ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ И ПРИКЛАДНЫЕ
ВОПРОСЫ ГОРНЫХ НАУК Том 6, № 1, 2019

УДК 539.3 DOI: 10.15372/FPVGN2019060133

РАЗВИТИЕ СТАТИЧЕСКОГО И КИНЕМАТИЧЕСКОГО ПОДХОДОВ В ЗАДАЧАХ ГЕОМЕХАНИКИ

В. Е. Миренков

Институт горного дела им. Н. А. Чинакала СО РАН, E-mail: mirenkov@misd.ru,
Красный проспект 54, Новосибирск 630091, Россия

Гипотеза о линейном поле напряжений нетронутого проведением выработок массива лежит в основе решения многих задач механики горных пород. Проблема управления горным давлением требует знаний напряженно-деформированного состояния массива в окрестности выработок, что вызывает развитие аналитических и численных методов расчета деформирования. В условиях неразвитых методов численного счета использовались аналитические возможности подбора функций напряжений, удовлетворяющих условиям теории упругости малых деформаций. Наибольшие успехи в этом направлении были достигнуты для областей с угловыми точками. Развитие численных методов перенесло центр тяжести исследований на расчет деформирования конкретных случаев, возникающих в массиве пород с выработками. В работе установлено, что аналитические решения для областей с угловыми точками некорректны, также некорректны и численные решения задач Коши, если не рассматривается дополнительная задача.

Массив, горные породы, выработка, задача Коши, корректность, решение

DEVELOPMENT OF STATIC AND KINEMATIC APPROACHES IN GEOMECHANICAL PROBLEMS

V. E. Mirenkov

Chinakal Institute of Mining, Siberian Branch, Russian Academy of Sciences
E-mail: mirenkov@misd.ru, *Krasny pr. 54, Novosibirsk 630091, Russia*

The hypothesis of a linear stress field of a rock mass undisturbed by driving workings underlies the solution to many problems of rock mechanics. The problem of rock pressure control requires knowledge of the stress-strain state of the rock mass in the vicinity of workings, which causes the development of analytical and numerical methods for calculating the deformation. When the methods of numerical calculation were not sufficiently developed, the analytical capabilities of the selection of stress functions were used, which satisfied the conditions of small strain elasticity theory. The greatest success in this direction was achieved for the areas with angular points. The development of numerical methods shifted the point of influence of investigations to calculating the deformation of specific cases arising in a rock mass with workings. It is established in the work that analytical solutions for the areas with angular points are incorrect, and numerical solutions of Cauchy problems are also incorrect if an additional problem is not considered.

Rock mass, rocks, working, Cauchy problem, correctness, solution

Ведение очистных работ приводит к увеличению выработанного пространства и к необходимости контроля за изменением напряженно-деформированного состояния породного массива. В механике горных пород чаще всего используется линейный закон распределения напряжений в исходном состоянии. Для двумерного случая массив с выработкой будем моделировать плоскостью с отверстием. Исходное напряженное состояние примем в виде [1, 2]:

Работа выполнена в рамках проекта ФНИ (№ гос. регистрации АААА-А17-117122090002-5).

$$\sigma_y = -\gamma(H - y), \quad \sigma_x = -\lambda\gamma(H - y), \tag{1}$$

где σ_y и σ_x — вертикальная и горизонтальная составляющие тензора напряжений на глубине H от дневной поверхности; γ — удельный вес пород; λ — коэффициент бокового распора. Предположения, принятые относительно деформирования массива в окрестности выработок в [1, 2], свели проблему к решению задачи для плоскости с математическим разрезом. Но до настоящего времени не проводился анализ влияния исходного поля напряжений на корректность формулировки граничных условий в процессе численного счета и использования аналитических решений для областей с угловыми точками.

В работах [1, 2] собственный вес пород не учитывался. В [3] предложен способ учета собственного веса пород в рамках феноменологической теории, использующий экспериментальные данные по смещениям пород кровли и почвы выработки. При этом используется классическое решение (аналитическое или численное), которое уточняется за счет дополнительной информации о смещениях в рамках сведения проблемы к решению обратных задач.

АНАЛИТИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ

В классе аналитических решений, используемых в механике горных пород, прежде всего необходимо выделить решения для областей с угловой точкой, в которых напряжения обращаются в бесконечность. Все такие решения хорошо известны и их можно найти в любом учебнике по теории упругости, особенно частный вид таких решений — полуплоскость (угол раствора клина π), нагруженная вертикально направленной сосредотоенной силой. Нужно признать неудачной попытку объединить сосредоточенную силу (этого понятия в теории упругости нет) со случайно подобранной функцией напряжений

$$\varphi = -\frac{p}{\pi} r\theta \sin\theta, \tag{2}$$

где p — постоянная отождествляемая с сосредоточенной силой; r, θ — полярные координаты (рис. 1). Компоненты напряжений, согласно (2), имеют вид

$$\sigma_r = -\frac{2p}{\pi}\frac{\cos\theta}{r}, \quad \sigma_\theta = \tau_{r0} = 0, \tag{3}$$

а компонента смещений в направлении r будет равна

$$u = -\frac{2p}{\pi E}\cos\theta \ln r + f(\theta), \tag{4}$$

где E — модуль Юнга; $f(\theta)$ — функция, не зависящая от r. Необходимо заметить, что условия для определения $f(\theta)$ нет. В [4] предлагается определять $f(\theta)$, исходя из того, что для каждого значения θ на оси r существует точка, где нет смещения в направлении r, но эти точки никак не определены, т. е. решение (2) некорректно. Как следует из (4), при удалении от начала координат смещения возрастают до бесконечности по логарифмическому закону. Избавиться от такой некорректности предлагается, удалив окрестность точки x = 0 [4], но тогда исчезнет сила p, которая заменится реакциями. Однако найти реакции, соответствующие этому виду распределения напряжений, практически невозможно.

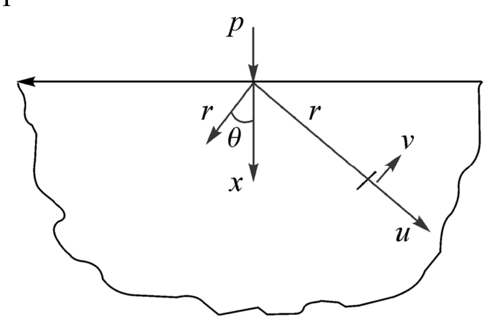

Рис. 1. Схема сосредоточенной силы p, действующей на полуплоскость

Решение для полуплоскости, согласно (3), имеет на бесконечности нулевые значения $\sigma_r = 0$. По степени затухания σ_r из (3) при $r \to \infty$ определяется главный вектор напряжений, отличный от нуля и равный p. По классификации общей теории уравнений математической физики задача (2) относится к классу задач Коши. Для корректного решения требуется, чтобы граничные условия на бесконечности исчезли (т. е. стремились к нулю со скоростью $1/r^{1+\varepsilon}$, $\varepsilon > 0$, а не $1/r$).

Таким образом, бесконечность напряжений и неопределенность смещений в точке $x = 0$, возрастание до бесконечности смещений v при стремлении к $x = 0$, неопределенность малого радиуса при вырезании окрестности точки $x = 0$ и противоречие с классом задач Коши характеризуют некорректность решений (2) – (4).

ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ ТРЕЩИН

В работе [5] обсуждалось классическое решение для плоскости, ослабленной конечным прямолинейным разрезом, моделирующим трещину. Показана некорректность этого решения. Так как аналитического решения такой задачи нет, то необходимо обратиться к численному расчету. Будем считать, что трещина находится в поле сил тяжести пород (1). Область расчета содержит бесконечно удаленную точку и поэтому задача попадает в класс задач Коши. Сжимающие усилия на берегах разреза

$$\sigma_y = \sigma_0 = \text{const},$$

где σ_0 — определяется из (1). Решаем задачу для невесомой плоскости, сформулировав на трещине граничные условия в виде

$$\sigma_y = \sigma_1, \quad \tau = 0, \tag{5}$$

при знании σ_1, раскрывающем разрез. Можно рассматривать задачу, переходя к двум полуплоскостям, как показано на рис. 2, что уменьшает сложность вычисления. Если учитывать различие пород для $y \geq 0$ и $y \leq 0$, характеризующих полуплоскости, то придется вернуться к формулировке граничных условий для кусочно-однородной плоскости, представленной на рис. 3. Поскольку в общем случае задачи для трещины попадают в ряд проблем Коши, то необходимо переходить к решению дополнительной задачи (5). Рассмотренный статический расчет позволяет перейти к учету собственного веса пород.

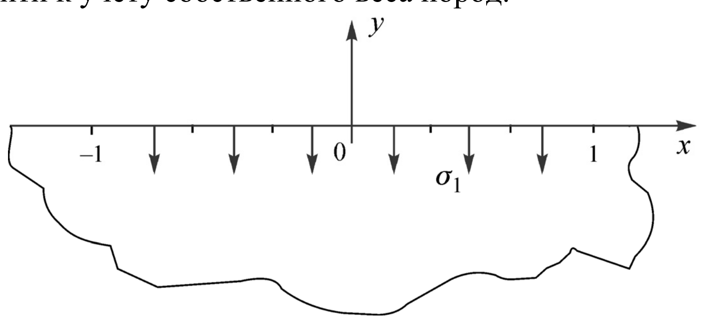

Рис. 2. Задача для полуплоскости, моделирующая трещину

Согласно кинематической теории [3], дополнительное решение (5) используется для расчета напряженно-деформированного состояния массива и установления по нему зоны влияния трещины. Следуя [3], проводится уточнение исходных параметров, характеризующих массив с трещиной, с помощью постановки обратных задач. При малых значениях σ_2 разрез раскрывается и появляется возможность реализоваться собственному весу. Смещения от собственного веса пород существенно больше, чем раскрытие разреза от σ_2. С ростом σ_2 наступает момент, когда раскрытие разреза от σ_2 превосходит смещения от собственного веса. Можно найти значение σ_2, вызывающее раскрытие трещины. Определяющим при этом будут натурные смещения берегов разреза, для которого выполняется расчет.

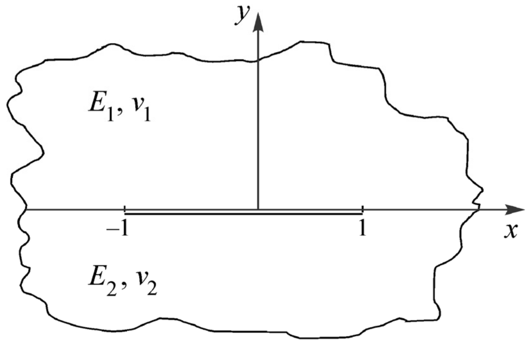

Рис. 3. Схема кусочно-однородного массива пород с трещиной

ЗАДАЧИ КОШИ ПРИ ЧИСЛЕННОМ СЧЕТЕ

Управление горным давлением при ведении очистных работ требует знания напряженно-деформированного состояния массива около выработок, что привело к созданию аналитических и численных методов решения задач геомеханики. Их развитие сопровождалось появлением класса некорректных задач, в решении которых фигурировали бесконечные напряжения и смещения и которые относятся к разряду задач теории упругости. Первоначально некорректные задачи возникли при рассмотрении аналитических решений. С появлением возможности численных расчетов (например, метод конечных элементов) количество некорректных задач резко возросло [1, 2, 6, 7]. При любом численном расчете форма выработки не существенна и поэтому, как правило, аналитическое решение не может быть получено, но это не означает, что не требуется доказательства существования, единственности и непрерывной зависимости решения от исходных данных.

К задачам Коши относятся задачи, область расчета которых содержит бесконечно удаленную точку. Многие задачи механики горных пород сводятся к рассмотрению плоскости с отверстием или пространства с полостью, т. е. автоматически попадают в класс задач Коши при математическом моделировании напряженно-деформированного состояния около ослаблений. Согласно общей теории уравнений математической физики, чтобы исключить возможную некорректность, граничные условия должны исчезать на бесконечности. При численном расчете формулировка граничных условий предполагает два типа задач. К первому типу относятся задачи, в которых после проведения выработки полагают, что на контуре заданы нулевые значения нормальных и касательных напряжений. Это некорректное решение, так как требуется доказать, что на контуре действительно нулевые граничные условия. Ко второму типу относятся задачи, когда на контуре действуют дополнительно к условиям на бесконечности отличные от нуля граничные условия. Все известные решения этого типа некорректны.

Как показано в [5], для получения корректного решения задачи Коши необходимо рассмотреть дополнительную задачу. Такое рассмотрение необходимо и в проблеме учета собственного веса пород, т. е. кинематического аспекта, использующего дополнительное решение и существенно увеличивающего возможности математического моделирования в геомеханике. Численный расчет дополнительной задачи и учет собственного веса пород позволяют уточнить априорные данные о механических характеристиках и поле напряжений нетронутого массива.

ВЫВОДЫ

Установлена некорректность аналитических решений задач для областей с угловыми точками, включая математические разрезы, моделирующие трещины и построенные на их основе теории (разрушения, трещин и др.). Проанализирована задача Коши для трещины в линейном поле исходных напряжений и предложен алгоритм ее корректной формулировки. Доказана некорректность численных решений задач геомеханики, которые не сводятся к решению дополнительной задаче.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ / REFERENCES

1. **Mikhlin S. G.** Stresses in coalbed-overlying rocks, Izv. AN SSSR. OTN, 1942, no. 7, 8, pp. 13 – 28. [**Михлин С. Г.** О напряжениях в породе над угольным пластом // Изв. АН СССР. ОТН. — 1942. — № 7, 8. — С. 13 – 28.]
2. **Barenblatt G. I. and Khristianovich S. A.** Roof falls in mines, Izv. AN SSSR. OTN, 1955, no. 11, pp. 73 – 86. [**Баренблатт Г. И., Христианович С. А.** Об обрушении кровли при горных выработках // Изв. АН СССР. ОТН. — 1955. — № 11. — С. 73 – 86.]
3. **Kurlenya M. V. and Mirenkov V. E.** Phenomenological model of rock deformation around mine workings, Journal of Mining Science, 2018, vol. 54, no. 2, pp. 181 – 186. [**Курленя М. В., Миренков В. Е.** Феноменологическая модель деформирования горных пород вокруг выработок // ФТПРПИ. — 2018. — № 2. — С. 3 – 9.]
4. **Timoshenko S. P. and Goodier J. N.** Theory of elasticity, McGraw Hill Book Company, 1951. [**Тимошенко С. П., Гудьер Д. Н.** Теория упругости. — М.: Наука, 1975. — 576 с.]
5. **Mirenkov V. E.** Ill-posed problems of geomechanics, Journal of Mining Science, 2018, vol. 54, no. 3, pp. 361 – 367. [**Миренков В. Е.** О некорректных задачах в геомеханике // ФТПРПИ. — 2018. — № 3. — С. 3 – 10.]
6. **Carranza-Torres C., Rysdahe B., and Vasim M.** On the elastic analysis of a circular lined tunnee considering the delayed installation of the support, Int. J. of Rock Mech. and Mining Sciences, vol. 61, 2013, pp. 57 – 85.
7. **Badrul Alam A. K. M. and Masaki Niioka Fujii.** Daisuke Fukuda, Jun-ichi Kodama. Effect of confining pressure on the permeability of three rock types under compression, Int. J. of Rock Mech. and Mining Sciences, vol. 65, 2014, pp. 49 – 61.