4. **Нейланд В. Я.** К теории взаимодействия гиперзвукового потока с пограничным слоем для отрывных двумерных и пространственных течений. Ч. 2. Двумерные течения и треугольное крыло.— Учен. зап. ЦАГИ, 1974, т. 5, № 3.
5. **Дудин Г. Н.** Характеристики пространственного гиперзвукового пограничного слоя в окрестности плоскости симметрии треугольного крыла.— Тр. ЦАГИ, 1983, вып. 2177.
6. **Дудин Г. Н.** К расчету пограничного слоя на треугольной пластине на режиме сильного вязкого взаимодействия.— Учен. зап. ЦАГИ, 1978, т. 9, № 5.
7. **Дудин Г. Н., Лыжин Д. О.** Об одном методе расчета режима сильного вязкого взаимодействия на треугольном крыле.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1983, № 4.
8. **Нейланд В. Я.** К теории взаимодействия гиперзвукового потока с пограничным слоем для отрывных двумерных и пространственных течений. Ч. 1. Пространственные течения.— Учен. зап. ЦАГИ, 1974, т. 5, № 2.
9. **Хейз У. Д., Пробстин Р. Ф.** Теория гиперзвуковых течений. М.: ИЛ, 1962.
10. **Stewartson K.** On the flow near the trailing edge of a flat plate. II.— Mathematika, 1969, v. 16.
11. **Боголепов В. В., Нейланд В. Я.** Исследование локальных возмущений вязких сверхзвуковых течений.— В кн.: Аэромеханика. М.: Наука, 1976.

Поступила 9/IV 1984 г.

УДК 534.2:532

НЕЛИНЕЙНЫЕ ОКОЛОРЕЗОНАНСНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ГАЗА В ТРУБЕ ПЕРЕМЕННОГО СЕЧЕНИЯ

А. Л. Ни

(Черноголовка)

Рассматривается задача о нелинейных околорезонансных колебаниях газа в трубе переменного сечения, один конец которой закрыт, а на другом находится поршень, скорость которого $u_p = \delta a_0 f(t)$ — периодическая функция времени (a_0 — скорость звука в невозмущенном газе, $\delta \ll 1$). Пространственный характер исходной задачи учитывается в рамках квазиодномерного приближения. Рассмотрение ведется в диапазоне частот, близких к резонансным частотам цилиндрической трубы той же длины. Влиянием вязкости пренебрегается.

Ранее задача в такой постановке исследовалась [1]. В основе ее анализа лежал метод [2, 3], опирающийся на представление решения в виде ряда по степеням малого параметра $\varepsilon = \varepsilon(\delta)$. Было приведено решение задачи в частном случае формы трубы, когда уравнение, описывающее колебания газа, сводилось к обыкновенному дифференциальному уравнению [2, 3]. Для более общей ситуации выведено интегродифференциальное уравнение и обсуждены его некоторые качественные свойства. Насколько известно автору, к настоящему времени не получено каких-либо количественных результатов дополнительно к [1].

В данной работе эта задача решается методом [4], суть которого коротко можно сформулировать как представление решения линейной суперпозицией нелинейных волн различных семейств. В [4] предложен эффективный способ решения получающихся нелинейных функциональных уравнений, в пределе $\varepsilon \to 0$ совпадающих с [2, 3]. В [5] метод обобщен на более широкий класс задач при $\varepsilon \to 0$, сводящихся к решению интегродифференциальных уравнений.

По-видимому, многие известные задачи о колебаниях газа могут быть решены способом [4] или некоторым его обобщением. К таким задачам можно отнести субгармонический резонанс [6, 7], колебания в трубе с учетом погранслоя в приближении [3]. В данной работе иллюстрируются возможности метода на примере задачи об околорезонансных колебаниях газа в трубе переменного сечения.

По аналогии с одномерными течениями будем называть инвариантами Римана величины $J^{\pm} = u \pm 2a/(\varkappa - 1)$. Введем безразмерные зависимые и независимые штрихованные переменные формулами [4]

$$u = \varepsilon a_0 u', \quad J^{\pm} = a_0[\varepsilon J^{\pm\prime} \pm 2/(\varkappa - 1)],$$
$$a = a_0(1 + \varepsilon a'), \quad t = Tt', \quad x = a_0 T x'. \tag{1}$$

Здесь u — скорость; a — скорость звука; t — время; x — декартова координата; T — характерное время течения; a_0 — невозмущенная скорость звука; $\varkappa$ — показатель адиабаты; ε — малый параметр, характеризующий амплитуду возмущений. В соответствии с выводами [4] течение можно считать изэнтропическим. Уравнения, управляющие волновыми движениями газа, запишем в виде

$$(\partial J^+/\partial t)_\xi + \frac{ua}{S}\, dS/dx = 0, \quad (\partial J^-/\partial t)_\eta - \frac{ua}{S}\, dS/dx = 0,$$

где для операторов дифференцирования вдоль характеристик $C^{\pm}$ использованы обозначения:

$$(\partial/\partial t)_\xi = \partial/\partial t + (u + a)\partial/\partial x; \ (\partial/\partial t)_\eta = \partial/\partial t + (u - a)\partial/\partial x;$$

$S = S(x)$ — площадь сечения трубы. Как и в [1], положим $S = S_0(1 + \varepsilon S')$. Краевые условия для исследуемой задачи имеют вид

$$u(0, t) = a_0 \delta f(t), \ f(t) = f(t + T), \ u(X, t) = 0,$$

где X — длина трубы; T — период колебаний поршня.

Поскольку исследуются колебания, близкие к резонансным, верна связь [1] $2X = a_0 T(k + \Delta)$, где k — целое число, $\Delta \sim \varepsilon$.

Согласно [1, 4], для решения поставленной задачи точность определения параметров течения на границах должна быть величиной порядка ε^2. Отсюда следует, что для этого положение характеристик достаточно вычислять с точностью ε и в уравнениях для инвариантов можно пренебречь членами порядка ε^3.

Подставим формулы (1) в уравнения движения. С учетом сказанного выше, получим следующие упрощенные уравнения:

$$(\partial J^+/\partial t)_\xi + \varepsilon(J^+ + J^-)dS/dx/2 = 0,$$

(2) $$(\partial J^-/\partial t)_\eta - \varepsilon(J^+ + J^-)dS/dx/2 = 0;$$

(3) $$C^+\colon\ dx/dt = 1 + (\varkappa + 1)\varepsilon J^+/4 + (3 - \varkappa)\varepsilon J^-/4,$$

$$C^-\colon\ dx/dt = -1 + (\varkappa + 1)\varepsilon J^-/4 + (3 - \varkappa)\varepsilon J^+/4;$$

(4) $$J^+(0, t) + J^-(0, t) = 2\delta f(t)/\varepsilon, \ J^+(n, t) + J^-(n, t) = 0.$$

Здесь и ниже штрихи над безразмерными переменными опущены; $n = (k + \Delta)/2 = O(1)$ — безразмерная длина трубы. В качестве характерного времени в (1) принят период колебаний поршня, откуда $f(t + 1) = f(t)$.

Будем далее придерживаться способа исследования [4]. Проинтегрируем (2), (3) вдоль соответствующих характеристик. Из (2) и (3) видно, что при интегрировании вдоль $C^+(C^-)$ инварианты $J^+(J^-)$ в правых частях уравнений можно принять постоянными, равными своим значениям в исходных точках течения. Оставшиеся же интегралы следует вычислять вдоль характеристик линеаризованных уравнений:

$$t = x + \xi, \ t = -x + \eta + n.$$

Под ξ и η — характеристическими переменными — будем всегда подразумевать моменты выхода $C^+(C^-)$-характеристик с левой (правой) границы.

Интегрирование (3) дает

$$C^+\colon\ x = \left[1 + \frac{\varkappa + 1}{4}\varepsilon J^+(\xi)\right](t - \xi) + \frac{3 - \varkappa}{8}\varepsilon \int\limits_{\xi - n}^{2t - \xi - n} J^-(\eta)\, d\eta,$$

$$C^-\colon\ x = n - \left[1 - \frac{\varkappa + 1}{4}\varepsilon J^-(\eta)\right](t - \eta) + \frac{3 - \varkappa}{8}\varepsilon \int\limits_{\eta - n}^{2t - \eta - n} J^+(\xi)\, d\xi.$$

Отсюда и из (4) определяем момент t_2 возвращения на поршень характеристики C^+, исходящей с него в момент времени ξ_0 (фиг. 1):

$$
t_2 = \xi_0 + 2n\left[1 - \frac{\varkappa + 1}{4}\varepsilon J^+(\xi_0)\right] - \tag{5}
$$

$$
- \frac{3-\varkappa}{8}\varepsilon \int\limits_{\xi_0 - n}^{t_1} J^-(\eta)\,d\eta + \frac{3-\varkappa}{3}\varepsilon \int\limits_{\xi_0}^{t_2} J^+(\xi)\,d\xi.
$$

Поскольку рассматриваются периодические решения, верны равенства

$$
\int\limits_{\xi_0 - n}^{t_1} J^-(\eta)\,d\eta = -\int\limits_{\xi_0}^{t_2} J^+(\xi)\,d\xi = -\int\limits_{0}^{\varkappa} J^+(\xi)\,d\xi = I_0 = \mathrm{const}, \tag{6}
$$

(5) совпадает с соответствующей формулой одномерной газовой динамики [4].

Согласно сказанному ранее, все равенства, относящиеся к интегрированию (3), верны с точностью $O(\varepsilon)$. Аналогично ниже при интегрировании (2) равенства выполнены с точностью $O(\varepsilon^2)$. Обозначая $dS/dx = \Phi(x)$, имеем

$$
J^-(t_1, n) = J^-(t_1) = -J^+(t_1, n) = \tag{7}
$$

$$
= -J^+(\xi_0) + \frac{\varepsilon}{2} J^+(\xi_0) \int\limits_0^n \Phi(x)\,dx + \frac{\varepsilon}{4} \int\limits_{\xi_0 - n}^{t_1} \Phi\left(\frac{\eta - \xi_0 + n}{2}\right) J^-(\eta)\,d\eta,
$$

$$
J^+(t_2, 0) = J^+(t_2) = -J^-(t_2, 0) + \frac{2\delta}{\varepsilon} f(t_2) = -J^-(t_1) -
$$

$$
- \varepsilon \frac{J^-(t_1)}{2} \int\limits_0^n \Phi(x)\,dx - \frac{\varepsilon}{4} \int\limits_{\xi_0}^{t_2} \Phi\left(\frac{t_1 + n - \xi}{2}\right) J^+(\xi)\,d\xi + \frac{2\delta}{\varepsilon} f(t_2),
$$

$$
J^+(t_2) = -\frac{\varepsilon}{2} J^+(\xi_0) \int\limits_0^n \Phi(x)\,dx - \frac{\varepsilon}{4} \int\limits_{\xi_0 - n}^{t_1} \Phi\left(\frac{\eta - \xi_0 + n}{2}\right) J^-(\eta)\,d\eta -
$$

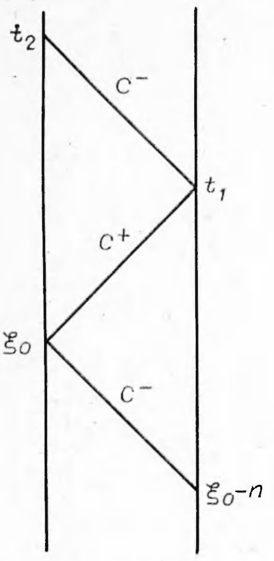
$$
- \frac{\varepsilon}{2} J^-(t_1) \int\limits_0^n \Phi(x)\,dx - \frac{\varepsilon}{4} \int\limits_{\xi_0}^{t_2} \Phi\left(\frac{t_1 + n - \xi}{2}\right) J^+(\xi)\,d\xi + \frac{2\delta}{\varepsilon} f(t_2) + J^+(\xi_0),
$$

$$
J^+(t_2) = J^+(\xi_0) - \frac{\varepsilon}{4} \int\limits_{t_2 - 2n}^{t_2} J^+(\xi)\left[\Phi\left(\frac{t_2 - \xi}{2}\right) - \Phi\left(\frac{\xi - t_2 + 2n}{2}\right)\right] d\xi.
$$

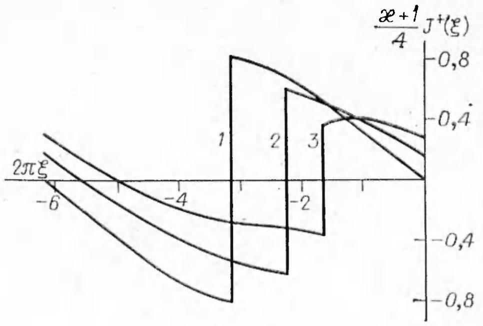
Соотношения (5), (7) образуют замкнутую систему уравнений, которой должно удовлетворять решение поставленной задачи. Константа I_0 в (6), как это будет видно далее, определяется начальными условиями задачи.

До сих пор не обсуждался вопрос об ударных волнах, которые могут возникать в поле течения. Легко показать, что их положение с нужной точностью определяется правилом площадей [4] в области многозначности решения. Эти площади можно вычислять по профилям, трансформирующимся в соответствии с законами одномерной газовой динамики [4], т. е. при определении положения ударных волн, как и при определении характеристик (5), эффекты, связанные с изменением сечения трубы, несущественны.

Действительно, параметры потока в нашем случае и в случае одномерных течений, как это видно из (5) и (6), в любой точке течения отли-



Фиг. 1



Фиг. 2

чаются на величины порядка ε^2. То же утверждение относится и к скорости ударных волн.

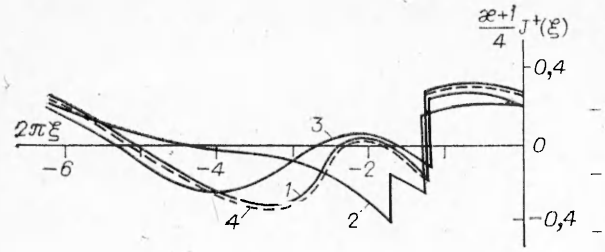
Подставляя (5) в (7), разлагая полученное равенство в ряд Тейлора и учитывая периодичность искомого решения, приходим к интегродифференциальному уравнению [1] (не будем проводить эти простые выкладки, аналогичные [4, 5], заметим лишь, что отсюда имеем связь $\delta=\varepsilon^2$). Решение последнего представляет сложную задачу, в то время как систему (5), (7) можно решить по схеме [4].

Зададим на отрезке [0, 1] функцию $J_0(\xi)$, удовлетворяющую условию $J_0(0) = J_0(1)$. Преобразованием (5) переведем [0, 1] в отрезок $[t(0),\ t(1)]$, также имеющий единичную длину. Новые значения $J_1(\xi)$ в соответствующих точках вычислим по формуле (7) без учета интегрального члена, т. е. по формуле одномерной газодинамики [4]. Если в распределении $J_1(\xi)$ возникнут области многозначности, введем здесь по правилу площадей сильные разрывы. Считая $J_1(\xi)$ периодической функцией, вычислим по ней интегральный член (7) и прибавим его к $J_1(\xi)$. Легко видеть, что это новое распределение $J_2(\xi)$ с точностью ε связано с $J_0(\xi)$ формулой (7). Из условия периодичности определим $J_2(\xi)$ на [0, 1] и будем повторять указанную процедуру до достижения установления. Заметим, что $\int\limits_0^1 J_2(\xi)\,d\xi = \int\limits_0^1 J_0(\xi)\,d\xi = -I_0$, эта величина сохраняется в ходе итераций. Поэтому в формуле (6) $I_0 = -k\int\limits_0^1 J_0(\xi)\,d\xi$.

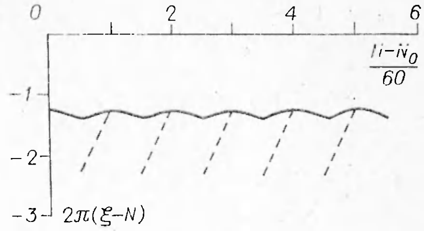
По описанному алгоритму были проведены расчеты для различных профилей труб $\Phi(x)$, законов движения поршня $f(t)$ и значений малых параметров Δ и δ.

На фиг. 2 приведены результаты расчетов, в которых полагалось $f(t) = [2/(\varkappa+1)]\sin 2\pi t$, $n = 1/2$, $\varepsilon = 2\cdot 10^{-2}$, $\Phi = (2\pi)^2\alpha\xi$, $I_0 = 0$, $\varkappa = 1{,}4$. Кривые *1—3* отвечают значениям $\alpha = 0,\ 1,\ 2$. Вертикальными отрезками на фигуре обозначены ударные волны. Кривая *1* соответствует резонансным колебаниям в цилиндрической трубе. Видно, что по мере увеличения раствора трубы амплитуда периодических колебаний падает. Возможно, существуют каналы такой формы, что амплитуда периодических резонансных колебаний в них превышает амплитуду колебаний в цилиндрической трубе. В расчетах с различными функциями $\Phi(\xi)$ такой ситуации зарегистрировано не было.

Все примеры, содержащиеся в [1—3, 6, 7], относятся к периодическим колебаниям. Задачи того же класса решались до сих пор методом [4,5]. В действительности область применимости последнего гораздо шире. По существу, как было отмечено в [4, 5], он является методом характеристик,



Фиг. 3



Фиг. 4

который при некоторых дополнительных предположениях относительно искомых решений позволяет вычислять положение характеристик, величины «инвариантов», переносимых характеристиками, и положение ударных волн, образующихся от пересечения характеристик одного семейства сразу на конечных расстояниях.

В качестве примера, иллюстрирующего возможности метода, приведем решение задачи о колебаниях в трубе с достаточно большим раствором. Положим в предыдущем выражении для Ф $\alpha = 3$. Проведенные расчеты показывают, что течение в этом случае на больших временах становится квазипериодическим. На решение с периодом единица накладывается «длинная» модуляция с периодом, равным приблизительно 60. На фиг. 3 нанесены осциллограммы $J^0(\xi) = [(\varkappa + 1)/4]J^+(\xi)$ на левой границе в моменты времени T_0, $T_0 + 20$, $T_0 + 40$, $T_0 + 60$, отмеченные соответственно цифрами *1*—*4* (графики приведены к отрезку $[-1,0]$ по периодичности, T_0 достаточно велико, чтобы начальные условия «забылись»). Видно, что в течении, содержащем одну ударную волну (кривая *1*), зарождается вторая (кривая *2*), далее две волны сливаются (кривая *3*) и картина течения (кривая *4*) возвращается к исходному состоянию (кривая *1*), кривые *1* и *4* неразличимы в масштабе фиг. 3, поэтому кривая *4* нанесена штрихами. Единственное изменение, которое следует внести для данного случая в изложенный выше алгоритм состоит в том, что решение не продолжается в ходе итераций на отрезок $[0, 1]$. Что же касается интеграла, входящего в (7), то его можно вычислять, как и ранее, в силу квазипериодичности решения. Обозначим $\xi_{s1}(\xi_{s2})$ моменты прихода на поршень первой (второй волны), а через N — целое число такое, что $N - 1 < \xi_{s1} \leqslant N$. Квазипериодичность процесса легко усматривается из фиг. 4, где сплошной линией отложена ломаная, соединяющая точки $[2\pi(\xi_{s1} - N), (N - N_0)/60]$, а штриховой — ломаная, вершинами которой являются точки $[2\pi(\xi_{s2} - N), (N - N_0)/60]$, N_0 — достаточно большое число, чтобы указанный режим успел установиться, и зависит от начальных условий. На конечное решение, как показывают расчеты, начальные условия влияния не оказывают.

Полученная картина течения объясняется интерференцией волн с периодом, кратным периоду вынуждающей «силы», с собственными решениями для канала переменного сечения. С ростом α роль последних усиливается. Дальнейшее увеличение α делает картину течения еще более сложной.

Детальный анализ причин возникновения «длинной» модуляции представляет самостоятельный интерес и не приводится в данной работе.

Автор выражает благодарность В. Е. Фортову и С. И. Анисимову за интерес к работе и поддержку.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Keller J. J.** Nonlinear acoustic resonances in shock tubes with varying cross-sectional area.— ZAMP, 1977, Bd 28, F. 1, S. 107.
2. **Горьков Л. П.** Нелинейные акустические колебания столба газа в закрытой трубе.— Инж. журн., 1963, т. 3, вып. 2.

3. Chester W. Resonant oscillations in closed tubes.— J. Fluid Mech., 1964, v. 18, pt 11.
4. Крайко А. Н., Ни А. Л. О приближении нелинейной акустики в задачах о колебаниях газа в трубах.— ПММ, 1980, т. 44, № 1.
5. Ни А. Л. Нелинейные резонансные колебания газа в трубе под воздействием периодически изменяющегося давления.— ПММ, 1983, т. 47, № 4.
6. Галиев Ш. У., Ильгамов Н. А., Садыков А. В. О периодических ударных волнах в газе.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1970, № 2.
7. Mortell M. P., Seymour B. R. A finite-rate theory of quadratic resonance in closed tube.— J. Fluid Mech., 1981, v. 112, p. 411.

Поступила 21/III 1984 г.

УДК 532.593:532.529

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ВОЗДУШНЫХ УДАРНЫХ ВОЛН С ПОРИСТЫМИ СЖИМАЕМЫМИ МАТЕРИАЛАМИ

Л. Г. Гвоздева, Ю. М. Фаресов, В. П. Фокеев

(Москва)

Экспериментальные исследования, посвященные изучению процесса взаимодействия воздушных ударных волн с пористыми сжимаемыми материалами типа пенополиуретана и пенопласта, показали, что подобное взаимодействие обладает рядом специфических особенностей. Так, в [1] было обнаружено, что максимальная амплитуда давления на стенке под слоем пенополиуретана может существенно превышать величину давления нормального отражения ударной волны от жесткой стенки. В [1] высказано предположение, что этот эффект объясняется вовлечением твердой фазы пористого материала в движение за проникающей волной. В [2] анализируется случай усиления косой ударной волны при падении на слой пористого сжимаемого материала. Изучение взаимодействия воздушной ударной волны с пористым экраном из пенополиуретана проводилось в [3], причем было зарегистрировано значительное снижение пикового давления на стенке при наличии воздушного зазора между стенкой и экраном. Для теоретического описания процесса в [3] предложено применить расчетный метод [4], развитый первоначально для описания газодинамических течений с твердыми частицами. Ниже приведены результаты экспериментальных исследований взаимодействия стационарной ударной волны со стенкой, облицованной слоями пористых сжимаемых материалов различной толщины.

Для экспериментов были выбраны эластичный пенополиуретан марки ППУ-3М-1 и пенопласт марки ПХВ-1; плотности этих материалов относительно близки (33 и 50 кг/м^3 соответственно), а жесткость пенопласта существенно больше. Величина разрушающего напряжения для пенопласта выбранной марки составляет $(4-7)\cdot 10^5$ Н/м^2 [5].

Отметим, что давление нормального отражения ударной волны от жесткой стенки в наших экспериментах варьировалось в диапазоне $(1-15)\cdot 10^5$ Па, что существенно превышает характерное значение напряжения сжатия пенополиуретана $\sim 10^4$ Н/м^2 при 40% деформации [5] и сравнимо с соответствующей величиной для пенопласта. Это позволяет выявить роль механизма акустической передачи давления через жесткую структуру покрытия. Коэффициенты пористости исследуемых материалов близки и составляют 0,95—0,98.

Схема эксперимента и диагностического обеспечения представлена на фиг. 1. Исследования проводились на однодиафрагменной ударной трубе с каналом квадратного сечения $0,1\times 0,1$ м. Длина камеры низкого давления (КНД) и исследовательской секции (ИС) с оптическими окнами составляла 8 м, камеры высокого давления (КВД) — 1,5 м. На торцевую заглушку исследовательской секции с вмонтированным в нее пьезодатчиком давления помещали плоские слои *1* исследуемых материалов различной толщины, полностью перекрывая сечение канала ударной трубы. В опытах использовались измерительные пьезодатчики давления *2*, конструкция которых описана в [6]. Измерение скорости падающей ударной волны производилось с помощью пьезодатчиков давления, расположенных в боковых стенках канала, и специальных схем формирователей импульсов *3*, служащих для запуска цифрового частотомера ЧЗ-33 *4*, и измерительного осциллографа «Тектроникс» 453А *5*. Для согласования высокого