

Т. А. Боднарь

**ТЕПЛОВАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ
ТАНГЕНЦИАЛЬНОГО ПОТОКА ЖИДКОСТИ
В КОЛЬЦЕВОМ КАНАЛЕ**

1. Постановка задачи. Несжимаемая реакционноспособная жидкость, находящаяся между двумя коаксиальными цилиндрами, приводится в движение равномерно вращающимися с угловыми скоростями ω_1 и ω_2 внутренним и внешним цилиндрами. В тангенциальном потоке, который предполагается установившимся и ламинарным, происходит увеличение температуры за счет экзотермических реакций и вязкой диссипации. Ставится задача определения тепловой устойчивости жидкости в зависимости от ее свойств, размеров канала, граничных условий и параметров потока. Граничными условиями у торцов цилиндров пренебрегается.

Приведенная модель может встречаться в различных технологических процессах, в частности точно моделирует процесс определения вязкости жидких взрывчатых веществ в вискозиметрах Куэтта — Гатчека [1].

Математическая запись рассматриваемой модели имеет вид

$$(1.1) \quad \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\kappa}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{v}{c} \left[r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v}{r} \right) \right]^2 + \varphi(T);$$

$$(1.2) \quad \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r} \frac{d}{dr} (rv) \right) = 0, \quad T(r, 0) = T_0, \quad R_1 \leq r \leq R_2;$$

$$(1.3) \quad \frac{\partial T(R_1, t)}{\partial r} + h_1 (T(R_1, t) - T_0) = 0, \quad \frac{\partial T(R_2, t)}{\partial r} + h_2 (T(R_2, t) - T_0) = 0;$$

$$(1.4) \quad v(r = R_1) = \omega_1 R_1, \quad v(r = R_2) = \omega_2 R_2,$$

где t — время; r — радиус; T — температура жидкости; κ — теплопроводность; v — кинематическая вязкость; c — теплоемкость; v — тангенциальная скорость потока; R_1, R_2 — радиусы внутреннего и внешнего цилиндров; h_1, h_2 — постоянные; $\varphi(T)$ — функция, удовлетворяющая условиям $\varphi(T_0) > 0, \partial\varphi(T)/\partial T > 0$. Не нарушая общности, предполагаем, что скорость тепловыделения подчиняется закону Аррениуса

$$\varphi(T) = Qz(\rho c)^{-1} \exp(-E(RT)^{-1}).$$

Здесь Q — тепловой эффект реакций; z — предэкспонент; E — энергия активации; ρ — плотность; R — универсальная газовая постоянная.

После интегрирования (1.2) с учетом (1.4) и ввода безразмерных параметров $\Theta = E(T - T_0)R^{-1}T_0^{-2}, \tau = tt_0^{-1}, \bar{r} = rr_0^{-1}, \bar{R}_1 = R_1r_0^{-1}, \bar{R}_2 = R_2r_0^{-1}, \beta = RT_0E^{-1}, \bar{h}_1 = h_1r_a, \bar{h}_2 = h_2r_a, \varphi(\Theta) = \exp(\Theta(1 + \beta\Theta)^{-1}), \bar{q} = 4\nu\rho(\omega_2 - \omega_1)^2 \bar{R}_1^4 \bar{R}_2^4 (\bar{R}_2^2 - \bar{R}_1^2)^{-2} (Qz)^{-1} (t_a = c\rho RT_0^2 (EQz)^{-1} \exp(E \times (RT_0)^{-1}), r_a = (\kappa t_a)^{0,5})$ система (1.1)–(1.3) приводится к виду

$$(1.5) \quad \frac{\partial \Theta}{\partial \tau} = \frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial}{\partial \bar{r}} \left(\bar{r} \frac{\partial \Theta}{\partial \bar{r}} \right) + \Delta (\bar{q} \exp(\beta^{-1}) \bar{r}^{-4} + a_0) + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \Theta^n = G(\Theta, \mu, \Delta);$$

$$(1.6) \quad \Theta(\bar{r}, 0) = 0, \quad \frac{\partial \Theta(\bar{R}_1, \tau)}{\partial \bar{r}} + \bar{h}_1 \Theta(\bar{R}_1, \tau) = 0, \quad \frac{\partial \Theta(\bar{R}_2, \tau)}{\partial \bar{r}} + \bar{h}_2 \Theta(\bar{R}_2, \tau) = 0,$$

где μ — параметр из интервала, содержащего нуль; Δ — параметр, определяемый из соотношения $G(0, 0, \Delta) = \bar{q} \exp(\beta^{-1}) \bar{r}^{-4} + a_0; a_n = \frac{1}{n!} \times \frac{\partial^n}{\partial \Theta^n} \varphi(\Theta) |_{\Theta=0}$ — коэффициенты разложения функции $\varphi(\Theta)$ в ряд по степеням Θ .

В соответствии с теоремой о центральном многообразии [2] бесконечномерная задача (1.5), (1.6) может быть сведена к пространству конечной

размерности без какой-либо потери информации относительно устойчивости ее решений. Наиболее простой способ редукции размерности бесконечномерной задачи — метод [3, 4], основанный на использовании проекций ее решений на пространство собственных функций совместно с теоремой Фредгольма об альтернативе.

В соответствии с этим методом вводятся вспомогательные операторы

$$(1.7) \quad \frac{\partial \Theta}{\partial \tau} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \Theta}{\partial r} \right) + \sum_{i=1}^{\infty} a_i \Theta^i = F(\Theta, \mu) = G(\Theta, \mu, 0);$$

$$(1.8) \quad \frac{\partial \Theta}{\partial \tau} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \Theta}{\partial r} \right) + a_1 \Theta = \frac{\partial F(0, 0)}{\partial \Theta} \Theta + \mu \frac{\partial^2 F(0, 0)}{\partial \Theta \partial \mu} \Theta,$$

для которых справедливы условия (1.6).

С целью притягивания решений задачи (1.5), (1.6) с параметрами, распределенными в R^∞ , к пространству R^2 строится пространство собственных функций производящего оператора (1.8) с учетом (1.6) и определяется устойчивость нулевого решения. Затем на это пространство проектируются решения бифуркационной задачи (1.7) и задачи (1.5), содержащей параметр $\Delta \neq 0$, разрушающий бифуркацию, и находится устойчивость решения этих задач.

В рамках постановки задачи полезно указать, что принятое предположение о ламинарности установившегося потока справедливо, если выполняется условие устойчивости течения между вращающимися цилиндрами [4]. При небольшой разности $|\omega_2 - \omega_1|$ это условие задается неравенством [4]

$$v > \bar{R}_1^2 \bar{R}_2^2 |\omega_2 - \omega_1| (\pi^2 (\bar{R}_2^2 - \bar{R}_1^2))^{-1} (\ln (\bar{R}_2 \bar{R}_1^{-1}))^2.$$

2. Нулевое решение. Анализ устойчивости нулевого решения (1.5), (1.6) сводится к задаче типа Штурма — Лиувилля по нахождению собственных значений оператора (1.8). Спектр оператора (1.8) состоит только из дискретных собственных значений $\sigma_n = a_1 - \lambda_n^2$, где λ_n ($n = 1, 2, \dots$) — положительные корни уравнения

$$\det \begin{vmatrix} \bar{h}_1 I_0(\lambda \bar{R}_1) - I_1(\lambda \bar{R}_1) \bar{h}_1 N_0(\lambda \bar{R}_1) - N_1(\lambda \bar{R}_1) \\ \bar{h}_2 I_0(\lambda \bar{R}_2) - I_1(\lambda \bar{R}_2) \bar{h}_2 N_0(\lambda \bar{R}_2) - N_1(\lambda \bar{R}_2) \end{vmatrix} = 0$$

($I_n(\lambda r)$, $N_n(\lambda r)$ — функции Бесселя и Неймана n -го порядка).

В дальнейшем параметр μ будет представлен в виде функции от максимального собственного значения σ_1 , $\mu = \mu(\sigma_1)$, но таким образом, чтобы в соответствии с определением интервал его значений содержал нуль. В нулевом случае решение устойчиво, если $\mu = a_1 - \lambda_1^2 < 0$.

Все собственные значения σ_n оператора (1.8) двукратны и каждому из них отвечают два собственных вектора:

$$y_{1n} = I_0(\lambda_n \bar{r}), \quad y_{2n} = c_n N_0(\lambda_n \bar{r})$$

$$(c_n = (I_1(\lambda_n \bar{R}_1) - \bar{h}_1 I_0(\lambda_n \bar{R}_1)) (\bar{h}_1 N_0(\lambda_n \bar{R}_1) - N_1(\lambda_n \bar{R}_1))^{-1}).$$

Алгебраическая и геометрическая кратности собственных значений σ_n совпадают, так что векторы y_{ij} ($i = 1, 2, j = 1, 2, \dots$) независимы и могут быть использованы для построения биортогональной системы на (\bar{R}_1, \bar{R}_2) . Отсюда следует, что любое решение (1.5), (1.7) может быть представлено в виде разложения по собственным векторам оператора (1.8).

3. Бифуркационное решение. Введение преобразований Грамма — Шарлье приводит векторы y_{ij} к биортогональной системе, так что собственному значению σ_1 будут соответствовать ортогональные векторы

$$(3.1) \quad \bar{y}_{11} = y_{11}, \quad \bar{y}_{21} = y_{21} - \langle y_{21}, \bar{y}_{11} \rangle \bar{y}_{11},$$

где $\langle \bar{y}_{ij}, \bar{y}_{nm} \rangle$ — скалярное произведение векторов $\bar{y}_{ij}, \bar{y}_{nm}$, $\|\bar{y}_{ij}\| = \langle \bar{y}_{ij}, \bar{y}_{ij} \rangle$.

Пространство векторов \bar{y}_{ij} ($i = 1, 2, j = 1, 2, \dots$) является гильбертовым со скалярным произведением

$$\langle (\bar{y}_{1i}, \bar{y}_{2j}), (\bar{y}_{1n}, \bar{y}_{2m}) \rangle = \langle \bar{y}_{1i}, \bar{y}_{1n}^* \rangle + \langle \bar{y}_{2j}, \bar{y}_{2m}^* \rangle$$

($\bar{y}_{1i}^*, \bar{y}_{2i}^*$ — сопряженные к $\bar{y}_{1i}, \bar{y}_{2i}$ векторы). Поскольку векторы \bar{y}_{ij} ортогональны на (\bar{R}_1, \bar{R}_2) с весом r , в качестве сопряженных к $\bar{y}_{11}, \bar{y}_{21}$ следует брать векторы

$$\bar{y}_{i1}^* = \bar{y}_{i1} r \left(\sum_{i=1}^2 \|\bar{y}_{1i}\| \right)^{-1} \quad (i = 1, 2).$$

Подпространство, натянутое на векторы $\bar{y}_{11}, \bar{y}_{21}$, ортогонально остальной части гильбертова пространства, так что любое решение $\Theta = \Theta(\mu)$ оператора (1.7) всегда может быть разложено на часть, принадлежащую двумерному нуль-пространству оператора (1.8), и часть, которая ортогональна $\bar{y}_{11}^*, \bar{y}_{21}^*$.

Решение (1.7) с условиями (1.6) можно найти в виде степенных рядов

$$(3.2) \quad \left| \begin{array}{c} \Theta \\ \mu \end{array} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon^n}{n!} \left| \begin{array}{c} \Theta_n \\ \mu_n \end{array} \right|$$

($\varepsilon = \langle (\Theta, \Theta), (\bar{y}_{11}, \bar{y}_{21}) \rangle$ — амплитуда).

Подстановка (3.2) в (1.7) и отождествление членов при независимых степенях ε приводят к

$$(3.3) \quad \frac{\partial F(0,0)}{\partial \Theta} \Theta_1 = 0;$$

$$(3.4) \quad \frac{\partial F(0,0)}{\partial \Theta} \Theta_2 + 2\mu_1 \frac{\partial^2 F(0,0)}{\partial \Theta \partial \mu} \Theta_1 + \frac{\partial^2 F(0,0)}{\partial \Theta^2} \Theta_1^2 = 0$$

и уравнениям при более высоких степенях ε . Из (3.3) непосредственно следует, что решением может быть любая линейная комбинация $\Theta_1 = \bar{y}_{11} + \psi \bar{y}_{21}$ (ψ — параметр задачи, подлежащий определению). Уравнение (3.4) разрешимо лишь в том случае, когда для $k = 1, 2$ выполняются условия $\langle \partial F(0,0)/\partial \Theta \Theta_k, \bar{y}_{k1}^* \rangle = 0$, установленные на основании теоремы Фредгольма об альтернативе. Отсюда вытекает

$$(3.5) \quad 2\mu_1 \langle \partial^2 F(0,0)/\partial \Theta \partial \mu \Theta_1, \bar{y}_{k1}^* \rangle + \langle \partial^2 F(0,0)/\partial \Theta^2 \Theta_1^2, \bar{y}_{k1}^* \rangle = 0 \quad (k = 1, 2).$$

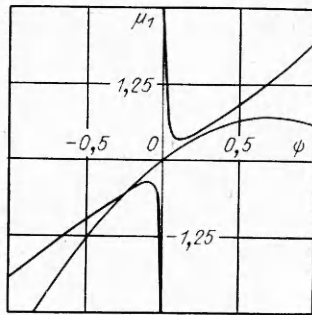
Наличие двух независимых параметров μ_1, ψ гарантирует существование решения системы (3.5). Подстановка в эти уравнения выражений для Θ_1, \bar{y}_{k1}^* ($k = 1, 2$) дает два уравнения конических сечений на плоскости (μ_1, ψ) :

$$(3.6) \quad g_1(\mu_1, \psi) = c_{11}\psi^2 + c_{12}\psi + c_{13}\mu_1\psi + c_{14}\mu_1 + c_{15} = 0;$$

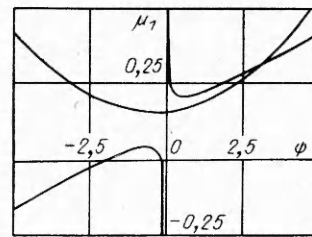
$$(3.7) \quad g_2(\mu_1, \psi) = c_{21}\psi^2 + c_{22}\psi + c_{23}\mu_1\psi + c_{24}\mu_1 + c_{25} = 0,$$

где $c_{11} = 0,5 \langle \partial^2 F(0,0)/\partial \Theta^2 \bar{y}_{21}^2, \bar{y}_{11}^* \rangle$; $c_{12} = \langle \partial^2 F(0,0)/\partial \Theta^2 \bar{y}_{11} \bar{y}_{21}, \bar{y}_{11}^* \rangle$;
 $c_{13} = \langle \partial^2 F(0,0)/\partial \Theta \partial \mu \bar{y}_{21}, \bar{y}_{11}^* \rangle$; $c_{14} = \langle \partial^2 F(0,0)/\partial \Theta \partial \mu \bar{y}_{11}, \bar{y}_{11}^* \rangle$;
 $c_{15} = 0,5 \langle \partial^2 F(0,0)/\partial \Theta^2 \bar{y}_{11}^2, \bar{y}_{11}^* \rangle$; $c_{21} = 0,5 \langle \partial^2 F(0,0)/\partial \Theta^2 \bar{y}_{21}^2, \bar{y}_{21}^* \rangle$;
 $c_{22} = \langle \partial^2 F(0,0)/\partial \Theta^2 \bar{y}_{11} \bar{y}_{21}, \bar{y}_{21}^* \rangle$; $c_{23} = \langle \partial^2 F(0,0)/\partial \Theta \partial \mu \bar{y}_{21}, \bar{y}_{21}^* \rangle$;
 $c_{24} = \langle \partial^2 F(0,0)/\partial \Theta \partial \mu \bar{y}_{11}, \bar{y}_{21}^* \rangle$; $c_{25} = 0,5 \langle \partial^2 F(0,0)/\partial \Theta^2 \bar{y}_{11}^2, \bar{y}_{21}^* \rangle$.

В силу преобразований (3.1) $c_{13} = c_{24} = 0$, и если (3.6), (3.7) не вырождены, то (3.6) — всегда парабола, а (3.7) — всегда гипербола. Точки пересечения кривых (3.6), (3.7) $(\mu_1^{(n)}, \psi^{(n)})$ на плоскости (μ_1, ψ) являются



Р и с. 1



Р и с. 2

решениями (3.4). В зависимости от знака дискриминанта эквивалентного системе (3.6), (3.7) кубического уравнения

$$(3.8) \quad b_3 \psi^3 + b_2 \psi^2 + b_1 \psi + b_0 = 0$$

$$(b_3 = 1, b_2 = (c_{12} - c_{14} c_{21} c_{23}^{-1}) c_{11}^{-1},$$

$$b_1 = (c_{15} - c_{14} c_{22} c_{23}^{-1}) c_{11}^{-1}, b_0 = -c_{14} c_{25} c_{23}^{-1} c_{11}^{-1})$$

система (3.6), (3.7) имеет или три действительных решения, или одно действительное и два комплексно-сопряженных. Если дискриминант равен нулю, то два или все три действительных решения совпадают.

Многочисленные расчеты, проведенные в случайных точках интервалов $0,1 \leq \bar{R}_1 \leq 2,4$, $0,8 \leq \bar{R}_2 \leq 5$, $\beta = 0,02$, $1 \leq \bar{h}_1 \leq 2$, $-2 \leq \bar{h}_2 \leq 2$, $\bar{h}_1 = \bar{h}_2 \gg 1$, показали, что невырожденная система (3.6), (3.7) всегда имеет одно действительное решение, определяющее точку стационарного равновесия, и два комплексных, в которых происходит рождение периодических во времени циклов. Так, при $\bar{R}_1 = 1$, $\bar{R}_2 = 4,07$, $\beta = 0,02$, $\bar{h}_1 = \bar{h}_2 \gg 1$ система (3.6), (3.7) имеет одно действительное решение $(\mu_1^{(1)}, \psi^{(1)}) = (-0,55, -0,24)$ (рис. 1) и два комплексных $(\mu_1^{(2)}, \psi^{(2)}) = (0,25 + 0,25i, 0,13 + 0,16i)$, $(\mu_1^{(3)}, \psi^{(3)}) = (0,25 - 0,25i, 0,13 - 0,16i)$. При $\bar{R}_1 = 1$, $\bar{R}_2 = 2,55$ и тех же β , \bar{h}_1 , \bar{h}_2 , $(\mu_1^{(1)}, \psi^{(1)}) = (0,30, 2,94)$ (рис. 2) $(\mu_1^{(2)}, \psi^{(2)}) = (0,16 - 0,016i, 0,36 - 0,83i)$, $(\mu_1^{(3)}, \psi^{(3)}) = (0,16 + 0,016i, 0,36 + 0,83i)$.

Анализ устойчивости решений (1.6), (1.7) должен проводиться в каждой точке пересечения кривых (3.6), (3.7) $(\mu_1^{(n)}, \psi^{(n)})$, $n = 1 - 3$. Для этого необходимо представить зависимости $g_i(\mu_1, \psi)$ ($i = 1, 2$) в виде функций от параметра μ . Комбинируя (3.2), (3.6), (3.7) и используя условие нормировки $\epsilon = 1$, можно записать систему (3.6), (3.7) в виде

$$(3.9) \quad \bar{g}_i(\mu) = \mu^2 (c_{i1} \psi^2 \mu_1^{-2} + c_{i2} \psi \mu_1^{-2} + c_{i3} \psi \mu_1^{-1} + c_{i4} \mu_1^{-1} + c_{i5} \mu_1^{-2}) = 0$$

$$(i = 1, 2).$$

Теорема Ляпунова об устойчивости по первому приближению [5] утверждает, что решение (1.6), (1.7) устойчиво, если вещественные части собственных значений матрицы Якоби $I = |a_{ij}|$, где $a_{11} = \partial \bar{g}_1(\mu) / \partial \mu_1^{-1}$, $a_{12} = \partial \bar{g}_1(\mu) / \partial (\psi \mu_1^{-1})$, $a_{21} = \partial \bar{g}_2(\mu) / \partial \mu_1^{-1}$, $a_{22} = \partial \bar{g}_2(\mu) / \partial (\psi \mu_1^{-1})$, отрицательны. Учитывая, что в каждой точке $(\mu_1^{(n)}, \psi^{(n)})$ при малом μ имеет место $\det I = \mu^2 \det I(\mu_1^{(n)}, \psi^{(n)}) + O|\mu|^3$, запишем условия устойчивости для стационарного равновесия

$$(3.10) \quad \max(\mu s_1^{(n)}, \mu s_2^{(n)}) < 0, \det I(\mu_1^{(n)}, \psi^{(n)}) > 0;$$

для периодических циклов

$$(3.11) \quad \max(\mu \operatorname{Re} s_1^{(n)}, \mu \operatorname{Re} s_2^{(n)}) < 0,$$

$$|\operatorname{Re}(a_{11}^{(n)} + a_{22}^{(n)})| > |(\alpha_n^2 + \beta_n^2)^{0,25} \cos 0,5 \arctg \alpha_n^{-1} \beta_n|.$$

Здесь $s_1^{(n)}, s_2^{(n)}$ — собственные значения матрицы

$$I(\mu_1^{(n)}, \psi^{(n)}); a_{ij}^{(n)} = a_{ij}(\mu_1^{(n)}, \psi^{(n)});$$

$$\alpha_n = (\operatorname{Re}(a_{11}^{(n)} - a_{22}^{(n)})^2 - (\operatorname{Im}(a_{11}^{(n)} - a_{22}^{(n)}))^2 + 4 \operatorname{Re} a_{12}^{(n)} \operatorname{Re} a_{21}^{(n)} -$$

$$- 4 \operatorname{Im} a_{12}^{(n)} \operatorname{Im} a_{21}^{(n)}); \beta_n = 2 \operatorname{Re}(a_{11}^{(n)} - a_{22}^{(n)}) \operatorname{Im}(a_{11}^{(n)} - a_{22}^{(n)}) +$$

$$+ 4 \operatorname{Re} a_{12}^{(n)} \operatorname{Im} a_{21}^{(n)} + 4 \operatorname{Re} a_{21}^{(n)} \operatorname{Im} a_{12}^{(n)}.$$

Условия (3.10) справедливы тогда и только тогда, когда на плоскости (μ_1, ψ) кривые (3.6), (3.7) пересекаются трансверсально, т. е. $\det I_0 \neq 0$, где

$$I_0 = \begin{vmatrix} \partial g_1(\mu_1, \psi)/\partial \mu_1 & \partial g_1(\mu_1, \psi)/\partial \psi \\ \partial g_2(\mu_1, \psi)/\partial \mu_1 & \partial g_2(\mu_1, \psi)/\partial \psi \end{vmatrix}.$$

При наличии лишь одного действительного корня уравнения (3.8) пересечение всегда строгое (если кривые (3.6), (3.7) касаются, то это уже два действительных корня). Все же, если в точке пересечения кривые (3.6), (3.7) имеют общую касательную, необходимо возвратиться и рассмотреть следующее за (3.4) уравнение. Если в (3.11) $\max(\mu \operatorname{Re} s_1^{(n)}, \mu \operatorname{Re} s_2^{(n)}) = 0$, причем нуль простой, то происходит рождение предельного цикла — бифуркации Хопфа [2].

Анализ устойчивости теплового состояния жидкости в кольцевом канале при $\bar{R}_1 = 1, \bar{R}_2 = 4,07, \beta = 0,02, \bar{h}_1 = \bar{h}_2 \gg 1$ показывает, что $(s_1^{(1)}, s_2^{(1)}) = (28,80, -0,25), (s_1^{(2)}, s_2^{(2)}) = (4,72 - 20,25i, -20,08 - 4,74i), (s_1^{(3)}, s_2^{(3)}) = (4,72 + 20,25i, -20,08 + 4,74i)$, и, следовательно, состояние стационарного равновесия и колебательные циклы неустойчивы с любой стороны от критической точки $\mu = 0$. При $\bar{R}_1 = 1, \bar{R}_2 = 2,55, \beta = 0,02, \bar{h}_1 = \bar{h}_2 \gg 1$ расчеты дают $(s_1^{(1)}, s_2^{(1)}) = (10^{-2}, -3,10 \cdot 10^{-2}), (s_1^{(2)}, s_2^{(2)}) = (-4,71 \cdot 10^{-4} + 2,38 \cdot 10^{-3}i, -4,14 \cdot 10^{-2} - 6,04 \cdot 10^{-4}i), (s_1^{(3)}, s_2^{(3)}) = (-4,71 \cdot 10^{-4} - 2,38 \cdot 10^{-3}i, -4,14 \cdot 10^{-2} + 6,04 \cdot 10^{-4}i)$, так что состояние стационарного равновесия неустойчиво при любом $\mu > 0$ и $\mu < 0$, а колебательные состояния устойчивы при $\mu = 4a_1 - \lambda_1^2 > 0$.

4. Изолированные решения. Оператор $G(\Theta, \mu, \Delta)$ содержит параметр $\Delta \neq 0$, который разрушает бифуркацию в точке $(\mu, \Theta) = (0, 0)$, так что разветвляющиеся в этой точке решения распадаются на изолированные. При $\Delta = 0$ решение $\Theta = 0$ уравнения $G(\Theta, \mu, 0) = 0$ строго теряет устойчивость при переходе μ через нуль. Это, согласно теореме Хопфа [2], равносильно тому, что точка $(\mu, \Theta) = (0, 0)$ двойная.

Неравенство $\langle \partial G(0, 0, 0)/\partial \Delta, \bar{y}_{k1}^* \rangle \neq 0$ ($k = 1, 2$) и теорема о неявной функции гарантируют существование решения $G(\Theta, \mu, \Delta) = 0$ относительно $\Delta = \Delta(\mu, \varepsilon)$, которое разыскивается в виде рядов по степеням μ, ε .

Двукратное дифференцирование $G(\Theta, \mu, \Delta)$ по μ, ε в точке $(\mu, \varepsilon) = (0, 0)$ и использование тождества $\partial G(\Theta, \mu, \Delta(\mu, 0))/\partial \varepsilon = 0$, вытекающего из определения двойной точки, дают систему уравнений

$$(4.1) \quad \frac{\partial G(0, 0, 0)}{\partial \Theta} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial \varepsilon^2} + \frac{\partial^2 G(0, 0, 0)}{\partial \Theta^2} \Theta_1^2 + \frac{\partial G(0, 0, 0)}{\partial \Delta} \frac{\partial^2 \Delta}{\partial \varepsilon^2} = 0;$$

$$(4.2) \quad \frac{\partial G(0, 0, 0)}{\partial \Theta} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial \mu \partial \varepsilon} + \frac{\partial^2 G(0, 0, 0)}{\partial \mu \partial \varepsilon} \Theta_1 + \frac{\partial G(0, 0, 0)}{\partial \Delta} \frac{\partial^2 \Delta}{\partial \mu \partial \varepsilon} = 0,$$

разрешимую только в том случае, когда для $k = 1, 2$ выполняются условия

$$\left\langle \frac{\partial^2 \Theta}{\partial \varepsilon^2}, \bar{y}_{k1}^* \right\rangle = \left\langle \frac{\partial^2 \Theta}{\partial \mu \partial \varepsilon}, \bar{y}_{k1}^* \right\rangle = 0.$$

Последние соотношения совместно с уравнениями (4.1), (4.2) определяют первые два ненулевых члена в разложении функции по степеням μ , ε :

$$(4.3) \quad \Delta(\mu, \varepsilon) = -\frac{1}{2} \left[\frac{\langle \partial^2 G(0, 0, 0) / \partial \Theta^2 \Theta_1^2, \bar{y}_{k1}^* \rangle}{\langle \partial G(0, 0, 0) / \partial \Delta, \bar{y}_{k1}^* \rangle} \varepsilon^2 + \right. \\ \left. + 2 \frac{\langle \partial^2 G(0, 0, 0) / \partial \Theta \partial \mu \Theta_1, \bar{y}_{k1}^* \rangle}{\langle \partial G(0, 0, 0) / \partial \Delta, \bar{y}_{k1}^* \rangle} \varepsilon_{\mu} \right] \quad (k = 1, 2).$$

Уравнения (4.3) позволяют определить решения (1.5), (1.6) в плоскости (μ, ε) . Подстановка выражений для $\Theta_1, \bar{y}_{k1}^* (k = 1, 2)$ в (4.3) и использование условия нормировки $\varepsilon = 1$ дают

$$(4.4) \quad g_1(\mu_1, \psi) + \Delta \langle \partial G(0, 0, 0) / \partial \Delta, \bar{y}_{11}^* \rangle = 0;$$

$$(4.5) \quad g_2(\mu_1, \psi) + \Delta \langle \partial G(0, 0, 0) / \partial \Delta, \bar{y}_{21}^* \rangle = 0,$$

где $g_i(\mu_1, \psi)$ определяются из (3.6), (3.7).

Переход от (4.4), (4.5) к эквивалентному кубическому уравнению приводит к (3.8). При этом коэффициенты b_2, b_3 такие же, как и в (3.8), а b_0, b_1 имеют вид

$$b_0 = - (c_{25} + \Delta \langle \partial G(0, 0, 0) / \partial \Delta, \bar{y}_{21}^* \rangle) c_{23}^{-1} c_{11}^{-1},$$

$$b_1 = (c_{15} + \Delta \langle \partial G(0, 0, 0) / \partial \Delta, \bar{y}_{11}^* \rangle - c_{14} c_{22} c_{23}^{-1}) c_{11}^{-1}.$$

Дальнейшая процедура анализа устойчивости решений (1.5), (1.6) аналогична проведенной в п. 3 для бифуркационного решения. Распределение действительных и комплексных решений системы (4.4), (4.5) такое же, как и для (3.6), (3.7), хотя оно необязательно должно совпадать.

Расчеты, проведенные для $\bar{R}_1 = 1, \bar{R}_2 = 2,55, \beta = 0,02, \bar{h}_1 = \bar{h}_2 \gg 1, \partial G(0, 0, 0) / \partial \Delta = a_0, \bar{q} = 0$, дали $(\mu_1^{(1)}, \psi^{(1)}) = (3,10, 0,64), (s_1^{(1)}, s_2^{(1)}) = (0,14, -0,76), (\mu_1^{(2)}, \psi^{(2)}) = (0,22 + 0,74i, 1,51 + 15,53i), (s_1^{(2)}, s_2^{(2)}) = (-9,14 \cdot 10^{-3} - 3,40 \cdot 10^{-2}i, -1,46 + 0,13i)$; комплексно-сопряженное к $(\mu_1^{(2)}, \psi^{(2)})$ решение не приводится. Отсюда следует, что стационарное состояние неустойчиво при любом μ , а периодические циклы устойчивы при $\mu > 0$.

Следующие расчеты, проделанные при предыдущих исходных данных, за исключением $\partial G(0, 0, 0) / \partial \Delta = a_0 + \bar{q} \exp(\beta^{-1}r^{-4}), \bar{q} \exp(\beta^{-1}) = 1$, дали $(\mu_1^{(1)}, \psi^{(1)}) = (3,38, 1,20), (s_1^{(1)}, s_2^{(1)}) = (0,15, -0,82), (\mu_1^{(2)}, \psi^{(2)}) = (0,21 + 0,66i, 1,22 + 16,20i), (s_1^{(2)}, s_2^{(2)}) = (-2,66 \cdot 10^{-3} - 3,08 \cdot 10^{-2}i, -1,60 + 9,60 \cdot 10^{-2}i)$. Распределение устойчивости такое же, как и в предыдущем случае. Дальнейшие расчеты показали, что при неизменных $\bar{R}_1 = 1, \bar{R}_2 = 2,55, \beta = 0,02, \bar{h}_1 = \bar{h}_2 \gg 1$ увеличение скорости потока вплоть до $\bar{q} = \infty$ качественно не меняет картину распределения устойчивости. Это может быть объяснено тем обстоятельством, что при $\bar{h}_1 = \bar{h}_2 \gg 1$ повышение температуры жидкости за счет вязкой диссипации сопровождается интенсификацией теплоотвода через поверхности \bar{R}_1, \bar{R}_2 , на которых температура поддерживается равной нулю ($\Theta = 0$). Вместе с тем нельзя не обратить внимание на то, что с увеличением скорости потока мощность аттрактора, соответствующего неустойчивому состоянию равновесия, возрастает.

Утверждение о том, что с изменением скорости потока качественная картина распределения устойчивости не меняется, естественно, относится лишь к конкретным, использованным в расчетах, параметрам. При других параметрах задачи изменение скорости потока может привести к качественному изменению распределения устойчивости. Так, при $\bar{R}_1 = 1, \bar{R}_2 = 2,30, \bar{h}_1 = \bar{h}_2 \gg 1$ система (4.4), (4.5) вырождается и (4.3) имеет

только одно решение $\mu \varepsilon - (0,17 - 0,34\beta)\varepsilon^2 - 3,18 - 0,84\bar{q} \exp(\beta^{-1}) = 0$, из которого следует, что при определенных значениях β существует пороговое значение \bar{q} , при котором μ меняет знак.

На основании проведенного анализа решений системы (1.5), (1.6) возникает искушение утверждать следующее. Поток первоначально равномерно прогретой жидкости, в которой происходит повышение температуры за счет экзотермических реакций и вязкой диссипации, может находиться в трех тепловых состояниях: одно неустойчивое состояние теплового равновесия и два периодических цикла, которые могут быть устойчивыми или неустойчивыми. При данной постановке задачи, не учитывающей выгорание реагентов при протекании реакций, возможен предельный цикл. Существуют диаметры цилиндров (такие, что один из двух собственных векторов, соответствующих каждому двукратному собственному значению σ_n ($n = 1, 2, \dots$) производящего оператора (1.8), равен нулю), при которых жидкость будет иметь лишь одно стационарное состояние теплового равновесия, которое может быть устойчивым или неустойчивым.

ЛИТЕРАТУРА

1. Берд Р., Стюарт В., Лайфут Е. Явления переноса.— М.: Химия, 1974.
2. Марсен Дж., Мак-Кракен М. Бифуркация рождения цикла и ее приложения.— М.: Мир, 1980.
3. Иосс Ж., Джозеф Д. Элементарная теория устойчивости и бифуркаций.— М.: Мир, 1983.
4. Джозеф Д. Устойчивость движения жидкости.— М.: Мир, 1981.
5. Демидович Б. П. Лекции по математической теории устойчивости.— М.: Наука, 1967.

г. Бийск

Поступила 6/IV 1990 г.

УДК 535.211 : 536.4

А. И. Бывших, В. И. Кирко, Н. И. Пак

МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕПЛОВЫХ ПРОЦЕССОВ ПРИ УДАРНО-ВОЛНОВОМ НАГРУЖЕНИИ ПОРИСТЫХ МАТЕРИАЛОВ

Ударно-волновое нагружение пористых материалов в диапазоне давлений $1,5 \div 3$ ГПа позволяет получать монолитные изделия [1—3]. Более высокие давления нагружения ($30 \div 400$ ГПа) используются для исследования уравнений состояния различных веществ в критических условиях [4]. В [5] показано, что ударно-волновое нагружение характеризуется сильной неравновесностью тепловых процессов, которая обусловлена кратковременным сжатием вещества за фронтом ударной волны (УВ) и воздействием мощных тепловых потоков на поверхность частицы. При низких давлениях, характерных для технологий компактирования порошков, тепловая неравновесность проявляется в проплавлении поверхности частиц [2, 3].

Увеличение давления прессования или пористости приводит к возрастанию доли расплавленного компонента и к дальнейшему росту интенсивности тепловыделения на границах частиц. В этом случае необходимо отметить область вещества, в которой температура превышает температуру кипения при нормальном давлении; в ней в свою очередь можно выделить два слоя: в первом удельная внутренняя энергия больше энергии испарения, а во втором — меньше. При снятии давления расплавленный слой вещества, где приобретенная внутренняя тепловая энергия превышает уровень энергии, необходимой для испарения, перейдет в парообразное состояние, а во втором слое следует ожидать объемного вскипания. В реальном случае состояние среды за фронтом УВ зависит от соотношения t^*/τ (t^* — время прихода волны разгрузки, $\tau = R^2/a$ — характерное время установления теплового равновесия в отдельной частице радиуса R , a — температуропроводность частицы). При $t^*/\tau \ll 1$ частица не успевает прогреться равномерно, и после прихода волны разгрузки в перегретом материале могут происходить процессы парообразования и вскипания. Когда $t^*/\tau \gg 1$, в частицах устанавливается равновесная температура. Здесь состояние вещества после прихода волны разгрузки определяется $p - v$ -диаграммой.