  от времени; 2—4 — изменение  $\tilde{P}_c/\tilde{P}_c^0$ :  
2 — для параметра  $A_0 = 1/10$ , 3 — для  $A_0 = 1/5$ , 4 — для  $A_0 = 1/3$ .

$$\frac{F_c}{F_c^0} = \left( \frac{\tilde{P}_c}{\tilde{P}_c^0} \right)^2,$$

где  $\tilde{P}_c$  и  $\tilde{P}_c^0$  — осредненное (по объему) давление в скелете в текущий и начальный моменты времени. Тогда выражение (24) примет следующий вид:

$$\frac{\tilde{P}_c}{\tilde{P}_c^0} = \left[ 1 - A_0 \left( \frac{\Omega^\circ}{\Omega_0^\circ} - 1 \right) \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (26)$$

Это основное соотношение для изучения временных изменений давления в массиве горных пород в процессе разрушения, которое мы использовали в данной работе. Выражение (26) — следствие условия (20) и отражает тот факт, что в данном приближении осредненное давление в разрушающемся массиве меняется (при постоянном коэффициенте поверхностного натяжения) вследствие изменения УВП.

Как и в случае определения относительных изменений свободной энергии деформации, вычисление соответствующих изменений давления в процессе разрушения по формуле (26) производилось с учетом данных об относительных изменениях УВП открытых пор  $\Omega^\circ/\Omega_0^\circ$ . Значения параметра  $A_0$  принимались такими же, что и на рис. 1. Результаты расчетов приведены на рис. 2, из которого видно, что по мере развития процесса разрушения вначале (до прохождения максимума на кривой  $\Omega^\circ/\Omega_0^\circ$ ) происходит уменьшение относительного давления (разгрузка) в массиве. Затем вследствие падения свободной поверхностной энергии и уменьшения (за счет укрупнения трещин по мере развития процесса разрушения) УВП происходит рост энергии деформации и в соответствии с (25) — увеличение давления в массиве.

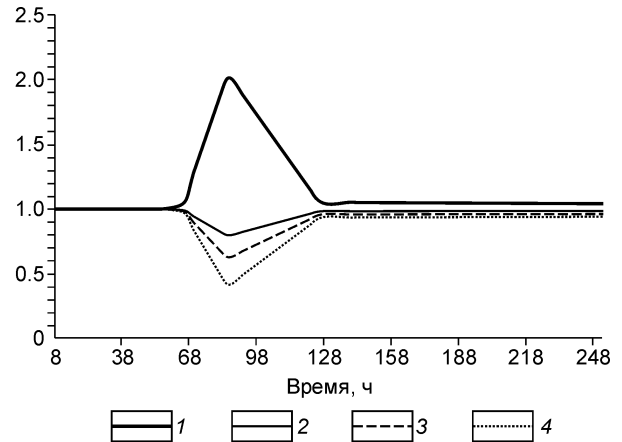
Анализируя приведенные кривые, можно отметить, что и в данном случае величина относительных изменений давления в процессе разрушения достаточно сильно зависит от начального соотношения между поверхностной и объемной свободными энергиями (величина  $A_0$ ). Наибольшее падение относительного давления в массиве горных пород (более чем в два раза) происходит при  $A_0 = 1/3$ , при меньших значениях параметра  $A_0$  уменьшение относительного давления несколько меньше. Заметим, что полученные выше результаты справедливы и в том случае, когда  $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = P > 0$  (равномерное всестороннее растяжение [Надаи, 1954]).

В заключение необходимо отметить следующее. В данной работе все расчеты базировались на соотношениях (19), (20), полученных в пренебрежении в общем балансе энергии ее составляющими, связанными с диссипативными явлениями, скрытой теплотой фазового перехода, а также с акустическим излучением. Учет этих факторов должен привести к снижению амплитуд относительных изменений свободной энергии деформации и давления в разрушающемся массиве горных пород.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предлагаемая в работе методика оценки временных относительных изменений напряженного состояния разрушающегося массива горных пород может применяться в тех случаях, когда, с одной стороны, режим развития процесса разрушения близок к эволюционному (и можно опираться на соотношения (19), (20)), с другой, — имеются данные об относительных изменениях удельной внутренней поверхности трещин. Все эти сведения могут быть получены в результате количественной интерпретации экспериментальных данных по индикаторам процесса разрушения.

Нами были использованы высокоамплитудные аномалии концентрации радона. Следует отметить, что необходимые данные могут быть получены и по другим индикаторам процессов разрушения. В частности, перспективными могут оказаться результаты экспериментов по наблюдениям акустической и электромагнитной эмиссий. В том случае, когда характер развития процессов разрушения в геосреде не является эволюционным, рассматриваемая в работе методика должна быть уточнена. Для получения более полной картины временных относительных изменений напряженного состояния массива в процессе



разрушения, при практическом использовании предлагаемого подхода, полезно привлекать сведения о напряженно-деформированном состоянии среды в исследуемой области.

Работа выполнена при поддержке программы Президиума РАН № 16.3 и РФФИ-Урал (грант 07-05-96053).

#### ЛИТЕРАТУРА

- Гидрогеохимические** предвестники землетрясений. М., Наука, 1985, 286 с.
- Беликов В.Т.** Количественное описание процессов теплопереноса в литосфере // Геология и геофизика, 1991 (5), с. 3—9.
- Беликов В.Т.** О термодинамической интерпретации эмпирического соотношения для долговечности твердых тел // Дефектоскопия, 1996, № 1, с. 96—101.
- Беликов В.Т., Шестаков А.Ф.** Использование временных вариаций концентрации радона для определения структурных характеристик геосреды. I // Дефектоскопия, 1997а, № 9, с. 79—88.
- Беликов В.Т., Шестаков А.Ф.** Использование временных вариаций концентрации радона для определения структурных характеристик геосреды. II // Дефектоскопия, 1997б, № 9, с. 89—97.
- Беликов В.Т., Шестаков А.Ф.** Использование вариаций концентрации радона для определения пространственно-временных характеристик очага разрушения // Дефектоскопия, 2000, № 3, с. 89—95.
- Булашевич Ю.П., Уткин В.И., Юрков А.К., Николаев В.В.** Изменение концентрации радона в связи с горными ударами в глубоких шахтах // Докл. РАН, 1996, т. 346, № 1, с. 245—248.
- Карслоу Г., Егер Д.** Теплопроводность твердых тел. М., Наука, 1964, 488 с.
- Качанов Л.М.** Основы механики разрушения. М., Наука, 1974, 311 с.
- Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.** Статистическая физика. М., Наука, 1964, 568 с.
- Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.** Теория упругости. М., Наука, 1987, 246 с.
- Левич В.Г.** Курс теоретической физики. Т. 1. М., Наука, 1969, 912 с.
- Лыков А.В.** Теплообмен. М., Энергия, 1978, 479 с.
- Надаи А.** Пластичность и разрушение твердых тел. М., Изд-во иностр. лит., 1954, 648 с.
- Разрушение.** Т. 2. Математические основы теории разрушения. М., Мир, 1975, 764 с.
- Румер Ю.Б., Рывкин М.Ш.** Термодинамика, статистическая физика и кинетика. М., Наука, 1977, 552 с.
- Салганик Р.Л.** Механика тел с большим числом трещин // Механика твердого тела, 1973, № 4, с. 149—158.
- Тимошенко С.П., Гудьер Дж.** Теория упругости. М., Наука, 1975, 576 с.
- Фихтенгольц Г.М.** Основы математического анализа. Т. 2. М., Наука, 1968, 464 с.
- Хеллан К.** Введение в механику разрушения. М., Мир, 1988, 364 с.
- Черепанов Г.П.** Механика хрупкого разрушения. М., Наука, 1974, 640 с.
- Шермергор Т.Д.** Теория упругости микронеоднородных сред. М., Наука, 1977, 400 с.
- Griffith A.A.** The phenomenon of rupture and flow in solids // Phil. Trans. Roy. Soc. Ser. A, 1920, v. 221, p. 163—198.

*Рекомендована к печати 2 октября 2007 г.  
А.Д. Дучковым*

*Поступила в редакцию 10 января 2006 г.,  
после доработки — 20 февраля 2007 г.*