

УДК 629.7.015

АНАЛИЗ ПРИЧИН ВОЗНИКНОВЕНИЯ АЭРОДИНАМИЧЕСКОГО ГИСТЕРЕЗИСА ПРИ ЛЕТНЫХ ИСПЫТАНИЯХ СПУСКАЕМОГО АППАРАТА “СОЮЗ” НА ГИПЕРЗВУКОВОМ УЧАСТКЕ СПУСКА

О. Н. Хатунцева

Ракетно-космическая корпорация “Энергия”, 141070 Королев
E-mail: ol-khatun@yandex.ru

С использованием математической модели, разработанной для описания гистерезисных функций аэродинамических сил и моментов, зависящих как от угла атаки, так и от скорости его изменения, установлено, что появление гистерезиса при летных испытаниях спускаемого аппарата “Союз” на гиперзвуковом участке спуска обусловлено демпфированием.

Ключевые слова: гистерезис, демпфирование, аэродинамические коэффициенты.

В аэродинамике, так же как и в других областях физики, достаточно часто исследуются процессы, в которых имеет место зависимость измеряемых параметров, в частности аэродинамических коэффициентов сил и моментов, не только от варьируемого аргумента, например угла атаки набегающего потока, но и от направления изменения этого аргумента. Если скорость изменения аргумента ненулевая, то характеристикой направления изменения этого аргумента можно считать знак скорости его изменения. Данные явления называются гистерезисными. Изучение аэродинамического гистерезиса, начатое достаточно давно, и в настоящее время является актуальной задачей (см., например, [1]).

При обнаружении гистерезисов аэродинамических характеристик летательных аппаратов в условиях реального полета необходимо определить причины возникновения этих явлений, а именно выяснить, обусловлен ли гистерезис перестройкой течения и существованием различных режимов течения, или он является следствием демпфирования колебаний летательного аппарата относительно центра масс (ЦМ) за счет дополнительных аэродинамических сил и моментов, появляющихся в неустановившемся режиме его движения. Аэродинамическое демпфирование происходит следующим образом. При вращении летательного аппарата в положительном направлении для обтекаемых поверхностей, расположенных позади ЦМ, углы атаки увеличиваются, а для расположенных перед ЦМ — уменьшаются. Таким образом, вращение приводит к тому, что дополнительная подъемная сила, возникающая позади ЦМ летательного аппарата, направлена вверх, а возникающая перед ЦМ — вниз, в результате чего появляется дополнительный (демпфирующий) момент, направление которого противоположно направлению вращения.

Целью данной работы является определение причин возникновения гистерезиса аэродинамических характеристик спускаемого аппарата (СА) “Союз”, полученных в летном эксперименте с принудительной раскачкой аппарата по углу атаки на гиперзвуковых скоростях полета [2].

Все гистерезисные явления в аэродинамике можно разделить на два типа. К гистерезисным явлениям первого типа отнесем те явления, которые зависят и от направления изменения аргумента, и от модуля скорости его изменения. (Следует отметить, что гистерезисные функции, описывающие гистерезисные явления первого типа, вырождаются

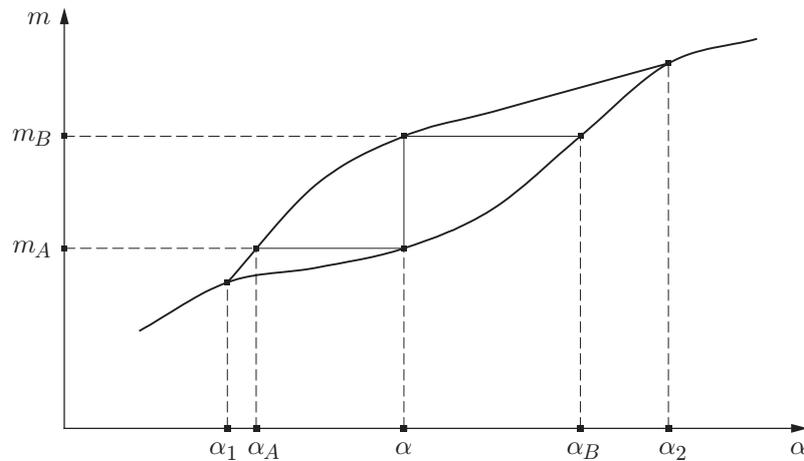


Рис. 1. Зависимость $m(\alpha)$, имеющая вид гистерезисной функции первого класса

в однозначные функции при стремлении к нулю скорости изменения аргумента.) К гистерезисным явлениям второго типа можно отнести явления, зависящие от направления изменения аргумента, но не зависящие от величины (модуля) скорости его изменения. Возможно также существование гистерезисных явлений смешанного типа, которые имеют особенности, характерные для явлений и первого, и второго типов.

Рассмотрим по отдельности физические и математические особенности явлений обоих типов.

Начнем с описания явлений первого типа. Предположим, что исследуется зависимость параметра m от варьируемого аргумента α . Поскольку априори известно, что исследуемые процессы зависят также от скорости изменения аргумента: $m = m(\alpha, \dot{\alpha})$, очевидно, что изображение на координатной плоскости (m, α) зависимости исследуемой функции m только от аргумента α является проекцией фазового пространства большей размерности (как минимум трехмерного пространства) на пространство меньшей размерности (плоскость). Поэтому, даже не рассматривая физику процесса, можно утверждать, что в общем случае возможно существование неопределенности в зависимости исследуемой функции m только от одного аргумента. Это обуславливает гистерезисную форму графика данной функции на плоскости (m, α) (рис. 1). Как правило, такие гистерезисные функции имеют вид петли с вырожденными концами в точках изменения направления варьирования аргумента (область $\alpha_1 < \alpha < \alpha_2$ на рис. 1). При малой скорости изменения аргумента $\dot{\alpha}$ ($\dot{\alpha} \rightarrow 0$) должно произойти “вырождение” гистерезисной функции $m(\alpha)$ в однозначную функцию на плоскости (m, α) .

С физической точки зрения основной причиной возникновения гистерезисных явлений первого типа является демпфирование.

Для гистерезисных процессов второго типа характерно отсутствие зависимости исследуемого параметра от величины (модуля) скорости изменения варьируемого аргумента. На плоскости (m, α) такие функции, как правило, имеют вид гистерезисных функций с разрывами первого рода. При изменении направления, в котором варьируется аргумент, точки разрыва обычно не совпадают. Иногда может наблюдаться некоторая корреляция с изменением скорости вариации аргумента, но она имеет скорее вероятностный, а не детерминированный характер. Примером зависимости, описывающей такие явления, может служить зависимость силы сопротивления обтекаемой сферы от числа Рейнольдса $C_x(\text{Re})$ при переходе в дозвуковом потоке от ламинарного режима обтекания к турбулентному и наоборот, а также изменение давления на цилиндре за угловой кромкой системы тел

конус — цилиндр при увеличении и уменьшении числа Маха или угла атаки в окрестности критических чисел Маха, характеризующихся переходом от безотрывного режима обтекания угловой кромки к режиму отрывного обтекания и наоборот [3]. При описании гистерезисных явлений второго типа нельзя однозначно утверждать, что зависимость $m(\alpha)$ на плоскости (m, α) является проекцией фазового пространства физических переменных большей размерности на эту плоскость. Как правило, возникновение таких явлений обусловлено возможностью существования различных режимов процесса в одном диапазоне значений варьируемого аргумента, т. е. возможностью существования нескольких решений в диапазоне значений варьируемого аргумента.

Математическим аппаратом, используемым при описании гистерезисных явлений второго типа, может служить разработанный ранее (см., например, [4, 5]) метод описания функций в областях скачкообразного изменения их параметров в приближении функций с разрывом первого рода.

В данной работе рассматриваются гистерезисные явления первого типа с использованием экспериментальных и численных зависимостей $m_{st}(\alpha)$, полученных для стационарных случаев.

Следует отметить, что в точках с нулевой скоростью изменения аргумента α функция $m(\alpha)$ не зависит от направления, в котором изменяется аргумент: $m(\alpha, \dot{\alpha})|_{\dot{\alpha}=0} = m(\alpha) = m_{st}(\alpha)$.

В области $\alpha_1 < \alpha < \alpha_2$, где $\dot{\alpha} \neq 0$, функция $m(\alpha, \dot{\alpha})$ имеет некоторое распределение, зависящее от величины $\dot{\alpha}$. Будем считать, что среднее значение этой функции в каждой точке α равно ее стационарному значению $m_{st}(\alpha)$ в этой точке.

Рассмотрим распределение параметра m по скоростям $\dot{\alpha}$ в точке α :

$$m_{st}(\alpha) = \langle m(\alpha, \dot{\alpha}) \rangle = \frac{1}{\dot{\alpha}_{\max}(\alpha) - \dot{\alpha}_{\min}(\alpha)} \int_{\dot{\alpha}_{\min}(\alpha)}^{\dot{\alpha}_{\max}(\alpha)} m(\alpha, \dot{\alpha}) d\dot{\alpha}.$$

Построим ячейку, соответствующую точке α . Для этого в выбранной точке α строим вертикальную прямую до точки ее пересечения с ветвями кривой гистерезиса. В точках пересечения строим две горизонтальные прямые также до точек их пересечения с гистерезисной кривой. Полученные таким образом крайняя левая и крайняя правая точки соответственно имеют координаты $\alpha_A(\alpha)$ и $\alpha_B(\alpha)$. Переходя к безразмерной переменной скорости

$$\dot{\varphi} = \frac{\dot{\alpha}}{\dot{\alpha}_{\max}(\alpha) - \dot{\alpha}_{\min}(\alpha)},$$

можно записать выражение для функции параметра m в виде

$$m_{st}(\alpha) = \langle m(\alpha, \dot{\varphi}) \rangle = \int_{\dot{\varphi}_{\min}(\alpha)}^{\dot{\varphi}_{\max}(\alpha)} m(\alpha, \dot{\varphi}) d\dot{\varphi}.$$

Разделив обе части этого равенства на величину $m_{st}(\alpha)$ (при условии, что $m_{st} \neq 0$), получаем соотношение

$$\langle M^2 \rangle = \int_{\dot{\varphi}_{\min}(\alpha)}^{\dot{\varphi}_{\max}(\alpha)} M^2 d\dot{\varphi} = 1,$$

где $M^2 = m(\alpha, \dot{\varphi})/m_{st}(\alpha)$ — плотность распределения по скоростям $\dot{\varphi}$ в точке φ (рис. 2).

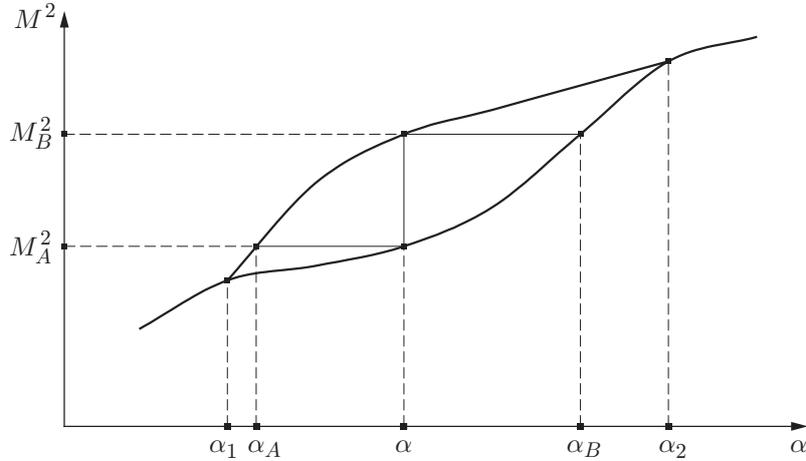


Рис. 2. Зависимость плотности M^2 распределения функции m по скоростям $\dot{\varphi}$ от безразмерной координаты α

Гистерезисная кривая состоит из определенных значений скорости $\dot{\varphi}$ в любой точке α . Этим значениям $\dot{\varphi}_{\min}(\alpha)$ и $\dot{\varphi}_{\max}(\alpha)$ соответствуют значения $M_A^2(\alpha)$ и $M_B^2(\alpha)$. Остальным (нереализованным) значениям скорости $\dot{\varphi}_{\min}(\alpha) < \dot{\varphi}(\alpha) < \dot{\varphi}_{\max}(\alpha)$ соответствуют значения $M_A^2(\alpha) < M^2(\alpha) < M_B^2(\alpha)$. Каждому значению $M^2(\alpha)$ в этом диапазоне соответствует интервал $\Delta\alpha_{M^2(\alpha)}$, причем для любого значения $M_A^2(\alpha) \leq M^2(\alpha) \leq M_B^2(\alpha)$ верно неравенство $\Delta\alpha_{M^2(\alpha)} \leq \alpha_B - \alpha_A$. Величина $\alpha_B - \alpha_A = \Delta\alpha_{M_B^2} + \Delta\alpha_{M_A^2}$ ($\Delta\alpha_{M_A^2} = \alpha - \alpha_A$; $\Delta\alpha_{M_B^2} = \alpha_B - \alpha$) определяет дисперсию параметра α в заданной точке.

Для того чтобы найти дисперсионное соотношение в рассматриваемой ячейке, являющейся подобластью гистерезисной области в точке $\alpha_A < \alpha < \alpha_B$ (см. рис. 2), рассмотрим коммутационное соотношение двух операторов: оператора сдвига вдоль скорости изменения аргумента $\hat{k} = \partial/\partial\dot{\varphi}$ и оператора умножения $\hat{\alpha} = \alpha$: $[\hat{k}, \hat{\alpha}]M = (\partial\alpha/\partial\dot{\varphi})M$.

С использованием зависимостей

$$\Delta_M^k = [(\hat{k}^2 M, M) - (\hat{k} M, M)^2]^{1/2}, \quad \Delta_M^\alpha = [(\hat{\alpha}^2 M, M) - (\hat{\alpha} M, M)^2]^{1/2},$$

$$\Delta_M^k \Delta_M^\alpha \geq (1/2)|([\hat{k}, \hat{\alpha}]M, M)|$$

(выражения в круглых скобках — скалярные произведения в гильбертовом пространстве $H^1(\Omega \subset \mathbb{R}^1)$) получаем следующие выражения для $(\hat{k}M, M)$, $(\hat{k}^2 M, M)$ в пространстве с дополнительным параметром — скоростью изменения аргумента:

$$(\hat{k}M, M) = \int_{\dot{\varphi}_{\min}(\alpha)}^{\dot{\varphi}_{\max}(\alpha)} M \frac{\partial M}{\partial \dot{\varphi}} d\dot{\varphi} = \frac{1}{2}(M_B^2 - M_A^2),$$

$$(\hat{k}^2 M, M) = \int_{\dot{\varphi}_{\min}(\alpha)}^{\dot{\varphi}_{\max}(\alpha)} M \frac{\partial^2 M}{\partial \dot{\varphi}^2} d\dot{\varphi} =$$

$$= M_B \frac{\partial M_B}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial \dot{\varphi}_{\max}(\alpha)} - M_A \frac{\partial M_A}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial \dot{\varphi}_{\min}(\alpha)} - \int_{\dot{\varphi}_{\min}(\alpha)}^{\dot{\varphi}_{\max}(\alpha)} \left(\frac{\partial M}{\partial \dot{\varphi}}\right)^2 d\dot{\varphi}.$$

Здесь M_A , M_B — минимальное и максимальное значения параметра M в точке α соответственно (см. рис. 2). Интеграл $\int_{\dot{\varphi}_{\min}(\alpha)}^{\dot{\varphi}_{\max}(\alpha)} \left(\frac{\partial M}{\partial \dot{\varphi}}\right)^2 d\dot{\varphi}$ в правой части второго выражения в линейном приближении можно записать в виде

$$\int_{\dot{\varphi}_{\min}(\alpha)}^{\dot{\varphi}_{\max}(\alpha)} \left(\frac{\partial M}{\partial \dot{\varphi}}\right)^2 d\dot{\varphi} \approx \left(\frac{M_B(\alpha) - M_A(\alpha)}{\dot{\varphi}_{\max}(\alpha) - \dot{\varphi}_{\min}(\alpha)}\right)^2 (\dot{\varphi}_{\max}(\alpha) - \dot{\varphi}_{\min}(\alpha)) = (M_B(\alpha) - M_A(\alpha))^2.$$

Тогда полученное выше выражение для $(\hat{k}^2 M, M)$ представляется в виде

$$(\hat{k}^2 M, M) = M_B(\alpha) \frac{\partial M_B(\alpha)}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial \dot{\varphi}_{\max}(\alpha)} - M_A(\alpha) \frac{\partial M_A(\alpha)}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial \dot{\varphi}_{\min}(\alpha)} - (M_B(\alpha) - M_A(\alpha))^2.$$

Следовательно,

$$\Delta_M^k = \left(M_B \frac{\partial M_B}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial \dot{\varphi}_{\max}(\alpha)} - M_A \frac{\partial M_A}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial \dot{\varphi}_{\min}(\alpha)} - (M_B - M_A)^2 - \frac{1}{4} (M_B^2 - M_A^2)^2 \right)^{1/2}. \quad (1)$$

Среднеквадратичное отклонение по аргументу

$$\Delta_M^\alpha = [(\hat{\alpha}^2 M, M) - (\hat{\alpha} M, M)^2]^{1/2} = (\langle \alpha^2 \rangle - \langle \alpha \rangle^2)^{1/2}$$

в точке α должно быть равно половине расстояния между точками α_A и α_B :

$$\Delta_M^\alpha \approx |\alpha_B(\alpha) - \alpha_A(\alpha)|/2 = 1/2. \quad (2)$$

Остается найти значение выражения для скобок Пуассона от коммутатора операторов в точке α :

$$|([\hat{k}, \hat{\alpha}]M, M)| = \left| \int_{\dot{\varphi}_{\min}(\alpha)}^{\dot{\varphi}_{\max}(\alpha)} \frac{\partial \alpha}{\partial \dot{\varphi}} M^2 d\dot{\varphi} \right| = \left| \int_{\alpha_A}^{\alpha_B} M^2 d\alpha \right| \approx \frac{1}{2} |(M_B^2 - M_A^2)(\alpha_B - \alpha_A)|. \quad (3)$$

Из соотношения, связывающего среднеквадратичные отклонения в фазовом пространстве: $\Delta_M^k \Delta_M^\alpha \geq |([\hat{k}, \hat{\alpha}]M, M)|/2$, следует, что минимум среднеквадратичного отклонения функции $M(\alpha)$ по скоростям изменения аргумента $\dot{\varphi}$ на участке $\alpha_A \leq \alpha \leq \alpha_B$ (что соответствует минимуму производства энтропии при изменении направления вариации аргумента) достигается в случае равенства левой и правой частей этого соотношения. Однако, если система не является замкнутой, например в случае действия диссипативных сил, левая часть этого соотношения будет больше правой. Для того чтобы от неравенства перейти к равенству, введем коэффициент $\gamma \geq 1$, характеризующий степень влияния диссипативных сил при изменении направления вариации аргумента. В этом случае рассматриваемое соотношение принимает вид

$$\Delta_M^k \Delta_M^\alpha = \gamma |([\hat{k}, \hat{\alpha}]M, M)|/2.$$

Подставляя в это соотношение выражения (1)–(3), запишем уравнение

$$M_B \frac{\partial M_B}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial \dot{\varphi}_{\max}(\alpha)} - M_A \frac{\partial M_A}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial \dot{\varphi}_{\min}(\alpha)} - (M_B - M_A)^2 = \frac{\gamma^2 + 1}{4} (M_B^2 - M_A^2)^2.$$

Вновь переходя к физическим параметрам, получаем

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} m_{st}(\dot{\alpha}_{\max}(\alpha) - \dot{\alpha}_{\min}(\alpha)) \left(\frac{\partial m_B / \partial \alpha}{\partial \dot{\alpha}_{\max}(\alpha) / \partial \alpha} - \frac{\partial m_A / \partial \alpha}{\partial \dot{\alpha}_{\min}(\alpha) / \partial \alpha} \right) - m_{st}(\sqrt{m_B} - \sqrt{m_A})^2 = \\ = \frac{\gamma^2 + 1}{4} (m_B - m_A)^2. \end{aligned} \quad (4)$$

В случае гармонического режима изменения аргумента α по времени t нетрудно найти зависимость $\dot{\alpha}(\alpha)$. Действительно, в этом режиме для аргумента $\alpha(t)$ должно выполняться соотношение

$$\alpha = \frac{\alpha_2 + \alpha_1}{2} - \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{2} \cos\left(2\pi \frac{t}{T}\right),$$

где $\alpha_1 < \alpha < \alpha_2$; α_1, α_2 — крайние левая и правая точки на гистерезисной кривой (точки разворота) соответственно; T — период гармонических изменений аргумента. Следовательно,

$$\dot{\alpha} \Big|_{\min}^{\max} = \frac{\pi}{T} (\alpha_2 - \alpha_1) \sin\left(2\pi \frac{t}{T}\right) = \pm \frac{2\pi}{T} \sqrt{(\alpha_2 - \alpha)(\alpha - \alpha_1)}. \quad (5)$$

Тогда

$$\frac{\partial \dot{\alpha}}{\partial \alpha} \Big|_{\min}^{\max} = \pm \frac{\pi}{T} \frac{\alpha_1 + \alpha_2 - 2\alpha}{\sqrt{(\alpha_2 - \alpha)(\alpha - \alpha_1)}}. \quad (6)$$

Из уравнения (4) с учетом (5), (6) получаем соотношение

$$\begin{aligned} 2 \left(\frac{1}{\alpha - \alpha_1} - \frac{1}{\alpha_2 - \alpha} \right)^{-1} m_{st} \left(\frac{\partial m_B}{\partial \alpha} + \frac{\partial m_A}{\partial \alpha} \right) - m_{st}(\sqrt{m_B} - \sqrt{m_A})^2 = \\ = \frac{\gamma^2 + 1}{4} (m_B - m_A)^2, \end{aligned} \quad (7)$$

где $\alpha_1 < \alpha < \alpha_2$, $\alpha \neq (\alpha_1 + \alpha_2)/2$.

Точка $\alpha = (\alpha_1 + \alpha_2)/2$ является особой точкой, так как в ней производная $\partial \dot{\alpha} / \partial \alpha$ равна нулю. В случае если гистерезисная область расположена горизонтально, гистерезисная ячейка, соответствующая этой точке, вырождается в вертикальный отрезок: $\alpha = \alpha_A(\alpha) = \alpha_B(\alpha)$.

Полную производную функции $m(\alpha, \dot{\alpha})$ по параметру α можно представить в виде

$$\frac{dm(\alpha, \dot{\alpha})}{d\alpha} = \frac{\partial m}{\partial \alpha} + \frac{\partial m}{\partial \dot{\alpha}} \frac{\partial \dot{\alpha}}{\partial \alpha}.$$

Следовательно, для стационарного параметра $m_{st}(\alpha)$ полная производная по α равна ее частной производной:

$$\frac{dm_{st}(\alpha)}{d\alpha} = \frac{\partial m_{st}}{\partial \alpha}.$$

В случае если $\dot{\alpha} \neq 0$ в рассматриваемом гармоническом режиме изменений аргумента α , с учетом выражения (6) можно записать

$$\frac{dm(\alpha, \dot{\alpha})}{d\alpha} \Big|_{\min}^{\max} = \frac{\partial m_{st}}{\partial \alpha} \pm \frac{\pi}{T} \frac{\alpha_1 + \alpha_2 - 2\alpha}{\sqrt{(\alpha_2 - \alpha)(\alpha - \alpha_1)}} \frac{\partial m}{\partial \dot{\alpha}}.$$

При проецировании пространства $(m; \alpha, \dot{\alpha})$ на плоскость (m, α) полные производные $dm(\alpha, \dot{\alpha})/d\alpha \Big|_{\min}^{\max}$ задают значения частных производных для верхней и нижней ветвей кривой гистерезиса:

$$\frac{dm(\alpha, \dot{\alpha})}{d\alpha} \Big|_{\max} = \frac{\partial m_B(\alpha)}{\partial \alpha}, \quad \frac{dm(\alpha, \dot{\alpha})}{d\alpha} \Big|_{\min} = \frac{\partial m_A(\alpha)}{\partial \alpha}.$$

Поэтому в случае гармонического режима изменения аргумента α по t можно записать выражения

$$\frac{\partial m_B}{\partial \alpha} = \frac{\partial m_{st}}{\partial \alpha} + \frac{\pi}{T} \frac{\alpha_1 + \alpha_2 - 2\alpha}{\sqrt{(\alpha_2 - \alpha)(\alpha - \alpha_1)}} \frac{\partial m}{\partial \dot{\alpha}}; \quad (8)$$

$$\frac{\partial m_A}{\partial \alpha} = \frac{\partial m_{st}}{\partial \alpha} - \frac{\pi}{T} \frac{\alpha_1 + \alpha_2 - 2\alpha}{\sqrt{(\alpha_2 - \alpha)(\alpha - \alpha_1)}} \frac{\partial m}{\partial \dot{\alpha}}. \quad (9)$$

Выражение (8) или (9) совместно с выражениями (5), (6) может быть использовано для определения режимов полета СА, на которых становится несущественным учет динамических добавок при вычислении аэродинамических характеристик. Действительно, в том случае, когда разность Δm значений m на верхней и нижней ветвях гистерезисной кривой в точке α меньше или равна величине вычисленных или экспериментальных погрешностей $\Delta_m(\alpha)$ определения номинального значения аэродинамической характеристики m в точке α , учет динамических поправок при определении аэродинамических характеристик не имеет смысла.

Учитывая равенство $m_B(\alpha) - m_{st}(\alpha) = \Delta m(\alpha)/2$, а также соотношение (6), из уравнения (8) получаем выражение

$$\frac{\partial \Delta m(\alpha)}{\partial \alpha} = 2 \frac{\partial m}{\partial \dot{\alpha}} \frac{\partial \dot{\alpha}}{\partial \alpha}$$

или

$$\delta(\Delta m(\alpha)) = 2 \frac{\partial m}{\partial \dot{\alpha}} \delta \dot{\alpha}.$$

С учетом соотношения (5) в окрестности точки разворота $\alpha = \alpha_1 + \delta\alpha$, где $\delta\alpha \rightarrow 0$, последнее выражение можно записать в виде

$$\Delta m(\alpha_1 + \delta\alpha) = \frac{4\pi \sqrt{(\alpha_2 - \alpha_1)\delta\alpha}}{T} \frac{\partial m}{\partial \dot{\alpha}} \Big|_{\alpha=\alpha_1+\delta\alpha}.$$

Заменяя в этом выражении производную:

$$\frac{\partial m}{\partial \dot{\alpha}} \Big|_{\alpha=\alpha_1+\delta\alpha} = \frac{\partial m}{\partial T} \frac{1}{\partial \dot{\alpha}/\partial T} \Big|_{\alpha=\alpha_1+\delta\alpha}$$

и используя полученное из соотношения (5) равенство

$$\frac{\partial \dot{\alpha}}{\partial T} \Big|_{\alpha=\alpha_1+\delta\alpha} = -\frac{2\pi \sqrt{(\alpha_2 - \alpha_1)\delta\alpha}}{T^2},$$

находим выражение

$$\begin{aligned} \Delta m(\alpha_1 + \delta\alpha) &= -2T \frac{\partial m(\alpha_1 + \delta\alpha)}{\partial T} = -2T \frac{\partial(m(\alpha_1 + \delta\alpha) - m_{st}(\alpha_1 + \delta\alpha))}{\partial T} = \\ &= -T \frac{\partial \Delta m(\alpha_1 + \delta\alpha)}{\partial T}, \end{aligned}$$

из которого следует

$$\frac{T}{T_0} = \frac{\Delta m_0(\alpha_1 + \delta\alpha)}{\Delta m(\alpha_1 + \delta\alpha)}. \quad (10)$$

Здесь $\Delta m_0(\alpha_1 + \delta\alpha)$ — разность значений m на верхней и нижней ветвях гистерезисной кривой в рассматриваемой точке $\alpha = \alpha_1 + \delta\alpha$, когда период гармонических изменений параметра α равен T_0 .

В тех случаях, когда линейная экстраполяция допустима, область определения значений параметра $\delta\alpha$ можно расширить: $0 < \delta\alpha < (\alpha_1 + \alpha_2)/2$.

Если в рассматриваемой точке величина Δm_0 равна вычислительной или экспериментальной погрешности Δ_m определения величины m : $\Delta m_0 = \Delta_m$, то из соотношения (10) следует, что при $T \geq T_0$ отсутствует необходимость учета динамических поправок аэродинамических характеристик в рассматриваемой точке.

Из зависимостей (8), (9) следует, что сумма производных $\partial m_B(\alpha)/\partial\alpha + \partial m_A(\alpha)/\partial\alpha$ в выражении (7) равна удвоенному стационарному значению производной параметра m в точке α :

$$\frac{\partial m_B(\alpha)}{\partial\alpha} + \frac{\partial m_A(\alpha)}{\partial\alpha} = 2 \frac{\partial m_{st}(\alpha)}{\partial\alpha}.$$

В этом случае выражение (7) принимает наиболее простой вид

$$4\left(\frac{1}{\alpha - \alpha_1} - \frac{1}{\alpha_2 - \alpha}\right)^{-1} m_{st}(\alpha) \frac{\partial m_{st}(\alpha)}{\partial\alpha} - m_{st}(\alpha) (\sqrt{m_B(\alpha)} - \sqrt{m_A(\alpha)})^2 = \\ = \frac{\gamma^2 + 1}{4} (m_B(\alpha) - m_A(\alpha))^2$$

или

$$4\left(\frac{1}{\alpha - \alpha_1} - \frac{1}{\alpha_2 - \alpha}\right)^{-1} m_{st}(\alpha) \frac{\partial m_{st}(\alpha)}{\partial\alpha} = \\ = (m_B(\alpha) - m_A(\alpha))^2 \left(\frac{\gamma^2 + 1}{4} + \frac{m_{st}(\alpha)}{(\sqrt{m_A} + \sqrt{m_B})^2} \right). \quad (11)$$

С учетом выражения для разности значений m на верхней и нижней ветвях гистерезисной кривой в произвольной точке α : $\Delta m(\alpha) = m_B(\alpha) - m_A(\alpha)$, а также соотношений $m_A(\alpha) = m_{st}(\alpha) - \Delta m(\alpha)/2$, $m_B(\alpha) = m_{st}(\alpha) + \Delta m(\alpha)/2$ в случае $|\Delta m(\alpha)/m_{st}(\alpha)| < 1$ получаем

$$(\sqrt{m_A(\alpha)} + \sqrt{m_B(\alpha)})^2 \approx 4m_{st} \left(1 - \frac{1}{16} \left(\frac{\Delta m(\alpha)}{m_{st}(\alpha)} \right)^2 \right) \approx 4m_{st}(\alpha).$$

Подставляя это соотношение в выражение (11), получаем

$$\Delta m(\alpha) \approx \sqrt{\frac{16}{\gamma^2 + 2}} \sqrt{\left| \frac{m_{st}(\alpha) \partial m_{st}(\alpha)/\partial\alpha}{1/(\alpha - \alpha_1) - 1/(\alpha_2 - \alpha)} \right|}, \quad (12)$$

где $\Delta m(\alpha) = m_B(\alpha) - m_A(\alpha)$; $\gamma \geq 1$; $\alpha_1 < \alpha < \alpha_2$, $\alpha \neq (\alpha_1 + \alpha_2)/2$.

Выражение (12) может быть использовано для оценки зависимости разности значений m на верхней и нижней ветвях гистерезисной кривой $\Delta m(\alpha)$ от расчетных значений $m_{st}(\alpha)$ и $\partial m_{st}(\alpha)/\partial\alpha$ в точках $\alpha \neq (\alpha_1 + \alpha_2)/2$, в которых выполняется соотношение $|\Delta m(\alpha)/m_{st}(\alpha)| < 1$.

Коэффициент γ в соотношении (12), характеризующий степень влияния диссипативных сил при изменении направления вариации аргумента, можно вычислить, если имеется хотя бы одна экспериментальная гистерезисная кривая, полученная для соответствующих условий (достаточно знать разность значений m на верхней и нижней ветвях гистерезисной кривой в одной точке).

Значение $\gamma = 1$ может быть использовано для оценки сверху разности значений m на верхней и нижней ветвях гистерезисной кривой.

Для аэродинамических гистерезисных кривых, полученных в натуральных испытаниях для корабля "Союз" [1], при гиперзвуковых скоростях коэффициент $\gamma \approx 8$, поэтому $\sqrt{16/(\gamma^2 + 2)} \approx 1/2$.

Следует отметить, что выражение (12) не может быть использовано для оценки разности значений m на верхней и нижней ветвях гистерезисной кривой в окрестностях точек, в которых либо сама функция m_{st} , либо ее производная $\partial m_{st}(\alpha)/\partial\alpha$ равна нулю. В этих точках правая часть выражения (12) равна нулю, при этом реальное значение Δm может быть ненулевым.

Условие $m_{st} \neq 0$ использовалось при введении нормы в гильбертовом пространстве, когда определялась плотность распределения по скоростям изменения аргумента. Кроме того, при $m_{st} = 0$ не выполняется соотношение $|\Delta m(\alpha)/m_{st}(\alpha)| < 1$.

Некорректность выражения (12) в точках, в которых $\partial m_{st}(\alpha)/\partial\alpha = 0$, объясняется тем, что в них, как правило, не выполняется соотношение

$$\frac{\partial m_B(\alpha)}{\partial\alpha} + \frac{\partial m_A(\alpha)}{\partial\alpha} = 2 \frac{\partial m_{st}(\alpha)}{\partial\alpha},$$

так как в разложении полной производной функции m по α необходимо учитывать вторые (а возможно, и следующие) производные параметра α по времени:

$$\frac{dm}{d\alpha} = \frac{\partial m}{\partial\alpha} + \frac{\partial m}{\partial\dot{\alpha}} \frac{\partial\dot{\alpha}}{\partial\alpha} + \frac{\partial m}{\partial\ddot{\alpha}} \frac{\partial\ddot{\alpha}}{\partial\alpha} + \dots,$$

т. е. рассматривать зависимости $m = m(\alpha, \dot{\alpha}, \ddot{\alpha}, \dots)$, дополняя фазовое пространство переменными $\ddot{\alpha}, \dots$.

В 70-х гг. XX в. предприятием научно-производственного объединения “Энергия” были проведены летные динамические испытания СА “Союз”. В ходе этих испытаний СА с помощью двигателей подвергался принудительной раскачке в плоскости тангажа в течение приблизительно 10 с, после чего совершал свободные колебания относительно центра масс длительностью примерно 30 с, а затем выполнял стабилизированный полет. Плоскость угла атаки СА была перпендикулярна горизонтальной плоскости Земли. На всем участке спуска полет происходил в режиме с максимальным аэродинамическим качеством (угол крена равен нулю). Первый цикл движения в возмущенном режиме начинался на высоте $H \approx 85$ км [1].

На рис. 3–5 приведены экспериментальные гистерезисные кривые, полученные в ходе натурного эксперимента на высоте $H \approx 85$ км при гиперзвуковых скоростях ($M \approx 28$), и

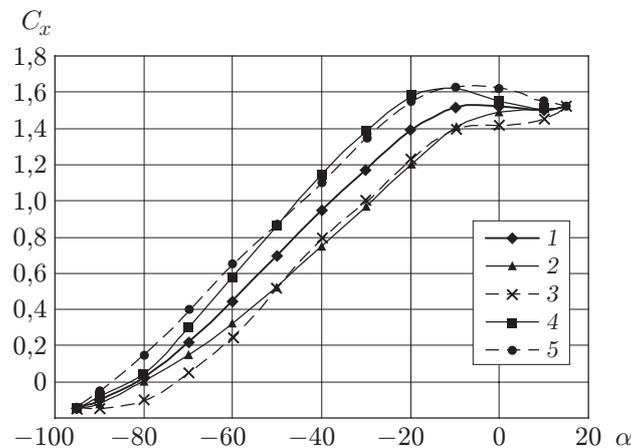


Рис. 3. Экспериментальные (1, 3, 5) и расчетно-теоретические (2, 4) гистерезисные кривые зависимости аэродинамического коэффициента продольной силы от угла атаки ($M \approx 28$):

1 — стационарный режим; 2, 3 — значение C_x на нижней ветви гистерезисной кривой; 4, 5 — значение C_x на верхней ветви гистерезисной кривой

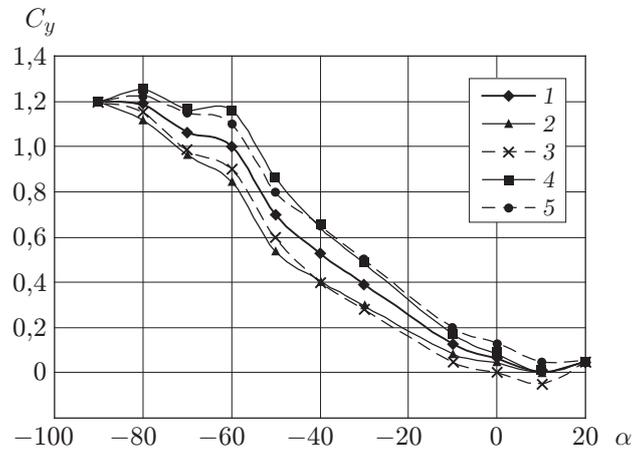


Рис. 4. Экспериментальные (1, 3, 5) и расчетно-теоретические (2, 4) гистерезисные кривые зависимости аэродинамического коэффициента подъемной силы от угла атаки ($M \approx 28$):

1 — стационарный режим; 2, 3 — значение C_y на нижней ветви гистерезисной кривой; 4, 5 — значение C_y на верхней ветви гистерезисной кривой

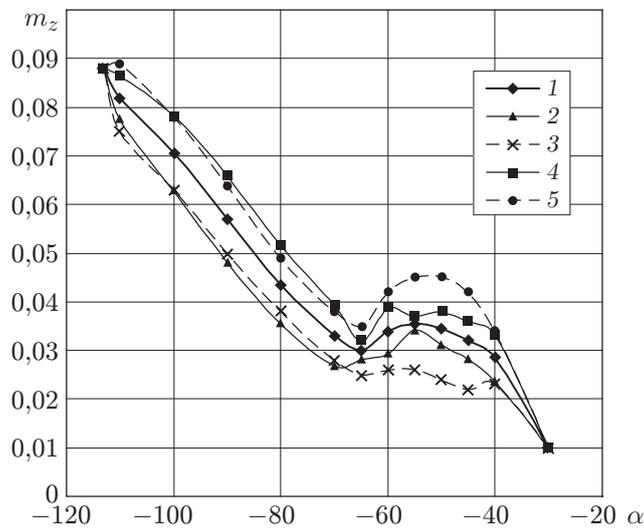


Рис. 5. Экспериментальные (1, 3, 5) и расчетно-теоретические (2, 4) гистерезисные кривые зависимости коэффициента момента тангажа m_z от угла атаки ($M \approx 28$):

1 — стационарный режим; 2, 3 — значение m_z на нижней ветви гистерезисной кривой; 4, 5 — значение m_z на верхней ветви гистерезисной кривой

расчетно-теоретические гистерезисные кривые, построенные с помощью уравнения (12). Видно, что в областях, где выполняются условия $m_{st}(\alpha) \neq 0$ и $\partial m_{st}(\alpha)/\partial \alpha \neq 0$, эти кривые удовлетворительно согласуются.

Таким образом, хорошее соответствие между полученными расчетно-теоретическими и экспериментальными зависимостями свидетельствует о том, что для СА “Союз” гистерезис, имеющий место при гиперзвуковых скоростях, является гистерезисом первого типа, т. е. можно утверждать, что его возникновение обусловлено демпфированием колебаний летательного аппарата относительно центра масс за счет дополнительных аэродинамических сил и моментов, появляющихся при его движении в неустановившемся режиме.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Петров К. П.** Аэродинамика тел простейших форм. М.: Факториал, 1998.
2. **Решетин А. Г.** Аэродинамический гистерезис при обтекании спускаемого аппарата космического корабля “Союз” гиперзвуковым вязким потоком. Результаты натурных испытаний // Космонавтика и ракетостроение. 2000. № 19. С. 150–157.
3. **Любимов А. Н.** Методы исследования течений газа и определения аэродинамических характеристик осесимметричных тел / А. Н. Любимов, Н. М. Тюмнев, Г. И. Хут. М.: Наука, 1995.
4. **Хатунцева О. Н.** Операторный подход к описанию разрывных функций. Методы моделирования диссипативных и гистерезисных явлений // Мат. моделирование. 2005. № 8. С. 111–120.
5. **Хатунцева О. Н.** Теоретическое определение размерности односвязных фрактальных объектов в задачах образования вязких “пальцев” и росте дендритов // Сиб. журн. вычисл. математики. 2009. № 2. С. 231–241.

*Поступила в редакцию 21/IV 2010 г.,
в окончательном варианте — 10/VI 2010 г.*
