УДК 532.592; 517.958

ГАЗОДИНАМИЧЕСКАЯ АНАЛОГИЯ ДЛЯ ВИХРЕВЫХ ТЕЧЕНИЙ СО СВОБОДНОЙ ГРАНИЦЕЙ

В. М. Тешуков

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 630090 Новосибирск
E-mail: teshukov@hydro.nsc.ru

Классические уравнения теории мелкой воды, описывающие распространение длинных волн на потоке без сдвига скорости по вертикали, совпадают с уравнениями, описывающими изоэнтропическое движение политропного газа при показателе политропы $\gamma = 2$ (в теории волновых движений жидкости этот факт называют газодинамической аналогией). Выведена новая математическая модель теории длинных волн, описывающая сдвиговые течения жидкости со свободной границей. Показано, что в случае одномерного движения уравнения новой модели совпадают с уравнениями, описывающими неизоэнтропические движения газа при специальном выборе уравнения состояния, а в многомерном случае новая система уравнений длинных волн существенно отличается от модели движения газа. В общем случае установлено, что полученная система уравнений является системой гиперболического типа. Найдены скорости распространения волновых возмущений.

Ключевые слова: длинноволновое приближение, сдвиговое течение, свободная граница, мелкая вода, газодинамическая аналогия.

1. Осреднение уравнений длинных волн. Движение идеальной несжимаемой жидкости в слое со свободной границей описывается уравнениями Эйлера

$$\rho\,\frac{d\boldsymbol{u}}{dt} + \nabla_2 p = 0, \qquad \rho\,\frac{du_3}{dt} + p_{x_3} = -\rho g, \qquad \operatorname{div}_2 \boldsymbol{u} + u_{3x_3} = 0, \tag{1.1}$$

где

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \boldsymbol{u}\cdot\nabla_2 + u_3\,\frac{\partial}{\partial x_3}.$$

На свободной границе $x_3 = h(t, x_1, x_2)$ должны выполняться кинематическое и динамическое граничные условия

$$h_t + (\boldsymbol{u}_2\cdot\nabla_2)h = u_3, \qquad p = p_0 = \text{const}, \tag{1.2}$$

на ровном дне $x_3 = 0$ — условие непротекания

$$u_3 = 0. \tag{1.3}$$

В (1.1)–(1.3) t — время; $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2)$ — радиус-вектор в горизонтальной плоскости; x_3 — вертикальная координата; $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2)$ — горизонтальная скорость; u_3 — вертикальная компонента скорости жидкости; ρ — плотность; $h(t, x_1, x_2)$ — глубина; p — давление; g — ускорение свободного падения; ∇_2, div_2 — градиент и дивергенция, вычисленные по векторной переменной $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2)$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 04-01-00253).

Введем безразмерные переменные

$$\boldsymbol{x}' = \frac{\boldsymbol{x}}{L}, \quad x_3' = \frac{x_3}{H}, \quad t' = \frac{Ut}{L}, \quad \boldsymbol{u}' = \frac{\boldsymbol{u}}{U},$$
$$u_3' = \frac{Lu_3}{UH}, \quad h' = \frac{h}{H}, \quad p' = \frac{p}{RU^2}, \quad \rho' = \frac{\rho}{R}.$$

В этих переменных уравнения Эйлера (1.1) имеют вид

$$\rho\,\frac{d\boldsymbol{u}}{dt} + \nabla_2 p = 0, \qquad \varepsilon^2\rho\,\frac{du_3}{dt} + p_{x_3} = -\rho\,\mathrm{Fr}^{-2}, \qquad \mathrm{div}_2\,\boldsymbol{u} + u_{3x_3} = 0 \tag{1.4}$$

(штрихи в обозначениях новых безразмерных переменных опущены; $\mathrm{Fr} = U/\sqrt{gH}$ — число Фруда; $\varepsilon = H/L$). Исключив давление p из системы уравнений (1.4), получим уравнение Гельмгольца, описывающее эволюцию безразмерного вихря $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3) = (\varepsilon^2 u_{3x_2} - u_{2x_3}, u_{1x_3} - \varepsilon^2 u_{3x_1}, u_{2x_1} - u_{1x_2})$:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\omega}_t + (\boldsymbol{u}\cdot\nabla_2)\boldsymbol{\omega} + u_3\boldsymbol{\omega}_{x_3} = (\varepsilon^2 u_{3x_2} - u_{2x_3})\boldsymbol{U}_{x_1} + \\ + (u_{1x_3} - \varepsilon^2 u_{3x_1})\boldsymbol{U}_{x_2} + (u_{2x_1} - u_{1x_2})\boldsymbol{U}_{x_3}\end{aligned} \tag{1.5}$$

($\boldsymbol{U} = (u_1, u_2, u_3)$). Проецируя уравнение Гельмгольца (1.5) на оси x_1, x_2, получаем уравнения с малой правой частью порядка $O(\varepsilon^2)$:

$$\begin{aligned}(u_{1x_3})_t + (\boldsymbol{u}\cdot\nabla_2)u_{1x_3} + u_3(u_{1x_3})_{x_3} + u_{1x_2}u_{2x_3} - u_{2x_2}u_{1x_3} = O(\varepsilon^2),\\ (u_{2x_3})_t + (\boldsymbol{u}\cdot\nabla_2)u_{2x_3} + u_3(u_{2x_3})_{x_3} + u_{2x_1}u_{1x_3} - u_{1x_1}u_{2x_3} = O(\varepsilon^2).\end{aligned} \tag{1.6}$$

При выводе модели теории длинных волн членами порядка $O(\varepsilon^2)$ в уравнениях (1.6) можно пренебречь. Тогда уравнение для вертикальной компоненты импульса сводится к гидростатическому закону распределения давления по глубине:

$$p_{x_3} = -\rho\,\mathrm{Fr}^{-2}, \qquad p - p_0 = \rho\,\mathrm{Fr}^{-2}(h - x_3).$$

Используя это представление, получаем приближенные уравнения модели длинных волн, распространяющихся на сдвиговом течении:

$$\frac{d\boldsymbol{u}}{dt} + \mathrm{Fr}^{-2}\,\nabla_2 h = 0, \qquad \mathrm{div}_2\,\boldsymbol{u} + u_{3x_3} = 0, \qquad h_t + (\boldsymbol{u}^h\cdot\nabla_3)h = u_3^h. \tag{1.7}$$

Здесь $\boldsymbol{u}^h$, u_3^h — значения компонент вектора скорости на свободной границе $x_3 = h(t, x_1, x_2)$. На дне $x_3 = 0$ решение системы (1.7) должно удовлетворять условию (1.3).

Решения системы (1.4), удовлетворяющие условию $S = (u_{1x_3})^2 + (u_{2x_3})^2 \neq 0$, будем называть течениями со сдвигом скорости по вертикали, или сдвиговыми течениями. Соответственно в течении без сдвига скорости $u_{1x_3} = u_{2x_3} = 0$. Модель (1.7) сводится к системе интегродифференциальных уравнений, к которой применима теория обобщенных характеристик (см. [1, 2]), что позволяет изучить общие свойства длинных волн, распространяющихся на сдвиговом течении. Ниже будут получены более простые модели, в которых сдвиговый характер течения учитывается за счет введения некоторых средних характеристик сдвига скорости по вертикали.

В классе течений с достаточно малой величиной S, осредняя по глубине уравнения (1.7), можно получить классические уравнения теории мелкой воды. Интегрируя (1.7) по x_3 от 0 до h и учитывая граничные условия, получаем

$$\Big(\int\limits_0^h \boldsymbol{u}\,dx_3\Big)_t + \mathrm{div}\,\Big(\int\limits_0^h (\boldsymbol{u}\otimes\boldsymbol{u})\,dx_3\Big) + \frac{\mathrm{Fr}^{-2}}{2}\nabla_2(h^2) = 0, \tag{1.8}$$

$$h_t + \operatorname{div}\Big(\int\limits_0^h \boldsymbol{u}\,dx_3\Big) = 0,$$

где $(\boldsymbol{a}\otimes\boldsymbol{b})$ — диада векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$. Вводя осредненную по глубине горизонтальную скорость

$$\bar{\boldsymbol{u}} = h^{-1}\int\limits_0^h \boldsymbol{u}\,dx_3,$$

интеграл от вектора $\boldsymbol{u}$ по глубине, входящий в уравнения (1.8), можно заменить выражением $h\bar{\boldsymbol{u}}$. Однако интегралы от квадратичных по скорости выражений, входящие в уравнения (1.8), не выражаются через осредненную скорость в общем сдвиговом течении. В гидравлике для этих интегралов используются эмпирические формулы вида [3]

$$\int\limits_0^h (\boldsymbol{u}\otimes\boldsymbol{u})\,dx_3 = \alpha h(\bar{\boldsymbol{u}}\otimes\bar{\boldsymbol{u}}),$$

где α — эмпирический поправочный коэффициент. Отметим, что использование этого соотношения приводит к потере инвариантности получаемой системы уравнений относительно преобразования Галилея, несмотря на то что система (1.8) такое преобразование допускает.

В работе [4] в одномерном случае система уравнений (1.8) замыкалась другим эмпирическим соотношением:

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\int\limits_0^h (u-\bar{u})^2\,dx_3 = gH\,\frac{\partial h}{\partial x_1}$$

(H — некоторая константа). Однако обоснование этого соотношения не приведено.

Ниже получена модель, в среднем приближенно учитывающая сдвиговый характер течения. При этом эмпирические формулы не привлекаются. Используя очевидное тождество $\boldsymbol{u} = \bar{\boldsymbol{u}} + (\boldsymbol{u}-\bar{\boldsymbol{u}})$, вычисляем тензор $\boldsymbol{u}\otimes\boldsymbol{u}$ в виде

$$\boldsymbol{u}\otimes\boldsymbol{u} = \bar{\boldsymbol{u}}\otimes\bar{\boldsymbol{u}} + \bar{\boldsymbol{u}}\otimes(\boldsymbol{u}-\bar{\boldsymbol{u}}) + (\boldsymbol{u}-\bar{\boldsymbol{u}})\otimes\bar{\boldsymbol{u}} + (\boldsymbol{u}-\bar{\boldsymbol{u}})\otimes(\boldsymbol{u}-\bar{\boldsymbol{u}}).$$

При интегрировании этого выражения от 0 до h линейные по $(\boldsymbol{u}-\bar{\boldsymbol{u}})$ члены дают нулевой вклад. В результате получаем представление

$$\int\limits_0^h (\boldsymbol{u}\otimes\boldsymbol{u})\,dx_3 = h(\bar{\boldsymbol{u}}\otimes\bar{\boldsymbol{u}}) + P,$$

где

$$P = \int\limits_0^h (\boldsymbol{u}-\bar{\boldsymbol{u}})\otimes(\boldsymbol{u}-\bar{\boldsymbol{u}})\,dx_3.$$

Используя тензор P, уравнения (1.8) можно записать в виде

$$\begin{gathered} h_t + \operatorname{div}_2(h\bar{\boldsymbol{u}}) = 0, \\ (h\bar{\boldsymbol{u}})_t + \operatorname{div}_2(h(\bar{\boldsymbol{u}}\otimes\bar{\boldsymbol{u}}) + P) + (1/2)\,\mathrm{Fr}^{-2}\,\nabla_2(h^2) = 0. \end{gathered} \tag{1.9}$$

Полученная система уравнений не замкнута, так как наряду с h, $\bar{\boldsymbol{u}}$ в ней являются неизвестными компоненты тензора P:

$$P_{ij} = \int\limits_0^h (u_i - \bar{u}_i)(u_j - \bar{u}_j)\, dx_3.$$

Отметим, что уравнения (1.8) имеют частные решения вида

$$u_1 = \omega y + u_0(t,x), \quad u_2 = 0, \quad h = h(t,x) \qquad (\omega = \mathrm{const}).$$

Вычисляя компоненту P_{11} на этом решении, получаем

$$P_{11} = \omega^2 h^3/12. \tag{1.10}$$

В общем случае компоненты P_{ij} не выражаются через другие искомые функции. Получим уравнения, определяющие эволюцию этих компонент. Осредняя по глубине следствия уравнений (1.8)

$$\frac{d}{dt}\,(u_i u_j) + \mathrm{Fr}^{-2}(h_{x_i} u_j + h_{x_j} u_i) = 0,$$

имеем

$$\frac{\partial}{\partial t}\,(h\bar{u}_i\bar{u}_j + P_{ij}) + \sum_{k=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x_k}\,(h\bar{u}_i\bar{u}_j\bar{u}_k + \bar{u}_k P_{ij} + \bar{u}_i P_{jk} + \bar{u}_j P_{ik} + P_{ijk}) + {} + \mathrm{Fr}^{-2}\, h(\bar{u}_j h_{x_i} + \bar{u}_i h_{x_j}) = 0.$$

Здесь

$$P_{ijk} = \int\limits_0^h (u_i - \bar{u}_i)(u_j - \bar{u}_j)(u_k - \bar{u}_k)\, dx_3$$

представляют собой компоненты нового неизвестного тензора третьего ранга, выраженные через третьи моменты разностей истинных и осредненных скоростей $(\boldsymbol{u} - \bar{\boldsymbol{u}})$ (аналогов пульсационных скоростей в теории турбулентных течений). Для замыкания системы полученных уравнений необходимы дополнительные уравнения, описывающие эволюцию P_{ijk}. Вычисления, аналогичные проведенным выше, показывают, что эти дополнительные уравнения содержат интегралы, зависящие от моментов "пульсационных" скоростей четвертого порядка. Продолжая данный процесс неограниченно, получим систему с бесконечным числом уравнений и неизвестных функций. Эта ситуация характерна для случаев осреднения нелинейных уравнений (аналогичная ситуация возникает при построении замкнутой системы уравнений для моментов пульсационных скоростей в теории турбулентности). Таким образом, в общем сдвиговом течении осредненные уравнения не замыкаются через конечное число шагов. Описание движения в терминах средних величин сводится к решению бесконечной системы дифференциальных уравнений. Ниже показано, что в классе слабосдвиговых течений такое замыкание можно осуществить в рамках приближенной теории.

Из уравнений (1.6) следует, что если при $t = 0$

$$u_{1x_3} = O(\varepsilon^\alpha), \qquad u_{2x_3} = O(\varepsilon^\alpha),$$

то для всех $t > 0$

$$u_{1x_3} = O(\varepsilon^\beta), \qquad u_{2x_3} = O(\varepsilon^\beta)$$

$(\beta = \min(2,\alpha))$.

Если $\beta \geqslant 1$, то $|S| \ll \varepsilon^2$ и движение жидкости со свободной границей можно описывать классическими уравнениями мелкой воды

$$h_t + \operatorname{div}_2(h\bar{\boldsymbol{u}}) = 0,$$
$$(h\bar{\boldsymbol{u}})_t + \operatorname{div}_2(h(\bar{\boldsymbol{u}} \otimes \bar{\boldsymbol{u}})) + (1/2)\,\mathrm{Fr}^{-2}\,\nabla_2(h^2) = 0.$$

Действительно, в уравнениях (1.8) можно отбросить тензор P, имеющий порядок малости $\varepsilon^{2\beta}$ (учитывая, что $\varepsilon^{2\beta} \ll \varepsilon^2$), поскольку

$$|\boldsymbol{u} - \bar{\boldsymbol{u}}| = O(\varepsilon^{\beta}), \qquad |P_{ij}| = O(\varepsilon^{2\beta}), \qquad |P_{ijk}| = O(\varepsilon^{3\beta}).$$

При этом допускается ошибка, не превышающая величину порядка $O(\varepsilon^2)$.

Отметим, что классическая система уравнений теории мелкой воды с точностью до переобозначения искомых функций совпадает с уравнениями, описывающими изоэнтропические движения политропного газа при $\gamma = 2$. При этом уравнение состояния "газа" имеет вид [5, 6]

$$p(h) = \mathrm{Fr}^{-2}\,h^2/2.$$

Если $\beta < 1$, то $|P_{ij}| = O(\varepsilon^{2\beta}) \gg O(\varepsilon^2)$ и, несмотря на то что при малых ε члены P_{ij} являются малыми, их значение существенно превышает ошибку, которая допускалась при выводе модели длинноволнового приближения (1.8). Следовательно, при построении приближенной теории, учитывающей малые величины $O(\varepsilon^{2\beta}) \gg O(\varepsilon^2)$, члены P_{ij} также должны учитываться. При этом члены P_{ijk}, имеющие порядок $O(\varepsilon^{3\beta})$, можно отбросить, так как при $\beta < 1$ $\varepsilon^{3\beta} \ll \varepsilon^{2\beta}$.

В дальнейшем будем считать, что решение уравнений (1.6) описывает движение со слабым сдвигом, если

$$u_{1x_3} = O(\varepsilon^{\beta}), \qquad u_{2x_3} = O(\varepsilon^{\beta})$$

при $\beta < 1$.

В классе движений со слабым сдвигом система уравнений (1.8), (1.9) замыкается, если в уравнениях (1.9) отбросить моменты третьего порядка. В результате для определения h, $\bar{u}$, P_{ij} имеем уравнения

$$\begin{gathered} h_t + \operatorname{div}_2(h\bar{\boldsymbol{u}}) = 0, \\ (h\bar{\boldsymbol{u}})_t + \operatorname{div}_2(h(\bar{\boldsymbol{u}} \otimes \bar{\boldsymbol{u}}) + P) + (1/2)\,\mathrm{Fr}^{-2}\,\nabla_2(h^2) = 0; \end{gathered} \tag{1.11}$$

$$(P_{ij})_t + \operatorname{div}(P_{ij}\bar{\boldsymbol{u}}) + \sum_{k=1}^{2}\Big(P_{jk}\,\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_k} + P_{ik}\,\frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_k}\Big) = 0. \tag{1.12}$$

Таким образом, получена новая математическая модель, учитывающая в среднем влияние слабого сдвига горизонтальной скорости по вертикали и обобщающая классическую модель теории мелкой воды.

Вместо переменных P_{ij} введем переменные Q_{ij}, связанные с ними соотношением

$$P_{ij} = h^3 Q_{ij}/12,$$

записанным по аналогии с (1.10). В новых переменных уравнения (1.11), (1.12) имеют вид

$$h_t + \operatorname{div}_2(h\bar{\boldsymbol{u}}) = 0,$$

$$\frac{d\bar{u}_1}{dt} + \frac{h^2}{12}\,\frac{\partial Q_{11}}{\partial x_1} + \frac{h^2}{12}\,\frac{\partial Q_{12}}{\partial x_2} + \Big(\frac{hQ_{11}}{4} + \mathrm{Fr}^{-2}\Big)\frac{\partial h}{\partial x_1} + \frac{hQ_{12}}{4}\,\frac{\partial h}{\partial x_2} = 0,$$

$$
\begin{gathered}
\frac{d\bar u_2}{dt}+\frac{h^2}{12}\,\frac{\partial Q_{12}}{\partial x_1}+\frac{h^2}{12}\,\frac{\partial Q_{22}}{\partial x_2}+\frac{hQ_{12}}{4}\,\frac{\partial h}{\partial x_1}+\Big(\frac{hQ_{22}}{4}+\mathrm{Fr}^{-2}\Big)\frac{\partial h}{\partial x_2}=0,\\
\frac{dQ_{11}}{dt}+2Q_{12}\,\frac{\partial \bar u_1}{\partial x_2}-2Q_{11}\,\frac{\partial \bar u_2}{\partial x_2}=0,\\
\frac{dQ_{12}}{dt}-Q_{12}\,\mathrm{div}_2(\bar{\boldsymbol u})+Q_{11}\,\frac{\partial \bar u_2}{\partial x_1}+Q_{22}\,\frac{\partial \bar u_1}{\partial x_2}=0,\\
\frac{dQ_{22}}{dt}+2Q_{12}\,\frac{\partial \bar u_2}{\partial x_1}-2Q_{22}\,\frac{\partial \bar u_1}{\partial x_1}=0.
\end{gathered}
\tag{1.13}
$$

Из определения величин P_{ij} и неравенства Коши следует, что

$$
P_{11}P_{22}\geqslant P_{12}^2.
$$

Отметим, что компоненты Q_{ij} связаны аналогичным неравенством

$$
Q_{11}Q_{22}\geqslant Q_{12}^2. \tag{1.14}
$$

Из системы (1.13) для величины $J=Q_{11}Q_{22}-Q_{12}^2$ можно получить уравнение

$$
\frac{dJ}{dt}-2J\,\mathrm{div}_2\,\boldsymbol u=0,
$$

из которого следует, что если при $t=0$ выполняется равенство $J=0$ (либо неравенство $J\geqslant 0$), то $J=0$ ($J\geqslant 0$) при всех значениях t. Заметим также, что при $t=0$ J обращается в нуль в том случае, когда начальные значения горизонтальных компонент скорости линейно зависят от вертикальной переменной x_3, т. е. когда при $t=0$ выполнены равенства $u_{1x_3x_3=0}$, $u_{2x_3x_3=0}$.

2. Гиперболичность уравнений длинных волн. Для того чтобы найти характеристики системы уравнений (1.13), представим ее в векторном виде

$$
\boldsymbol U_t+A\boldsymbol U_{x_1}+B\boldsymbol U_{x_2}=0,
$$

где $\boldsymbol U=(h,u_1,u_2,Q_{11},Q_{12},Q_{22})$; A, B — матрицы размера 6×6. Пусть $\boldsymbol\xi=(\tau,\xi,\eta)$ — вектор нормали к характеристике. Тогда характеристическая матрица $A(\boldsymbol\xi)=\tau I+\xi A+\eta B$ системы (1.13) имеет вид

$$
\begin{pmatrix}
\chi & \xi h & \eta h & 0 & 0 & 0\\
\xi\Big(\dfrac{hQ_{11}}{4}+\mathrm{Fr}^{-2}\Big)+\dfrac{\eta hQ_{12}}{4} & \chi & 0 & \dfrac{\xi h^2}{12} & \dfrac{\eta h^2}{12} & 0\\
\dfrac{\xi hQ_{12}}{4}+\eta\Big(\dfrac{hQ_{22}}{4}+\mathrm{Fr}^{-2}\Big) & 0 & \chi & 0 & \dfrac{\xi h^2}{12} & \dfrac{\eta h^2}{12}\\
0 & 2\eta Q_{12} & -2\eta Q_{11} & \chi & 0 & 0\\
0 & \eta Q_{22}-\xi Q_{12} & -\eta Q_{12}+\xi Q_{11} & 0 & \chi & 0\\
0 & -2\xi Q_{22} & 2\xi Q_{12} & 0 & 0 & \chi
\end{pmatrix}.
$$

Здесь и далее u_1, u_2 — обозначения компонент осредненной скорости жидкости (черта в обозначениях опущена); $\chi=\tau+u_1\xi+u_2\eta$.

Простое, но громоздкое вычисление дает следующее выражение для $\det A(\boldsymbol\xi)$:

$$
\begin{aligned}
\det A(\boldsymbol\xi)=\chi^2(\chi^2-(h^2/12)(Q_{11}\xi^2+2Q_{12}\xi\eta+Q_{22}\eta^2))\times&\\
\times(\chi^2-(h^2/4)(Q_{11}\xi^2+2Q_{12}\xi\eta+Q_{22}\eta^2)-\mathrm{Fr}^{-2}\,h(\xi^2+\eta^2)).&
\end{aligned}
\tag{2.1}
$$

Зададим характеристическую поверхность уравнением $H(t,x_1,x_2)=0$. Тогда для получения дифференциальных уравнений характеристик вектор (τ,ξ,η) в (2.1) нужно заменить на вектор (H_t, H_{x_1}, H_{x_2}) и приравнять к нулю $\det A(H_t, H_{x_1}, H_{x_2})$. В результате получаем семейство контактных характеристик (соответствующий характеристический корень имеет кратность два)

$$H_t + u_1 H_{x_1} + u_2 H_{x_2} = 0 \tag{2.2}$$

и четыре дополнительных семейства характеристик

$$H_t + u_1 H_{x_1} + u_2 H_{x_2} = \pm\sqrt{(h^2/12)(Q_{11}H_{x_1}^2 + 2Q_{12}H_{x_1}H_{x_2} + Q_{22}H_{x_2}^2)}\,,$$

$$H_t + u_1 H_{x_1} + u_2 H_{x_2} = \\ = \pm\sqrt{(h/\operatorname{Fr}^2)(H_{x_1}^2 + H_{x_2}^2) + (h^2/4)(Q_{11}H_{x_1}^2 + 2Q_{12}H_{x_1}H_{x_2} + Q_{22}H_{x_2}^2)}\,.$$

Неотрицательность квадратичной формы

$$Q_{11}H_{x_1}^2 + 2Q_{12}H_{x_1}H_{x_2} + Q_{22}H_{x_2}^2$$

обеспечивается неравенством (1.14). Следовательно, при выполнении неравенства (1.14) система (1.13) является гиперболической. Отметим, что если в предыдущих формулах пренебречь членами, содержащими Q_{ij}, то останутся только контактные характеристики (2.2) и аналоги звуковых характеристик газовой динамики

$$H_t + u_1 H_{x_1} + u_2 H_{x_2} = \pm(\sqrt{h}/\operatorname{Fr})\sqrt{H_{x_1}^2 + H_{x_2}^2}\,.$$

3. Одномерное движение. В случае одномерного движения уравнения (1.8), (1.9) имеют вид

$$h_t + (hu)_x = 0, \quad (hu)_t + (hu^2)_x + (\operatorname{Fr}^{-2} h^2/2 + P)_x = 0, \quad P_t + uP_x + 3Pu_x = 0. \tag{3.1}$$

Выполнив замену искомой функции

$$P = \omega^2 h^3/12$$

(величина ω имеет смысл средней завихренности), последнее уравнение системы (3.1) преобразуем к виду

$$(\omega^2)_t + u(\omega^2)_x = 0.$$

Из этого уравнения следует, что ω^2 сохраняется вдоль траекторий частиц, как это имеет место для энтропии в газовой динамике. Следствием системы (3.1) является закон сохранения энергии

$$\frac{\partial}{\partial t}\Big(\frac{hu^2}{2} + \frac{\omega^2 h^3}{24} + \frac{\operatorname{Fr}^{-2} h^2}{2}\Big) + \Big(\frac{hu^3}{2} + \frac{1}{8}\,\omega^2 h^3 u + \operatorname{Fr}^{-2} h^2 u\Big)_x = 0.$$

Определим внутреннюю энергию “газа” e и давление $\tilde p$ формулами

$$e = \omega^2 h^2/24 + \operatorname{Fr}^{-2} h/2, \qquad \tilde p = \operatorname{Fr}^{-2} h/2 + \omega^2 h^3/12.$$

Вычислим

$$de + \tilde p\, d\Big(\frac{1}{h}\Big) = \frac{h^2}{24}\, d\omega.$$

Определяя температуру “газа” $T = \omega^2 h^2/24$ и интегрируя основное термодинамическое тождество

$$ds = \frac{1}{T}\Big(de + \tilde p\, d\Big(\frac{1}{h}\Big)\Big) = \frac{d\omega^2}{\omega^2},$$

находим энтропию "газа":

$$s = \ln(\omega^2). \tag{3.2}$$

Таким образом, в одномерном случае система уравнений (1.13) сведена к уравнениям неизоэнтропической газовой динамики:

$$\begin{gathered} h_t + (hu)_x = 0, \qquad (hu)_t + (hu^2)_x + \tilde{p}_x = 0, \\ (h(u^2/2 + e))_t + (hu(u^2/2 + e + \tilde{p}/h))_x = 0. \end{gathered} \tag{3.3}$$

Уравнения состояния "газа" имеют вид

$$\tilde{p}(h,s) = \mathrm{Fr}^{-2}\, h^2/2 + e^s h^3/12, \qquad e(h,s) = \mathrm{Fr}^{-2}\, h/2 + e^s h^2/24,$$

где h играет роль плотности "газа", а энтропия s связана со средней завихренностью соотношением (3.2).

Отметим, что течения жидкости с постоянной средней завихренностью ($\omega = \mathrm{const}$) соответствуют изоэнтропическим течениям газа, а классические уравнения теории мелкой воды возникают при предельном переходе $s \to -\infty$ в системе (3.3).

Представленное расширение газодинамической аналогии на вихревые движения жидкости позволяет использовать известные классы решений уравнений одномерной неизоэнтропической газовой динамики для приближенного описания движений жидкости в слое со свободной границей. Полученная модель трехмерных вихревых движений со свободной границей требует дальнейшего изучения.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Тешуков В. М.** О гиперболичности уравнений длинных волн // Докл. АН СССР. 1985. Т. 284, вып. 3. С. 555–562.
2. **Ляпидевский В. Ю.** Математические модели распространения длинных волн в неоднородной жидкости / В. Ю. Ляпидевский, В. М. Тешуков. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2000.
3. **Спицын И. П.** Общая и речная гидравлика / И. П. Спицын, В. А. Соколов. Л.: Гидрометеоиздат, 1990.
4. **Karelsky K. V., Petrosyan A. S.** Particular solutions and Riemann problem for modified shallow water equations // Fluid Dynamics Res. 2006. V. 38. P. 339–358.
5. **Стокер Дж. Дж.** Волны на воде. Математическая теория и приложения. М.: Изд-во иностр. лит., 1959.
6. **Уизем Дж.** Линейные и нелинейные волны. М.: Мир, 1977.

Поступила в редакцию 24/XI 2006 г.