УДК 534.222.2:533.6.011

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ВОЛН ДЕТОНАЦИИ В ЗАКРУЧЕННЫХ ПОТОКАХ ГАЗА

В. А. Левин, Г. А. Скопина

Институт автоматики и процессов управления ДВО РАН, 690041 Владивосток

Исследовано распространение детонационных и ударных волн в вихревых потоках газов, начальное состояние которых характеризуется значениями давления, плотности и скорости, в общем случае являющимися функциями координаты — расстояния от оси симметрии. Рассматривается вращающееся осесимметричное течение, когда кроме продольной скорости с неоднородным профилем имеется поперечная составляющая. Анализируется возможность распространения волн детонации в режиме Чепмена — Жуге во вращающихся потоках. Получено необходимое условие существования волны Чепмена — Жуге.

Ключевые слова: вихрь, ударная волна, волна детонации, осесимметричное течение, поверхность разрыва, волна Чепмена — Жуге.

Изменение завихренности в закрученных потоках на поверхности разрыва. Рассмотрим осесимметричное закрученное течение, когда кроме продольной скорости с неоднородным профилем имеется поперечная составляющая. Такое течение для идеального совершенного газа описывается следующей системой уравнений:

$$
\begin{gathered}
\frac{\partial\rho}{\partial t}+v\,\frac{\partial\rho}{\partial r}+\rho\,\frac{\partial v}{\partial r}+\frac{\rho v}{r}=0,\\
\rho\Big(\frac{\partial v}{\partial t}+v\,\frac{\partial v}{\partial r}-\frac{w^2}{r}\Big)+\frac{\partial p}{\partial r}=0,\\
\frac{\partial w}{\partial t}+v\,\frac{\partial w}{\partial r}+\frac{vw}{r}=0,\qquad \frac{\partial u}{\partial t}+v\,\frac{\partial u}{\partial r}=0,\\
\frac{\partial}{\partial t}\Big(\frac{p}{\rho^\gamma}\Big)+v\,\frac{\partial}{\partial r}\Big(\frac{p}{\rho^\gamma}\Big)=0.
\end{gathered}
\tag{1}
$$

Здесь u, v, w — соответствующие компоненты скорости в цилиндрической системе координат (x,r,φ); ρ — плотность; p — давление; t — время.

Стационарное решение системы (1) записывается в виде

$$
u=u^0(r),\qquad v^0=0,\qquad w=w^0(r),\qquad \rho=\rho^0(r),\qquad p^0=\int\frac{\rho^0w^{02}}{r}\,dr,
\tag{2}
$$

при этом вектор вихря $2\boldsymbol{\omega}=\operatorname{rot}\boldsymbol{V}$ имеет компоненты

$$
\omega_{0r}=0,\qquad \omega_{0x}=\frac{1}{2r}\,\frac{\partial rw^0}{\partial r},\qquad \omega_{0\varphi}=-\frac{1}{2}\,\frac{\partial u^0}{\partial r}.
$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 02-01-00110).

Если в начальный момент времени на оси симметрии произойдет взрыв, в результате которого образуется взрывная ударная волна, или произойдет поджигание смеси с образованием волны детонации, то в потоке будет распространяться цилиндрическая ударная или детонационная волна (ДВ).

Найдем выражение для компонент вектора вихря непосредственно за поверхностью разрыва. Для этого определим величины $\partial u/\partial r$ и $\partial w/\partial r$ непосредственно за скачком при $r = R(t)$ ($R(t)$ — закон движения поверхности разрыва). Используя уравнения (1), можно получить выражения для этих производных через значения величин за скачком уплотнения и их производных по времени:

$$\frac{\partial u}{\partial r}\Big|_s = -\frac{\dot u_1}{v_1 - \dot R}, \qquad \frac{\partial w}{\partial r}\Big|_s = -\frac{\dot w_1 + v_1 w_1/R}{v_1 - \dot R}.$$

В этих формулах точка означает дифференцирование по времени соответствующих величин на поверхности разрыва, индекс 1 относится к параметрам за скачком.

Для компонент вектора вихря за разрывом получим

$$\omega_{1\varphi} = \frac{1}{2}\,\frac{\dot u_1}{\dot v_1 - \dot R}, \qquad \omega_{1x} = \frac{1}{2}\Big(\frac{w_1}{R} - \frac{\dot w_1 + v_1 w_1/R}{v_1 - R}\Big), \qquad \omega_{1r} = 0.$$

Для компонент вектора вихря перед скачком имеем

$$\omega_{0\varphi} = -\frac{1}{2}\,\frac{\dot u^0}{\dot R}, \qquad \omega_{0x} = \frac{1}{2}\Big(\frac{w^0}{R} + \frac{\dot w^0}{\dot R}\Big).$$

На поверхности разрыва тангенциальные компоненты скорости непрерывны, т. е. $u^0 = u_1$, $w^0 = w_1$. Учитывая это обстоятельство и закон сохранения массы на скачке, получим

$$\frac{\omega_{1x}}{\omega_{0x}} = \frac{\omega_{1\varphi}}{\omega_{0\varphi}} = \frac{D}{D - v_1} = \frac{\rho_1}{\rho^0}. \tag{3}$$

Скорость распространения разрыва $\dot R = D$.

Из (3) непосредственно следует, что величины ω_x/ρ и ω_φ/ρ непрерывны при переходе через поверхность разрыва независимо от того, является разрыв ударной волной или волной детонации.

Таким образом, для описанного класса течений на поверхности разрыва выполняется закон сохранения величины $\boldsymbol{\omega}/\rho$, хотя сами величины $\boldsymbol{\omega}$ и ρ терпят разрыв. Отметим, что завихренность потока при переходе через скачок возрастает пропорционально отношению плотностей. Следовательно, при одной и той же скорости скачка завихренность за ударной волной выше, чем за ДВ.

Этот вывод справедлив и для плоского сдвигового течения.

Возможность распространения ДВ во вращающихся потоках в режиме Чепмена — Жуге. Рассмотрим распространение расходящейся волны детонации в закрученных потоках газа с начальным распределением параметров (2). Детонационная волна рассматривается как поверхность разрыва, на которой при сгорании единицы массы газа выделяется тепло Q, величина которого также зависит от координаты $Q = Q(r)$. Течение за фронтом детонации описывается уравнениями Эйлера (1).

На фронте ДВ, распространяющейся в режиме Чепмена — Жуге, выполняются следующие соотношения [1]:

$$\rho_J = \rho^0\,\frac{\gamma + 1}{\gamma + q_J}, \qquad p_J = p^0\,\frac{\gamma + q_J}{(\gamma + 1)q_J}, \qquad v_J = D_J\,\frac{1 - q_J}{\gamma + 1},$$

$$u_J = u^0, \qquad w_J = w^0, \qquad D_J^2 = \frac{a^{02}}{q_J}, \qquad a^{02} = \gamma\,\frac{p^0}{\rho^0}, \qquad a_J^2 = \frac{\gamma p_J}{\rho_J}, \tag{4}$$

$$q_J^2 - 2q_J[1 + (\gamma^2 - 1)Q/a^{02}] + 1 = 0.$$

Здесь индексом J обозначены параметры газа и скорость волны в режиме Чепмена — Жуге. Система уравнений газовой динамики, будучи гиперболической, имеет три семейства характеристик, на которых выполняются соответствующие характеристические соотношения [1]. Если при этом на некоторой достаточно гладкой линии $r_0(t)$ значения функций удовлетворяют одному из характеристических соотношений, но не удовлетворяют другому соотношению на характеристике, то эта линия является огибающей соответствующего семейства характеристик системы уравнений (1) и решение в ее окрестности следует искать в виде

$$p(r,t) = p_0(t) + p_1(t)\sqrt{r_0(t) - r} + p_2(t)(r_0(t) - r) + p_3(t)(r_0(t) - r)^{3/2} + \ldots \tag{5}$$

(аналогично для всех остальных искомых параметров) [1].

Этот подход использовался для определения условий существования плоских детонационных волн Чепмена — Жуге во внешних электрических и магнитных полях [2], а также для анализа распространения ДВ в неоднородных средах [3]. Для произвольных систем квазилинейных уравнений в частных производных первого порядка исследованы условия существования и определен вид асимптотического разложения решения в окрестности огибающей характеристических поверхностей, на которой заданы начальные значения функций [4]. Сходимость соответствующих рядов доказана в [5].

Если подставить разложения (5) в систему уравнений (1), то получим бесконечную систему алгебраических уравнений относительно коэффициентов разложения. Часть ее для коэффициентов с индексами 0, 1 и 2 имеет вид

$$\begin{gathered} \rho_1(D - v_0) - \rho_0 v_1 = 0, \qquad p_1 - \rho_0(D - v_0)v_1 = 0, \qquad \rho_0 p_1 - \gamma p_0 \rho_1 = 0, \\ u_1(D - v_0) = 0, \qquad w_1(D - v_0) = 0; \end{gathered} \tag{6}$$

$$\begin{gathered} \rho_2(D - v_0) - \rho_0 v_2 = \rho_1 v_1 - \dot\rho_0 - \rho_0 v_0/r_0, \\ \rho_0 v_2(D - v_0) - p_2 = \rho_0 w_0^2/r_0 - \rho_0 \dot v_0, \\ (D - v_0)(\rho_0 p_2 - \gamma p_0 \rho_2) = \gamma p_0 \dot\rho_0 - \rho_0 \dot p_0 + (\gamma - 1)\rho_0 p_1 v_1/2, \\ u_2(D - v_0) = -\dot u_0, \qquad w_2(D - v_0) = -\dot w_0 - v_0 w_0/r_0. \end{gathered} \tag{7}$$

Здесь дифференцирование по t обозначено точкой, а $D = \dot r_0$. Так как ДВ распространяется в режиме Чепмена — Жуге, то $D - v_0 = a_0$, т. е. выполняется характеристическое соотношение [1]. Отсюда следует, что определители систем (6) и (7), а также систем всех последующих приближений для нахождения коэффициентов разложения v_k, ρ_k, p_k равны нулю.

Коэффициенты разложения u_k и w_k находятся сразу по известным значениям предыдущих коэффициентов, причем $u_1 = w_1 = 0$. Поэтому разложение в ряд для скоростей u и w имеет вид $u = u_0 + u_2(\dot r_0 - r) + u_3(\dot r_0 - r)^{3/2} + \ldots$.

Для совместности линейной системы уравнений (7) и всех последующих необходимо равенство нулю расширенного определителя системы. Из этого условия следует соотношение

$$\frac{\gamma - 1}{2}\rho_0 p_1 v_1 - \rho_0 \dot p_0 + \gamma p_0 \rho_1 v_1 + \rho_0^2(D - v_0)\Big(\frac{w_0^2}{r_0} - \dot v_0\Big) - \frac{\gamma p_0 \rho_0 v_0}{r_0} = 0,$$

из которого с учетом (6) находим

$$\rho_1^2 = \frac{2\rho_0^3}{\gamma(\gamma + 1)p_0}\Big[\dot v_0 - \frac{w_0^2}{r_0} + (D - v_0)\Big(\frac{v_0}{r_0} + \frac{\dot p_0}{\gamma p_0}\Big)\Big].$$

Аналогичные выражения можно получить для следующих коэффициентов разложения v_k, p_k, ρ_k. С учетом соответствующих условий совместности это позволяет полностью построить ряды указанного вида и тем самым определить решение уравнений (1) в некоторой окрестности линии $r = r_0(t)$, в данном случае в окрестности ДВ, распространяющейся в режиме Чепмена — Жуге.

Для существования искомого решения необходимо потребовать выполнения условия

$$\dot{v}_0 - \frac{w_0^2}{r_0} + a_0\Big(\frac{v_0}{r_0} + \frac{\dot{p}_0}{\gamma p_0}\Big) \geqslant 0, \qquad (8)$$

причем знак равенства определяет выполнение соответствующего соотношения вдоль характеристики.

Неравенство (8) вместе с выражениями для параметров за волной детонации Чепмена — Жуге (4) определяет необходимое условие существования волны Чепмена — Жуге ($p_0 = p_J$, $v_0 = v_J$, $a_0 = a_J$, $\rho_0 = \rho_J$, $D = D_J$), распространяющейся по среде с распределением параметров в закрученном потоке (2) с переменным законом тепловыделения $Q = Q(r)$. Таким образом, необходимое условие существования волны Чепмена — Жуге имеет вид

$$\dot{v}_J - \frac{w_0^2}{r_J} + a_J\Big(\frac{v_J}{r_J} + \frac{\dot{p}_J}{\gamma p_J}\Big) \geqslant 0.$$

Рассмотрим случай, когда $Q = \text{const}$ и $q_J \ll 1$. Тогда $D_J^2 = 2(\gamma^2 - 1)Q$, $v_J = D_J/(\gamma+1)$, $p_J = \rho^0 D_J^2/(\gamma+1)$, $\rho_J = (\gamma+1)\rho^0/\gamma$, $a_J = \gamma D_J/(\gamma+1)$.

В этом случае необходимое условие существования волны Чепмена — Жуге имеет вид

$$\frac{1}{\gamma+1}\,\frac{\partial \ln \rho^0}{\partial \ln r} + \frac{\gamma}{(\gamma+1)^2} - \frac{w_0^2}{D_J^2} \geqslant 0.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. **Левин В. А., Черный Г. Г.** Асимптотические законы поведения детонационных волн // Прикл. математика и механика. 1967. Т. 31, № 3. С. 393–405.
2. **Левин В. А.** Распространение детонационных волн в электрическом и магнитном полях // Отчет Ин-та механики МГУ. 1969. № 972.
3. **Афанасьев А. А., Левин В. А.** О возможности распространения волн детонации в режиме Чепмена — Жуге в неоднородных средах // Физика горения и взрыва. 1993. № 2. С. 98–109.
4. **Левин В. А., Свалов А. М.** Об особенностях распространения детонационных волн // Тр. Ин-та механики МГУ. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1978. № 44. С. 194–203.
5. **Куликовский В. А.** Задача Коши для квазилинейной системы при наличии характеристических точек на начальной поверхности // Прикл. математика и механика. 1985. Т. 49, № 2. С. 258–264.

Поступила в редакцию 15/VII 2003 г.,
в окончательном варианте — 27/X 2003 г.