

Рис. 3

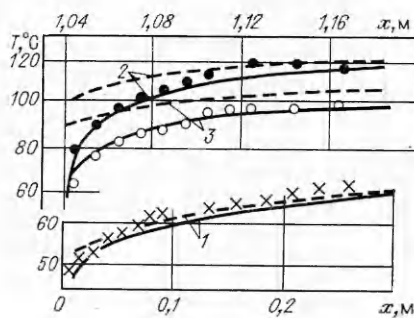


Рис. 4

[2] (линия 3 на рис. 4). Как видно из рис. 3, метод Патанкара — Сполдинга и для этого граничного условия плохо описывает процесс теплообмена вблизи сечения со «скачком». Введение поправочной функции аналогично случаю заданного теплового потока приводит к улучшению согласия между расчетом и экспериментом.

Таким образом, учет продольного конвективного переноса в постановке граничного условия позволил с хорошей точностью рассчитать теплообмен вблизи сечения разрыва теплового состояния поверхности.

Программа Патанкара — Сполдинга с введенной в нее поправочной функцией может быть использована для решения аналогичных задач.

Программа Патанкара — Сполдинга с введенной в нее поправочной функцией может быть использована для решения аналогичных задач.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Эккерт Э. Р., Дрейк Р. М. Теория тепло- и массообмена. — М.; Л.: Госэнергоиздат, 1961.
2. Васечки В. Н., Миронов Б. П., Ярыгина Н. И. Влияние предистории потока на процессы турбулентного теплопереноса // Турбулентный пограничный слой при сложных граничных условиях. — Новосибирск: ИТФ СО АН СССР, 1977.
3. Гартнетт, Эккерт, Биркебак. Анализ основных характеристик турбулентного пограничного слоя с подачей воздуха через тангенциальные щели // Теплопередача. — 1961. — Т. 83, № 3.
4. Браун, Антониа. Расчет турбулентного пограничного слоя за сечением со скачкообразным изменением температуры поверхности // Теплопередача. — 1979. — Т. 101, № 1.
5. Романенко П. Н. Гидродинамика и тепломассообмен в пограничном слое. Справочник. — М.: Энергия, 1974.
6. Патанкар С., Сполдинг Д. Тепло- и массообмен в пограничных слоях. — М.: Энергия, 1971.
7. Дин. Единая формула для полного профиля скорости в турбулентном пограничном слое // ТОИР. — 1976. — Т. 98, № 4.

Поступила 9/VI 1986 г.

УДК 532.135

## НЕСИММЕТРИЧНЫЕ ТЕЧЕНИЯ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ, ОХЛАЖДАЮЩЕЙСЯ В СИММЕТРИЧНЫХ УСЛОВИЯХ

В. В. Грачев, Э. Н. Руманов  
(Черноголовка)

Аппараты, в которых охлаждается жидкость, прогоняемая через пучок «параллельных» трубок (питаемых общим источником), активно используются в промышленности. Среди них трубчатые теплообменники, системы перекачки подогретой нефти по параллельным трубопроводам и др. Практика их эксплуатации показывает, что в некоторых случаях часть труб не работает в нужном технологическом режиме, хотя все трубы находятся в одинаковых условиях. В данной работе исследуется нарушение симметрии течения охлаждающейся жидкости через пару одинаковых параллельных труб.

В [1] показано, что напорно-расходная характеристика (НРХ) потока охлаждающейся вязкой жидкости содержит падающий участок, в пределах которого возможна неустойчивость. В [2], где нагрев не задавался на входе, а возникал за счет диссипации, получена аналогичная НРХ, изучены скачки расхода при плавном изменении напора в окрестности границ падающего участка. Однако при фиксации расхода падающий участок НРХ с точки зрения точечной системы, рассмотренной в [2], устойчив. Постановка задачи о двух трубках [3] позволяет учесть возможное нарушение симметрии течения. В случае охлаждающейся жидкости решение этой задачи показывает, что несимметричные течения формируются при существенно меньших значениях напора, чем в [2, 3].

1. Рассматривается охлаждение вязкой несжимаемой жидкости при течении через две параллельно соединенные трубы с заданным общим расходом. При ряде упрощающих предположений [3] течение описывается следующей системой уравнений в безразмерных переменных:

$$(1.1) \quad \partial\Theta_1/\partial\tau + \omega_1\partial\Theta_1/\partial\xi = -\Theta_1 - \beta(\Theta_1 - \Theta_2);$$

$$(1.2) \quad \partial\Theta_2/\partial\tau + \omega_2\partial\Theta_2/\partial\xi = -\Theta_2 + \beta(\Theta_1 - \Theta_2);$$

$$(1.3) \quad \omega_1 \int_0^1 \exp(-\Theta_1) d\xi = \omega_2 \int_0^1 \exp(-\Theta_2) d\xi = \Pi;$$

$$(1.4) \quad \omega = \omega_1 + \omega_2,$$

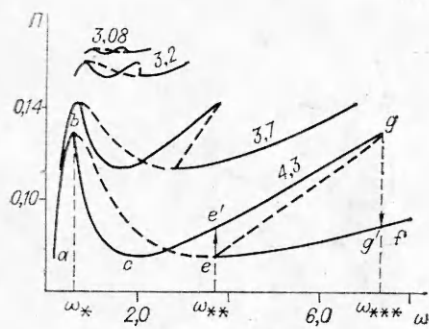
где  $\Theta = (T - T_0)U/RT_0^2$ ;  $\omega = c\rho Q/(2\alpha l\pi r)$ ;  $\tau = 2\alpha t/(c\rho r)$ ;  $\xi = z/l$ ;  $\beta = \alpha_1/\alpha$ ;  $\Pi = \Delta p c \rho r^3/(16\mu(T_0)\alpha l^2)$ ;  $\mu = \mu_0 \exp(U/RT)$ ;  $T$  — температура жидкости;  $T_0$  — температура окружающей среды;  $Q$  — расход;  $c$  — теплоемкость;  $\rho$  — плотность жидкости;  $\alpha$  — коэффициент теплоотдачи;  $r$  — радиус;  $l$  — длина труб;  $z$  — координата вдоль труб;  $t$  — время;  $\alpha_1$  — коэффициент теплообмена между трубами;  $\Delta p$  — перепад давления в трубах между входом и выходом;  $\mu$  — динамическая вязкость жидкости; индексы 1, 2 относятся к первой и второй трубе. При записи температурной зависимости вязкости в уравнении (1.3) использовано преобразование Франк-Каменецкого [4].

В отличие от [3] диссипативное тепловыделение считается пренебрежимо малым, поэтому соответствующие члены в уравнениях опущены. Рассматриваемые эффекты определяются условием на входе

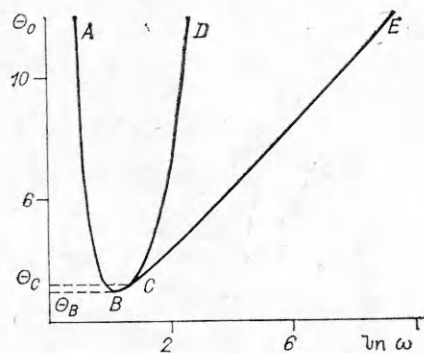
$$(1.5) \quad \xi = 0: \quad \Theta_1 = \Theta_2 = \Theta_0, \quad \Theta_0 = (T^0 - T_0)U/RT_0^2 > 0$$

( $T^0$  — температура жидкости на входе). Кроме того, в (1.1), (1.2) учтен теплообмен между трубами. Известными параметрами считаются общий расход жидкости  $\omega$ , температурный напор на входе в трубы  $\Theta_0$  и коэффициент теплообмена между трубами  $\beta$ . Определению подлежат стационарные профили температуры, расходы жидкости в трубах  $\Theta_1$ ,  $\Theta_2$ ,  $\omega_1$ ,  $\omega_2$  и перепад давления  $\Pi$ .

2. Пусть сначала теплообмен между трубами отсутствует ( $\beta = 0$ ). Тогда, согласно (1.1), (1.2), (1.5), стационарный профиль  $\Theta_1(\xi)$  зависит только от  $\omega_1$ , а  $\Theta_2(\xi)$  — от  $\omega_2$ . Отсюда следует, что каждая из труб имеет НРХ, найденную в [1]. Характеристика системы двух труб получается сложением их НРХ. Действительно, поскольку перепад давления  $\Pi$  на обеих трубах одинаков, расход  $\omega(\Pi) = \omega_1(\Pi) + \omega_2(\Pi)$ . Как показано в [1], при  $\Theta_0 > \Theta_{\min}$  НРХ (для одной трубы)  $N$ -образна, в области  $\Pi_d < \Pi < \Pi_u$  каждому значению  $\Pi$  отвечают три значения  $\omega$  (малое, промежуточное, большое). Их комбинации дают шесть ветвей  $\omega(\Pi)$ . В результате получаются НРХ рассматриваемой системы двух труб, показанные на рис. 1 (рядом с кривыми значения  $\Theta_0$ );  $N$ -образная кривая  $abef$ , подобная НРХ для одной трубы, соответствует симметричному течению с равными расходами и профилями температур в обеих трубах, ветвь  $bcge$  — несимметричным течениям, участок  $bc$  — случаю, когда в одной трубе реализуется течение с малым расходом, а в другой — с промежуточным. Участок  $cg$  отвечает течению с малым расходом в одной трубе и большим в другой,  $ge$  — течению с комбинацией промежуточного и большого значений расхода в трубах. Исследование устойчивости стационарных ре-



Р и с. 1



Р и с. 2

шений к малым возмущениям (см. ниже) показывает, что течения, соответствующие участкам НРХ  $be$  и  $ge$ , неустойчивы (на рис. 1 штриховые кривые).

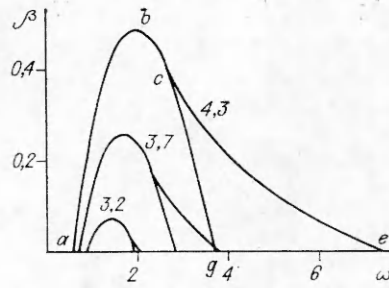
При  $\omega < \omega_*$  общий расход распределяется поровну между трубами, охлаждение жидкости в трубах происходит одинаковым образом, реализуется симметричное течение. При достижении  $\omega_*$  это течение становится неустойчивым, развитие несимметричного течения при  $\omega > \omega_*$  происходит в мягком режиме, перепад давления уменьшается (участок  $bc$  на рис. 1). По мере увеличения  $\omega$  все большая часть жидкости будет течь через одну трубу, значит, температура жидкости в этой трубе будет выше, чем в другой. Несимметричным течение остается, пока  $\omega < \omega_{***}$ , при этом на участке  $cg$  перепад давления возрастает. При  $\omega = \omega_{***}$  происходит восстановление нарушенной симметрии (в жестком режиме), перепад давления скачком падает ( $g \rightarrow g'$  на рис. 1). При дальнейшем увеличении общего расхода течение остается симметричным. Если теперь уменьшать  $\omega$ , то нарушение симметрии течения произойдет при  $\omega = \omega_{**}$  в жестком режиме, а восстановление — при  $\omega = \omega_*$  в мягком режиме. Если уменьшать  $\Theta_0$ , значения  $\omega_{**}$  и  $\omega_{***}$  сближаются, затем жесткий режим переходит в мягкий, и, наконец, область несимметричного течения исчезает.

На рис. 2 изображена область существования несимметричных течений, она лежит над кривой  $ABCE$ . Кривая  $ABCD$  соответствует границе устойчивости симметричного течения, так что  $DCE$  — граница области бистабильности. Если увеличивать  $\omega$  от малых значений, то нарушение симметрии течения в мягком режиме произойдет на линии  $AB$ , симметричное течение станет вновь устойчивым на линии  $BCD$ , восстановление симметрии течения в жестком режиме произойдет на линии  $CE$ . Существует диапазон значений  $\Theta_B < \Theta_0 < \Theta_C$ , в котором нарушение и восстановление симметрии течения происходит в мягком режиме (см. НРХ на рис. 1 при  $\Theta_0 = 3,08$ ). При  $\Theta_0 < \Theta_B$  все критические явления вырождаются, на НРХ отсутствуют участки с отрицательным наклоном.

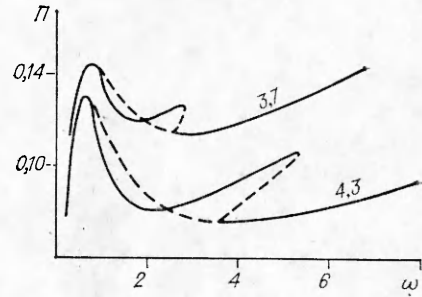
Для течения этиленгликоля, нагретого первоначально до  $T^0 = 120^\circ\text{C}$ , через трубки длиной 1 м и диаметром 1 см при температуре окружающей среды  $T_0 = 20^\circ\text{C}$  расчет с использованием значений  $\rho$ ,  $c$ ,  $\mu$  из [5] и коэффициента теплоотдачи  $\alpha = 10 \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К})$  дает значение расхода, при котором нарушается симметрия,  $Q_* = 0,13 \text{ см}^3/\text{с}$ . При этом напор  $\Delta p = 1,96 \text{ Па}$ . Симметрия восстанавливается при  $Q_{***} = 0,69 \text{ см}^3/\text{с}$ .

Из способа построения НРХ для двух труб следует, что в тех случаях, когда НРХ для одной трубы немонотонна (немонотонность может быть обусловлена различными причинами), следует ожидать эффекта нарушения симметрии течения и в системе из  $n$  параллельных труб.

3. При  $\beta \neq 0$  стационарные значения расходов при несимметричном течении уже не определяются по НРХ для одной трубы. Вместе с тем ветвь симметричного течения на НРХ ( $abef$  на рис. 1) не изменяется, так как при  $\Theta_1 = \Theta_2$  теплообмена между трубами нет. После замены  $\omega_1 =$



Р и с. 3



Р и с. 4

$= \omega/2 + v$ ,  $\omega_2 = \omega/2 - v$  равенство (1.4) удовлетворяется тождественно, и стационарное решение (1.1), (1.2) с граничным условием (1.5) принимает вид

$$(3.1) \quad \Theta_1 = [(\omega\beta + q + 2v) \exp(k_1\xi) - (\omega\beta - q + 2v) \exp(k_2\xi)] \Theta_0 / (2q);$$

$$(3.2) \quad \Theta_2 = [(\omega\beta + q - 2v) \exp(k_1\xi) - (\omega\beta - q - 2v) \exp(k_2\xi)] \Theta_0 / (2q),$$

где  $q = \sqrt{\beta^2\omega^2 + 4v^2(1 + 2\beta)}$ ;  $k_1 = 2 \frac{q - (1 + \beta)\omega}{\omega^2 - 4v^2}$ ;  $k_2 = 2 \frac{q + (1 + \beta)\omega}{\omega^2 - 4v^2}$ .

Уравнение (1.3) переписывается как

$$(3.3) \quad F(v) = 0, \quad F(v) = (\omega/2 + v) \int_0^1 \exp(-\Theta_1) d\xi - (\omega/2 - v) \int_0^1 \exp(-\Theta_2) d\xi.$$

Подстановка (3.1), (3.2) в (3.3) дает уравнение для определения  $v$ , которое при всех значениях параметров имеет решение  $v = 0$ , что отвечает симметричному течению. Появлению решений  $v \neq 0$  (соответствующих несимметричным течениям) отвечают значения параметров  $\Theta_0$ ,  $\omega$ ,  $\beta$ , которые удовлетворяют уравнению  $F_v(0) = 0$  (индекс означает дифференцирование по  $v$ ), имеющему вид

$$(3.4) \quad 2 \int_0^1 \left[ 1 + \exp\left(-\frac{4\beta}{\omega} \xi\right) \right] \exp\left[-\Theta_0 \exp\left(-\frac{2\xi}{\omega}\right)\right] d\xi = \frac{\omega}{2\beta} \left[ 1 - \exp\left(-\frac{4\beta}{\omega}\right) \right] \exp\left[-\Theta_0 \exp\left(-\frac{2}{\omega}\right)\right].$$

При  $\beta = 0$  на рис. 2 уравнению (3.4) отвечает кривая  $ABCD$ . При  $\beta \neq 0$  качественный вид кривой на плоскости  $(\omega, \Theta_0)$  сохраняется, причем с ростом  $\beta$  кривые смещаются вверх. Значения параметров, отвечающие исчезновению несимметричных течений ( $v \neq 0$ ), определяются из условия

$$(3.5) \quad F_v(v) = 0,$$

рассматриваемого совместно с (3.3). При  $\beta = 0$  решение показано на рис. 2 (кривая  $CE$ ). С помощью (3.3)—(3.5) проведено разбиение плоскости параметров  $(\omega, \beta)$  на области реализации симметричных и несимметричных течений (рис. 3). Границы областей построены при различных значениях  $\Theta_0$  (указаны у линий). Внутри области  $abg$  возможны только несимметричные течения, вне области  $abe$  — только симметричные,  $gce$  ограничивает область бистабильности. Видно, что рост  $\beta$  (как и уменьшение  $\Theta_0$ ) сужает область несимметричных течений.

На рис. 4 показаны НРХ при  $\beta = 0,1$  для двух значений  $\Theta_0$ . В отличие от решения при  $\beta = 0$  (см. рис. 1) точка потери устойчивости симметричного течения уже не совпадает с экстремумом характеристики.

4. Устойчивость стационарных решений исследовалась с помощью линеаризованной системы уравнений для малых отклонений  $u_n(\xi) \exp(\lambda\tau)$ ,  $w \exp(\lambda\tau)$  от стационарных решений  $\Theta_{ns}(\xi)$ ,  $v_s$ :

$$(4.1) \quad (\omega/2 + v_s) dz_1/d\xi = -(1 + \beta + \lambda)z_1 + \beta z_2 - d\Theta_{1s}/d\xi;$$

$$(4.2) \quad (\omega/2 - v_s) dz_2/d\xi = -(1 + \beta + \lambda)z_2 + \beta z_1 + d\Theta_{2s}/d\xi;$$

$$(4.3) \quad \int_0^1 [1 - (\omega/2 + v_s) z_1] \exp(-\Theta_{1s}) d\xi + \int_0^1 [1 + (\omega/2 - v_s) z_2] \times \\ \times \exp(-\Theta_{2s}) d\xi = 0, \\ z_n(0) = 0,$$

где  $z_n = u_n/w$ ,  $n = 1, 2$ .

Подстановка решений (4.1), (4.2) в (4.3) приводит к уравнению  $f(\lambda) = 0$  для определения собственных значений  $\lambda$ . Стационарное решение устойчиво, если функция  $f(\lambda)$  комплексной переменной  $\lambda$  не обращается в нуль в правой полуплоскости  $\text{Re } \lambda > 0$ . Число нулей функции  $f(\lambda)$  в правой полуплоскости можно определить с помощью принципа аргумента [6]

$$(4.4) \quad N - P = \frac{1}{2\pi} \Delta_C \arg f(\lambda),$$

где  $N$  — число нулей;  $P$  — число полюсов  $f(\lambda)$  в правой полуплоскости, а правая часть означает деленное на  $2\pi$  приращение аргумента функции  $f(\lambda)$  при обходе контура  $C$ , охватывающего правую полуплоскость. В качестве контура  $C$  удобно выбрать полуокружность бесконечного радиуса.

Функция  $f(\lambda)$  при  $\beta \neq 0$  достаточно громоздка, поэтому ниже для простоты изложения приводятся формулы при  $\beta = 0$ , а затем будет сказано об отличиях, возникающих при  $\beta \neq 0$ . При  $\beta = 0$

$$(4.5) \quad f(\lambda) = \sum_{n=1}^2 \int_0^1 \left\{ 1 - \Theta_{ns} \lambda^{-1} \left[ 1 - \exp\left(-\frac{\lambda}{\omega_{ns}} \xi\right) \right] \right\} \exp(-\Theta_{ns}) d\xi.$$

В правой полуплоскости эта функция полюсов не имеет. Для определения правой части в (4.4) следует рассмотреть соответствующий контур в комплексной плоскости  $f$ , который является отображением контура  $C$ . Вся бесконечная полуокружность ( $\lambda \rightarrow \infty$ ) перейдет в точку на вещественной оси, лежащую справа от нуля  $\left( \sum_{n=1}^2 \int_0^1 \exp(-\Theta_{ns}) d\xi > 0 \right)$ . Мнимая ось ( $\lambda = iv$ ) отобразится в кривую

$$f(iv) = \sum_{n=1}^2 \left\{ \int_0^1 \left[ 1 - \Theta_{ns} v^{-1} \sin\left(\frac{v}{\omega_{ns}} \xi\right) \right] \exp(-\Theta_{ns}) d\xi + i \int_0^1 \Theta_{ns} v^{-1} \times \right. \\ \left. \times \left[ 1 - \cos\left(\frac{v}{\omega_{ns}} \xi\right) \right] \exp(-\Theta_{ns}) d\xi \right\}.$$

Видно, что знак мнимой части  $f(iv)$  определяется знаком  $v$ . Отсюда следует, что положительная (отрицательная) мнимая ось отобразится в кривую, лежащую над (под) вещественной осью плоскости  $f$ . Отображение точки нуль плоскости  $\lambda$  лежит на вещественной оси левее точки  $f(\infty)$ :

$$(4.6) \quad f(0) = \sum_{n=1}^2 \int_0^1 (1 - \xi \omega_{ns}^{-1} \Theta_{ns}) \exp(-\Theta_{ns}) d\xi = \sum_{n=1}^2 d\Pi/d\omega_{ns}.$$

Возможны два случая.

1) Точка нуль плоскости  $\lambda$  отображается в точку, лежащую на вещественной оси справа от нуля ( $f(0) > 0$ ). Тогда отображение контура  $C$  не охватывает нуль плоскости  $f$ . Следовательно, приращение аргумента  $f(\lambda)$  равно нулю, и, согласно (4.4),  $N = 0$ . Это означает, что стационарное течение устойчиво.

2) Точка нуль плоскости  $\lambda$  отображается в точку, лежащую на вещественной оси слева от нуля ( $f(0) < 0$ ). Тогда отображение контура  $C$  охватывает нуль плоскости  $f$ . И так как направление обхода сохраняется, то  $\Delta_C \arg f(\lambda) = 2\pi$ . Согласно (4.4),  $N = 1$ , значит, стационарное течение в этом случае неустойчиво.

Чтобы выяснить, какой знак  $f(0)$  соответствует тому или иному участку НРХ, достаточно вспомнить, что для каждой трубы НРХ имеет  $N$ -образный вид, подобный кривой  $abef$  на рис. 1, откуда видно, что для данного значения  $\Pi$  наклон НРХ по абсолютной величине на участке  $ab$  больше, чем на  $be$ , который в свою очередь (за исключением небольшого участка правее точки  $b$ ) больше, чем на  $ef$ :

$$\left. \frac{d\Pi}{d\omega_{ns}} \right|_{ab} > - \left. \frac{d\Pi}{d\omega_{ns}} \right|_{be} > \left. \frac{d\Pi}{d\omega_{ns}} \right|_{ef}.$$

Так как НРХ для системы двух труб получается сложением НРХ обеих труб, легко установить, что условие устойчивости стационарного течения  $f(0) > 0$  выполняется на участках  $ab$ ,  $bc$ ,  $cg$  и  $ef$  (см. рис. 1), а на  $be$ ,  $eg$  —  $f(0) < 0$ , течение неустойчиво. Граница устойчивости определяется из равенства  $f(0) = 0$ , которое для симметричного течения ( $v_s = 0$ ) совпадает с условием рождения несимметричных течений (3.4), а для несимметричного течения ( $v_s \neq 0$ ) — с условием слияния и исчезновения несимметричных течений (3.5).

При  $\beta \neq 0$  для симметричного течения  $v_s = 0$ ,  $\Theta_s = \Theta_0 \exp(-2\xi/\omega)$  имеем

$$f(0) = 2 \int_0^1 \exp(-\Theta_s) d\xi - \int_0^1 \Theta_s \beta^{-1} \left[ 1 - \exp\left(-\frac{4\beta}{\omega} \xi\right) \right] \exp(-\Theta_s) d\xi.$$

Так как первый интеграл не зависит от  $\beta$ , а второй с ростом  $\beta$  уменьшается, то область неустойчивости симметричного течения сужается. На падающей ветви НРХ симметричного течения вблизи экстремумов появляются участки, отвечающие устойчивым течениям (см. рис. 4). Эти участки тем больше, чем больше  $\beta$ . При достаточно большом  $\beta$  вся падающая ветвь НРХ становится устойчивой, эффект нарушения симметрии исчезает.

Авторы благодарны В. И. Боярченко, Д. А. Ваганову, В. А. Вольперту, П. В. Жиркову, А. Г. Мержанову, А. М. Столину за полезное обсуждение работы.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Pearson J. R. A., Shah Y. T., Vieira E. S. A. Stability of non-isothermal flow in channels. I. Temperature-dependent Newtonian fluid without heat generation // Chem. Engng Sci.— 1973.— V. 28, N 11.
2. Мержанов А. Г., Столин А. М. Гидродинамические аналоги явлений воспламенения и потухания // ПМТФ.— 1974.— № 1.
3. Грачев В. В., Руманов Э. Н. Нарушение симметрии течения вследствие тепловой неустойчивости // ПМТФ.— 1984.— № 1.
4. Франк-Каменецкий Д. А. Диффузия и теплопередача в химической кинетике.— М.: Наука, 1967.
5. Рид Р., Праусниц Дж., Шервуд Т. Свойства газов и жидкостей.— Л.: Химия, 1982.
6. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного.— М.: Наука, 1973.

Поступила 28/IV 1986 г.