

УДК 539.3

## СИНГУЛЯРНЫЕ РЕШЕНИЯ ДЛЯ АНИЗОТРОПНОЙ ПЛАСТИНЫ С ЭЛЛИПТИЧЕСКИМ ОТВЕРСТИЕМ

В. Н. Максименко, Е. Г. Подружин

Новосибирский государственный технический университет, 630092 Новосибирск  
E-mail: planer@craft.nstu.ru

На основе технической теории изгиба тонких анизотропных пластин с использованием комплексных потенциалов Лехницкого построено решение задачи изгиба пластины, ослабленной эллиптическим отверстием, под действием сосредоточенной нагрузки (сингулярное решение). Для построения решения использовано конформное отображение внешности эллиптического отверстия на внешность единичного круга и процедура вычисления интегралов типа Коши по замкнутым контурам. Рассмотрены различные варианты краевых условий на контуре отверстия. Сжатием эллипса в щель получены решения задачи об изгибе пластины, содержащей прямолинейную трещину или жесткое включение.

Ключевые слова: изгиб, анизотропный, изотропный материал, конформное отображение, интеграл типа Коши, единичная окружность.

Пусть в неограниченной анизотропной пластине, ослабленной эллиптическим отверстием  $\Lambda$  (рис. 1), в точке с координатами  $\tau = \xi + i\eta$  приложена сосредоточенная нагрузка — сосредоточенный изгибающий момент  $m^* = m_x + im_y$ . На контуре отверстия могут быть заданы либо статические (изгибающий момент и обобщенная поперечная сила), либо кинематические (прогибы и углы поворота) условия. Решение данной задачи сводится к построению двух аналитических функций от обобщенных комплексных координат  $F_\nu(z_\nu)$ ,  $z_\nu = x + \mu_\nu y$  ( $\nu = 1, 2$ ), описывающих напряженно-деформированное состояние в пластине. Здесь  $\mu_\nu$  — корни характеристического уравнения ( $\mu_1 \neq \mu_2$ ) [1].

С использованием комплексных представлений статические условия на контуре отверстия определяются выражениями [1]

$$2 \operatorname{Re} \sum_{\nu=1}^2 \frac{p_\nu}{\mu_\nu} \varphi_\nu(t_\nu) = - \int_0^{s(t)} (m dy + f dx) - Cx + C_1,$$

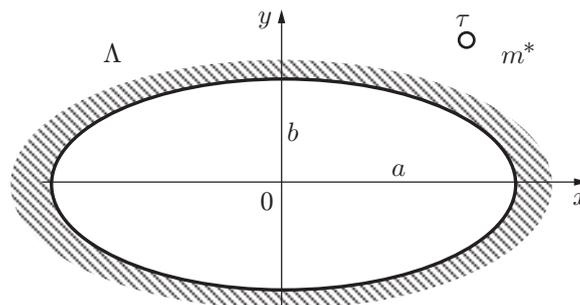


Рис. 1

$$2 \operatorname{Re} \sum_{\nu=1}^2 q_{\nu} \varphi_{\nu}(t_{\nu}) = \int_0^{s(t)} (-m dx + f dy) + Cy + C_2, \quad t \in \Lambda, \quad (1)$$

$$\varphi_{\nu}(t_{\nu}) = F'_{\nu}(t_{\nu}), \quad f(s) = \int_0^{s(t)} p(s_0) ds_0.$$

Здесь  $m(s)$ ,  $p(s)$  — распределенные по контуру отверстия нормальные изгибающие моменты и поперечные силы;  $C$ ,  $C_1$ ,  $C_2$  — неизвестные действительные постоянные. Интегрирование ведется по дуге контура от начальной до текущей точки. В дальнейшем край отверстия будем считать свободным от нагрузки ( $m(s) = 0$ ,  $p(s) = 0$ ).

Для пластины, нагруженной сосредоточенным изгибающим моментом, приложенным во внутренней точке, комплексные потенциалы зададим в виде

$$\varphi_{\nu}(z_{\nu}, \tau_{\nu}) = B_{\nu} \ln(z_{\nu} - \tau_{\nu}) + \varphi_{\nu 0}(z_{\nu}, \tau_{\nu}).$$

Здесь  $\varphi_{\nu 0}(z_{\nu}, \tau_{\nu})$  — функции, голоморфные вне эллиптических отверстий  $\Lambda_{\nu}$ , соответствующих  $\Lambda$  при аффинном отображении  $z_{\nu} = x + \mu_{\nu}y$ ;  $B_{\nu}$  — комплексные постоянные, определяемые из системы уравнений

$$\sum_{\nu=1}^2 (\mu_{\nu}^{k-2} B_{\nu} - \bar{\mu}_{\nu}^{k-2} \bar{B}_{\nu}) = f_k \quad (k = \overline{1, 4}),$$

$$f_1 = -\frac{m_y}{2\pi i D_{11}}, \quad f_4 = -\frac{m_x}{2\pi i D_{22}}, \quad f_j = 0 \quad (j = \overline{2, 3}).$$

Постоянные  $D_{mn}$  — цилиндрические жесткости пластины.

Умножим левую и правую части первого соотношения в краевых условиях (1) на  $-q_{3-\nu}$ , а второго — на  $p_{3-\nu}/\mu_{3-\nu}$  и сложим полученные выражения, откуда после группировки слагаемых, содержащих  $\varphi_1(t_1)$ ,  $\overline{\varphi_1(t_1)}$ ,  $\varphi_2(t_2)$ ,  $\overline{\varphi_2(t_2)}$ , получим краевые условия (1) в следующем виде:

$$\varphi_{\nu}(t_{\nu}) - l_{\nu} \overline{\varphi_1(t_1)} - n_{\nu} \overline{\varphi_2(t_2)} = f_{\nu}^*(t),$$

$$f_{\nu}^*(t) = \left( q_{\nu} \frac{p_{3-\nu}}{\mu_{3-\nu}} - q_{3-\nu} \frac{p_{\nu}}{\mu_{\nu}} \right)^{-1} \left( -q_{3-\nu} f_1(t) + \frac{p_{3-\nu}}{\mu_{3-\nu}} f_2(t) \right), \quad t \in \Lambda, \quad (2)$$

$$f_1(t) = - \int_0^{s(t)} (m dy + f(t) dx) - Cx + C_1, \quad f_2(t) = \int_0^{s(t)} (-m dx + f(t) dy) + Cy + C_2,$$

$$l_{\nu} = \frac{q_{3-\nu} \frac{\bar{p}_1}{\bar{\mu}_1} - \bar{q}_1 \frac{p_{3-\nu}}{\mu_{3-\nu}}}{q_{\nu} \frac{p_{3-\nu}}{\mu_{3-\nu}} - q_{3-\nu} \frac{p_{\nu}}{\mu_{\nu}}}, \quad n_{\nu} = \frac{q_{3-\nu} \frac{\bar{p}_2}{\bar{\mu}_2} - \bar{q}_2 \frac{p_{3-\nu}}{\mu_{3-\nu}}}{q_{\nu} \frac{p_{3-\nu}}{\mu_{3-\nu}} - q_{3-\nu} \frac{p_{\nu}}{\mu_{\nu}}}.$$

Используя конформное отображение внешности единичного круга  $\gamma = \{|\sigma| = 1\}$  на внешность эллиптических отверстий в плоскостях  $z_{\nu} = x + \mu_{\nu}y$

$$z_{\nu} = \frac{a - i\mu_{\nu}b}{2} \zeta_{\nu} + \frac{a + i\mu_{\nu}b}{2} \frac{1}{\zeta_{\nu}} = \omega_{\nu}(\zeta_{\nu}), \quad |\zeta_{\nu}| > 1$$

и обратные функции

$$\zeta_{\nu} = \zeta_{\nu}(z_{\nu}) = (z_{\nu} + \sqrt{z_{\nu}^2 - (a^2 + \mu_{\nu}^2 b^2)}) / (a - i\mu_{\nu}b)$$

и введя обозначения  $\varphi_\nu^*(\zeta_\nu, \eta_\nu) = \varphi_\nu(z_\nu, \tau_\nu)$ ,  $\eta_\nu = \zeta_\nu(\tau_\nu)$ , можно получить выражения для граничных значений функций  $\varphi_\nu^*(\zeta_\nu, \eta_\nu)$  на  $\gamma$ :

$$\begin{aligned} \varphi_\nu^*(\sigma, \eta_\nu) - l_\nu \overline{\varphi_1^*(\sigma, \eta_1)} - n_\nu \overline{\varphi_2^*(\sigma, \eta_2)} &= f_\nu^*(\sigma), \\ \varphi_\nu^*(\zeta_\nu, \eta_\nu) &= B_\nu \ln(\zeta_\nu - \eta_\nu) + \varphi_{\nu 0}^*(\zeta_\nu, \eta_\nu). \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь  $\varphi_{\nu 0}^*(\zeta_\nu, \eta_\nu)$  — неизвестные аналитические вне единичного круга  $\gamma$  функции.

Умножим левую и правую части краевого условия (3) на  $d\sigma/(\sigma - \zeta_\nu)$ , где  $\zeta_\nu$  находится вне единичной окружности, и вычислим интегралы типа Коши для функций, определенных на контуре единичного круга [2]. Тогда из соотношения (3) получим выражения для  $\varphi_{\nu 0}^*(\zeta_\nu, \eta_\nu)$ :

$$\begin{aligned} \varphi_{\nu 0}^*(\zeta_\nu, \eta_\nu) &= l_\nu \bar{B}_1 \ln \frac{\zeta_\nu \bar{\eta}_1 - 1}{\zeta_\nu \bar{\eta}_1} + n_\nu \bar{B}_2 \ln \frac{\zeta_\nu \bar{\eta}_2 - 1}{\zeta_\nu \bar{\eta}_2} + \frac{CD_\nu}{\zeta_\nu}, \\ D_\nu &= \frac{1}{2} \left( aq_{3-\nu} + ib \frac{p_{3-\nu}}{\mu_{3-\nu}} \right) \left( q_\nu \frac{p_{3-\nu}}{\mu_{3-\nu}} - q_{3-\nu} \frac{p_\nu}{\mu_\nu} \right)^{-1}. \end{aligned} \quad (4)$$

В соотношение (4) входит неизвестная константа  $C$ , для определения которой необходимо использовать условия однозначности прогибов при обходе контура единичной окружности  $\gamma$

$$2 \operatorname{Re} \left\{ \sum_{\nu=1}^2 F_\nu(z_\nu) \right\}_L = 0.$$

Отсюда следует формула для определения константы (в случае края отверстия, свободного от нагрузки)

$$C = \operatorname{Im} \sum_{\nu=1}^2 \frac{a - i\mu_\nu b}{2} \left( l_\nu \frac{\bar{B}_1}{\bar{\eta}_1} + n_\nu \frac{\bar{B}_2}{\bar{\eta}_2} \right) \left[ \operatorname{Im} \sum_{\nu=1}^2 \frac{a - i\mu_\nu b}{4} \frac{aq_{3-\nu} + ibp_{3-\nu}/\mu_{3-\nu}}{q_\nu p_{3-\nu}/\mu_{3-\nu} - q_{3-\nu} p_\nu/\mu_\nu} \right]^{-1}.$$

Изгибающие и крутящие моменты в пластине определяются соотношениями [1]

$$(M_x, M_y, H_{xy}) = -2 \operatorname{Re} \left\{ \sum_{\nu=1}^2 (p_\nu, q_\nu, r_\nu) \Phi_\nu(z_\nu) \right\},$$

$$\Phi_\nu(z_\nu) = \frac{d\varphi_\nu(\zeta_\nu, \eta_\nu)}{d\zeta_\nu} [\omega'_\nu(\zeta_\nu)]^{-1}.$$

Потенциалы  $\Phi_\nu^*(\zeta_\nu, \eta_\nu) = \varphi_\nu^{*'}(\zeta_\nu, \eta_\nu)$  принимают вид

$$\Phi_\nu^*(\zeta_\nu, \eta_\nu) = \frac{B_\nu}{\zeta_\nu - \eta_\nu} + \frac{\bar{B}_1 l_\nu}{\zeta_\nu(\zeta_\nu \bar{\eta}_1 - 1)} + \frac{\bar{B}_2 n_\nu}{\zeta_\nu(\zeta_\nu \bar{\eta}_2 - 1)} - \frac{CD_\nu}{\zeta_\nu^2}. \quad (5)$$

Кинематические граничные условия на контуре эллиптического отверстия записываются в виде [1]

$$2 \operatorname{Re} \sum_{\nu=1}^2 F_\nu(t_\nu) = w^*(s), \quad 2 \operatorname{Re} \sum_{\nu=1}^2 \varphi_\nu(t_\nu) (\mu_\nu \sin \vartheta + \cos \vartheta) = \frac{\partial w^*}{\partial n}, \quad t \in \Lambda$$

и могут быть сведены описанным выше приемом (после дифференцирования первого условия по дуге контура  $s$ ) к соотношениям вида (2), где следует положить:

$$f_\nu^*(t) = \frac{f_2(t) - \mu_{3-\nu} f_1(t)}{\mu_\nu - \mu_{3-\nu}}, \quad l_\nu = \frac{\mu_{3-\nu} - \bar{\mu}_1}{\mu_\nu - \mu_{3-\nu}}, \quad n_\nu = \frac{\mu_{3-\nu} - \bar{\mu}_2}{\mu_\nu - \mu_{3-\nu}},$$

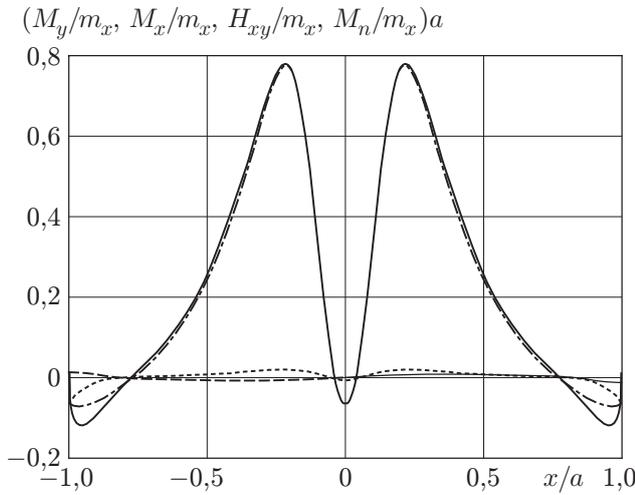


Рис. 2

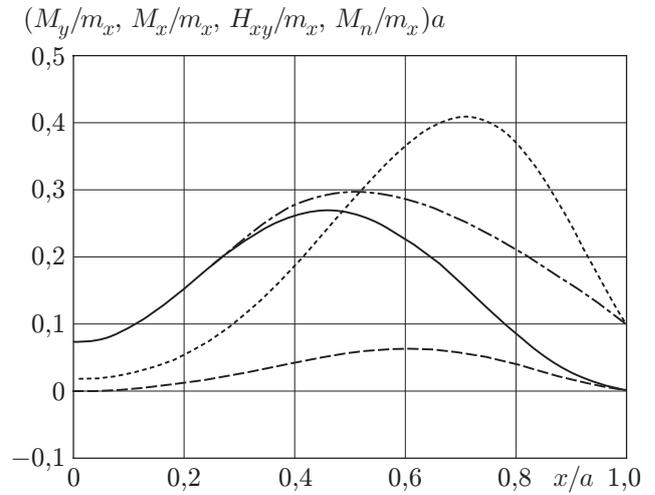


Рис. 3

$$f_1(t) = -\frac{\partial w^*}{\partial s} \sin \vartheta + \frac{\partial w^*}{\partial n} \cos \vartheta, \quad f_2(t) = \frac{\partial w^*}{\partial s} \cos \vartheta + \frac{\partial w^*}{\partial n} \sin \vartheta.$$

Здесь  $w^*$ ,  $\partial w^*/\partial n$  — заданные прогибы и углы поворота края эллиптического отверстия;  $\vartheta$  — угол между нормалью к контуру отверстия и осью  $x$ . Если прогибы и углы поворота на контуре отверстия равны нулю, то краевое условие становится однородным. Аналогично тому, как были выведены уравнения (4), могут быть получены выражения для комплексных потенциалов [2]. Так, в случае действия сосредоточенного момента для функций  $\varphi_{\nu 0}^*(\zeta_\nu, \eta_\nu)$  получим выражение

$$\varphi_{\nu 0}^*(\zeta_\nu, \eta_\nu) = l_\nu \bar{B}_1 \ln \frac{\zeta_\nu \bar{\eta}_1 - 1}{\zeta_\nu \bar{\eta}_1} + n_\nu \bar{B}_2 \ln \frac{\zeta_\nu \bar{\eta}_2 - 1}{\zeta_\nu \bar{\eta}_2}.$$

В рассматриваемой задаче для комплексных  $\Phi_\nu^*(\zeta_\nu, \eta_\nu)$  потенциалов получим формулу

$$\Phi_\nu^*(\zeta_\nu, \eta_\nu) = \frac{B_\nu}{\zeta_\nu - \eta_\nu} + \frac{\bar{B}_1 l_\nu}{\zeta_\nu (\zeta_\nu \bar{\eta}_1 - 1)} + \frac{\bar{B}_2 n_\nu}{\zeta_\nu (\zeta_\nu \bar{\eta}_2 - 1)}.$$

Последние две формулы могут быть получены из (4), (5), где следует положить  $C = 0$ .

Решить указанным способом задачу для пластины со смешанными краевыми условиями на контуре отверстия (например, условия свободного опирания) не удастся, поскольку не удастся записать граничные условия для функций  $\varphi_\nu^*(\zeta_\nu, \eta_\nu)$  на контуре единичной окружности  $\gamma$  в форме (3).

Приведем некоторые результаты расчетов по полученным формулам. На рис. 2 представлено распределение изгибающих и крутящих моментов  $M_y$  (жирная сплошная кривая),  $M_x$  (пунктирная кривая),  $H_{xy}$  (штриховая кривая),  $M_n$  (штрихпунктирная кривая) вдоль заземленной кромки эллиптического отверстия ( $b/a = 0,5$ ) для случая нагружения пластины сосредоточенным изгибающим моментом  $m_x$  в точке, находящейся на продолжении малой полуоси эллипса. Координата приложения нагрузки —  $0,9a$ ; материал пластины — борэпоксидный композит (№ 2 в таблице), угол между главным направлением анизотропии  $E_1$  и осью  $x$  —  $\varphi = \pi/2$ . На рис. 3 приведено распределение изгибающих и крутящих моментов  $M_y, M_x, H_{xy}, M_n$  (обозначения те же, что на рис. 2) в пластине из борэпоксидного композита для  $\varphi = 0$ . Концентрация напряжений на контуре пластины в этом случае существенно уменьшается (примерно вдвое). В силу симметрии на рисунке показана только четверть дуги эллипса.

| Номер материала | $E_1 \cdot 10^{-4}$ , МПа | $E_2 \cdot 10^{-4}$ , МПа | $E_1/E_2$ | $\nu_1$ | $G \cdot 10^{-4}$ , МПа |
|-----------------|---------------------------|---------------------------|-----------|---------|-------------------------|
| 1               | 27,610                    | 27,610                    | 1         | 0,25    | 11,044                  |
| 2               | 27,610                    | 2,761                     | 10        | 0,25    | 1,035                   |

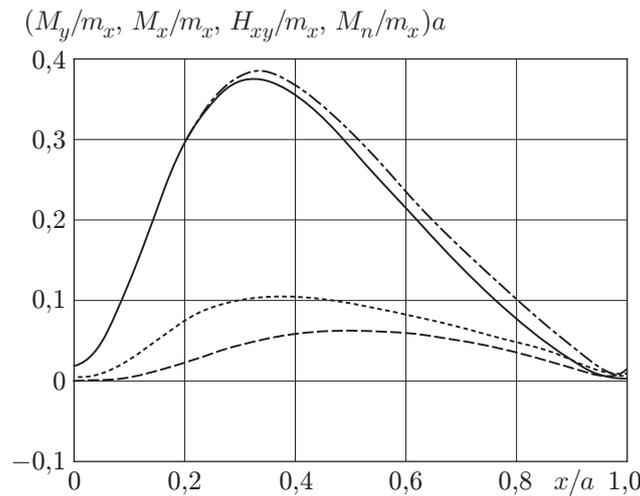


Рис. 4

На рис. 4 представлено распределение изгибающих и крутящих моментов  $M_y$ ,  $M_x$ ,  $H_{xy}$ ,  $M_n$  (обозначения те же, что на рис. 2) на контуре отверстия такой же пластины из изотропного материала (№ 1 в таблице). Результаты для пластины из изотропного материала (для ортотропного материала при  $\varphi = 0$ ,  $\mu_{1,2} = \pm\alpha + i\beta$ ) здесь и далее получены предельным переходом в параметрах анизотропии в численном решении при  $\alpha \rightarrow 0$ ,  $\beta \rightarrow 1$ . Практически это осуществлялось заданием одного из модулей упругости (например, модуля сдвига  $G$ ) в изотропном материале, отличающегося на несколько сотых процента от точного значения. Численные эксперименты показывают, что ошибка в результатах при этом не превышает погрешности задания упругой характеристики материала. При указанной точности задания упругих характеристик это погрешность в определении напряжений порядка 5–6-й значащей цифры.

На рис. 5 представлено распределение изгибающих и крутящих моментов вдоль свободной кромки эллиптического отверстия ( $b/a = 0,5$ ) для случая нагружения пластины сосредоточенным изгибающим моментом  $m_x$ , приложенным в точке, находящейся на продолжении малой полуоси эллипса. Здесь через  $M_\theta$  (сплошная светлая кривая, остальные обозначения те же, что на рис. 2) обозначены изгибающие моменты в площадках, нормальных к контуру отверстия. Координата приложения момента —  $0,9a$ ; материал пластины — изотропный. На рис. 6 приведено распределение напряжений в той же пластине в случае воздействия сосредоточенного момента  $m_y$ . В данной задаче для ортотропной пластины ( $\varphi = 0, \pi/2$ ) в случае, когда поверхность изгиба имеет плоскость симметрии, значение действительной константы  $C$  получается равным нулю (например, сосредоточенный момент  $m_x$  приложен на продолжении малой полуоси эллипса). В остальных случаях значение константы отлично от нуля и зависит от вида нагрузки и координаты ее приложения.

Данный прием применим не только в случае сосредоточенных нагрузок. Рассмотрим изгиб той же пластины с эллиптическим отверстием, защемленным по контуру, под действием равномерно распределенных моментов, приложенных на бесконечном удалении от контура отверстия. Напряженно-деформированное состояние (НДС) в пластине в этом

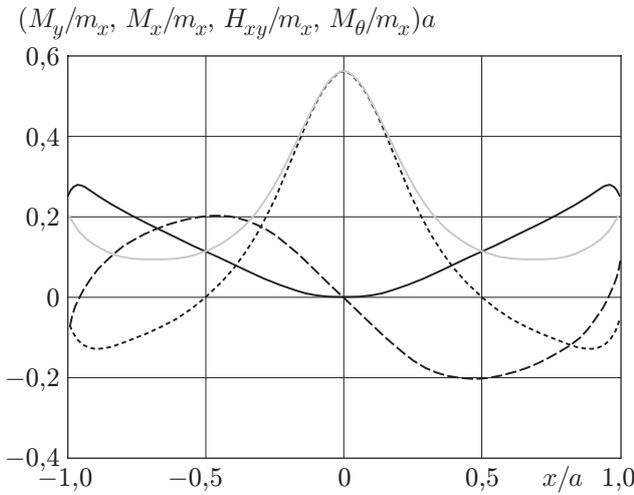


Рис. 5

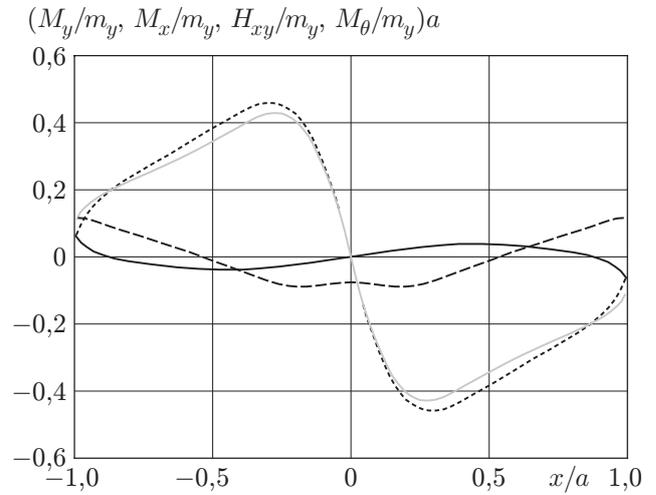


Рис. 6

случае можно получить, суммируя НДС в пластине без отверстия и возмущения НДС, вносимые отверстием. Комплексные потенциалы для пластины без отверстия, описывающие однородное поле напряжений, задаем в виде

$$\varphi_\nu(z_\nu) = B_\nu^* z_\nu + G_\nu,$$

где  $G_\nu$  — произвольные комплексные константы; постоянные  $B_\nu^*$  определяются из системы уравнений [1]

$$\begin{aligned} -2 \operatorname{Re} \left\{ \sum_{\nu=1}^2 p_\nu B_\nu^* \right\} &= M_{x0}, & -2 \operatorname{Re} \left\{ \sum_{\nu=1}^2 q_\nu B_\nu^* \right\} &= M_{y0}, \\ -2 \operatorname{Re} \left\{ \sum_{\nu=1}^2 r_\nu B_\nu^* \right\} &= H_{xy0}, & \operatorname{Re} \{ B_1^* \} &= 0. \end{aligned}$$

Здесь  $M_{x0}$ ,  $M_{y0}$ ,  $H_{xy0}$  — однородная нагрузка на бесконечном удалении от отверстия.

Функции  $\varphi_\nu^*(\zeta_\nu)$ , описывающие НДС пластины с отверстием, примут вид

$$\varphi_\nu^*(\zeta_\nu) = B_\nu^* \left( \frac{a - i\mu_\nu b}{2} \zeta_\nu + \frac{a + i\mu_\nu b}{2} \frac{1}{\zeta_\nu} \right) + \varphi_{\nu 0}^*(\zeta_\nu).$$

Здесь  $\varphi_{\nu 0}^*(\zeta_\nu)$  — неизвестные аналитические вне контура отверстия функции, описывающие возмущения НДС, вносимые отверстием. Аналогично тому, как были выведены соотношения (4), получим выражения для комплексных потенциалов:

$$\varphi_\nu^*(\zeta_\nu) = B_\nu^* \frac{a - i\mu_\nu b}{2} \zeta_\nu + \frac{1}{\zeta_\nu} \left[ l_\nu \bar{B}_1^* \frac{a + i\bar{\mu}_1 b}{2} + n_\nu \bar{B}_2^* \frac{a + i\bar{\mu}_2 b}{2} \right].$$

Если на контуре отверстия заданы напряжения, то правая часть краевых условий (2) и, следовательно, (3) будут содержать неизвестные действительные постоянные  $C$ ,  $C_1$ ,  $C_2$  (см. (1)). Действительные постоянные  $C_1$ ,  $C_2$  на напряженное состояние влиять не будут, а будут определять углы поворота пластины как жесткого целого. Для определения действительной постоянной  $C$  необходимо использовать дополнительное условие — однозначности прогибов при обходе контура эллиптического отверстия. Для случая свободного от

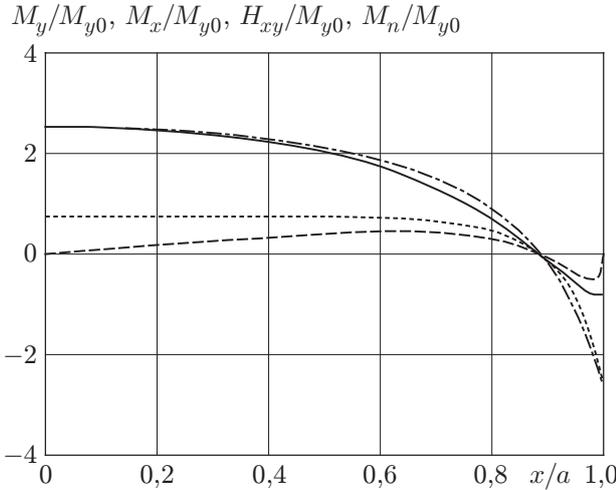


Рис. 7

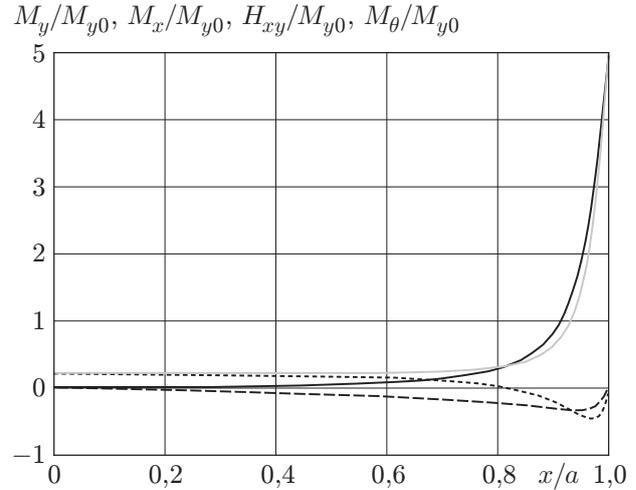


Рис. 8

нагрузки контура отверстия данное условие дает следующее выражение для константы:

$$C = - \frac{\operatorname{Im} \sum_{\nu=1}^2 \frac{a - i\mu_{\nu}b}{2} \left( -B_{\nu}^* \frac{a + i\mu_{\nu}b}{2} + l_{\nu} \bar{B}_1^* \frac{a + i\bar{\mu}_1b}{2} + n_{\nu} \bar{B}_2^* \frac{a + i\bar{\mu}_2b}{2} \right)}{\operatorname{Im} \sum_{\nu=1}^2 \frac{a - i\mu_{\nu}b}{4} \left( a q_{3-\nu} + i b \frac{p_{3-\nu}}{\mu_{3-\nu}} \right) \left( q_{\nu} \frac{p_{3-\nu}}{\mu_{3-\nu}} - q_{3-\nu} \frac{p_{\nu}}{\mu_{\nu}} \right)^{-1}}.$$

Комплексные потенциалы в этом случае будут иметь вид

$$\begin{aligned} \varphi_{\nu}^*(\zeta_{\nu}) &= B_{\nu}^* \frac{a - i\mu_{\nu}b}{2} \zeta_{\nu} + \frac{1}{\zeta_{\nu}} \left[ l_{\nu} \bar{B}_1^* \frac{a + i\bar{\mu}_1b}{2} + n_{\nu} \bar{B}_2^* \frac{a + i\bar{\mu}_2b}{2} + CD_{\nu} \right], \\ \Phi_{\nu}(z_{\nu}) &= \frac{1}{\omega'_{\nu}(\zeta_{\nu})} \left[ B_{\nu}^* \frac{a - i\mu_{\nu}b}{2} - \frac{1}{\zeta_{\nu}^2} \left( l_{\nu} \bar{B}_1^* \frac{a + i\bar{\mu}_1b}{2} + n_{\nu} \bar{B}_2^* \frac{a + i\bar{\mu}_2b}{2} + CD_{\nu} \right) \right]. \end{aligned} \quad (6)$$

На рис. 7 приведено распределение изгибающих и крутящих моментов  $M_y$ ,  $M_x$ ,  $H_{xy}$ ,  $M_n$  (обозначения те же, что на рис. 2) по контуру эллиптического отверстия в изотропной пластине (в площадках, совпадающих с линией контура) для случая жестко защемленного края отверстия ( $w^* = 0$ ,  $\partial w^*/\partial n = 0$ ). Задача тестировалась на результатах Лехницкого [1], получившего замкнутое решение для ортотропной пластины с жестким круговым включением. Отмечено полное совпадение обоих решений.

На рис. 8 показано распределение моментов  $M_y$ ,  $M_x$ ,  $H_{xy}$ ,  $M_{\theta}$  (обозначения те же, что на рис. 2) по контуру свободного от нагрузки (первая краевая задача) эллиптического отверстия в пластине, выполненной из борэпоксидного композита ( $\varphi = \pi/2$ ). Максимум изгибающего момента  $M_{\theta \max} = 4,9120 M_{y0}$  достигается в точках с координатами  $(\pm a, 0)$ . Тестирование результатов проводилось по данным работы [1], где приведено решение для анизотропной пластины с круговым отверстием, свободным от нагрузки.

Если в формуле (6) положить  $b = 0$ , то получим решение задачи об изгибе бесконечной пластины с прямолинейной трещиной (жестким включением). Комплексные потенциалы  $\Phi_{\nu}(z_{\nu})$  принимают вид

$$\begin{aligned} \Phi_{\nu}(z_{\nu}) &= \frac{1}{2\sqrt{z_{\nu} - a}\sqrt{z_{\nu} + a}} \left[ B_{\nu}^* J(z_{\nu}) - \frac{a^2}{J(z_{\nu})} \left( \bar{B}_1^* l_{\nu} + \bar{B}_2^* n_{\nu} + 2 \frac{CD_{\nu}}{a} \right) \right], \\ J(z_{\nu}) &= z_{\nu} + \sqrt{z_{\nu}^2 - a^2}. \end{aligned}$$

Из последнего соотношения видно, что в малой окрестности вершин трещины (жесткого включения) напряжения будут иметь особенность порядка  $1/\sqrt{\rho}$ , где  $\rho$  — расстояние от вершины дефекта [3]. Подобным же образом может быть получено решение этой задачи для случая действия сосредоточенных нагрузок [4], особенность для напряжений в окрестности вершин дефекта будет иметь такой же вид:  $1/\sqrt{\rho}$ .

Приведем выражение для константы  $C$  в случае загруженного постоянными изгибающими моментами края эллиптического отверстия и заданной на удалении нагрузки

$$C = - \frac{\operatorname{Im} \sum_{\nu=1}^2 \frac{a - i\mu_\nu b}{2} \left( -B_\nu^* \frac{a + i\mu_\nu b}{2} + l_\nu \bar{B}_1^* \frac{a + i\bar{\mu}_1 b}{2} + n_\nu \bar{B}_2^* \frac{a + i\bar{\mu}_2 b}{2} \right)}{\operatorname{Im} \sum_{\nu=1}^2 \frac{a - i\mu_\nu b}{4} \left( a q_{3-\nu} + i b \frac{p_{3-\nu}}{\mu_{3-\nu}} \right) \left( q_\nu \frac{p_{3-\nu}}{\mu_{3-\nu}} - q_{3-\nu} \frac{p_\nu}{\mu_\nu} \right)^{-1} - m \frac{\operatorname{Im} \sum_{\nu=1}^2 \frac{a - i\mu_\nu b}{4} \left( i b q_{3-\nu} - a \frac{p_{3-\nu}}{\mu_{3-\nu}} \right) \left( q_\nu \frac{p_{3-\nu}}{\mu_{3-\nu}} - q_{3-\nu} \frac{p_\nu}{\mu_\nu} \right)^{-1}}{\operatorname{Im} \sum_{\nu=1}^2 \frac{a - i\mu_\nu b}{4} \left( a q_{3-\nu} + i b \frac{p_{3-\nu}}{\mu_{3-\nu}} \right) \left( q_\nu \frac{p_{3-\nu}}{\mu_{3-\nu}} - q_{3-\nu} \frac{p_\nu}{\mu_\nu} \right)^{-1}}. \quad (7)$$

В формуле (7)  $m$  — интенсивность постоянных нормальных изгибающих моментов, приложенных к контуру отверстия (распределенная поперечная нагрузка  $p = 0$ ). Комплексные потенциалы при этом принимают вид

$$\varphi_\nu^*(\zeta_\nu) = B_\nu^* \frac{a - i\mu_\nu b}{2} \zeta_\nu + \frac{1}{\zeta_\nu} \left[ l_\nu \bar{B}_1^* \frac{a + i\bar{\mu}_1 b}{2} + n_\nu \bar{B}_2^* \frac{a + i\bar{\mu}_2 b}{2} + C D_\nu + m E_\nu \right],$$

$$E_\nu = \frac{1}{2} \left( i b q_{3-\nu} - a \frac{p_{3-\nu}}{\mu_{3-\nu}} \right) \left( q_\nu \frac{p_{3-\nu}}{\mu_{3-\nu}} - q_{3-\nu} \frac{p_\nu}{\mu_\nu} \right)^{-1}.$$

Результаты расчетов показывают, что для ортотропного материала пластины ( $\varphi = 0, \pi/2$ ) величина константы  $C$  не зависит от отношения полуосей эллипса, т. е. для круга и прямолинейного разреза значение постоянной получается одинаковым. На выполнение краевых условий на контуре отверстия и, следовательно, на НДС пластины постоянная  $C$  оказывает существенное влияние.

Из (7) можно получить выражение для определения произвольной константы в задаче изгиба неограниченной пластины с прямолинейной трещиной, берега которой загружены изгибающими моментами постоянной интенсивности [5] (для чего следует положить  $b = 0$ ,  $B_\nu^* = 0$ ). Следует заметить, что в данной задаче для ортотропного материала пластины ( $\varphi = 0, \pi/2$ ) константа  $C$  тождественно равна нулю. В случае  $\varphi \neq 0, \pi/2$  значение константы отлично от нуля.

На основе полученных комплексных потенциалов могут быть построены решения для сосредоточенных дислокаций, трактуемых как разрывы смещений в пластине [4]. Эти решения могут использоваться для построения комплексных потенциалов в задачах изгиба пластин с эллиптическим отверстием, ослабленных сквозными криволинейными разрезами (трещинами) и содержащих тонкие криволинейные жесткие включения. При этом комплексные потенциалы задаются в виде сингулярных интегралов с неизвестной функцией подынтегральной плотности, для определения которой используются условия на дефекте, приводящие к сингулярному интегральному уравнению или к системе сингулярных интегральных уравнений с некоторыми дополнительными соотношениями.

## ЛИТЕРАТУРА

1. **Лехницкий С. Г.** Анизотропные пластинки. М.: Гостехтеоретиздат, 1957.
2. **Грилицкий Д. В.** Вплив точки прикладання сили і моменту на розподіл напружень у безмежній анізотропній пластинці з еліптичним отвором // Прикл. механіка. 1956. Т. 2, № 2. С. 159–166.
3. **Бережницький Л. Т., Делявський М. В., Панасюк В. В.** Изгиб тонких пластин с дефектами типа трещин. Киев: Наук. думка, 1979.
4. **Максименко В. Н., Подружин Е. Г.** Фундаментальные решения в задачах изгиба анизотропных пластин // ПМТФ. 2003. Т. 44, № 4. С. 135–143.
5. **Бережницький Л. Т., Садивський В. М., Онышко Л. И.** Изгиб анизотропной пластины с трещиной // Прикл. механіка. 1978. Т. 14, № 11. С. 42–49.

*Поступила в редакцию 24/IX 2003 г.,  
в окончательном варианте — 19/II 2004 г.*

---