

УДК 539.3

УРАВНЕНИЯ ДЕФОРМИРОВАНИЯ УПРУГОГО НЕОДНОРОДНОГО СЛОИСТОГО ТЕЛА ВРАЩЕНИЯ

А. Е. Алексеев, Б. Д. Аннин

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 630090 Новосибирск

Даны уравнения деформирования упругого неоднородного слоистого тела вращения. Каждый слой представляет собой область, ограниченную выпуклыми эквидистантными (равноудаленными) поверхностями вращения.

Ключевые слова: слоистый, упругий, тело вращения, полиномы Лежандра, эквидистантный.

Введение. Различные способы построения теории упругого деформирования многослойных конструкций изложены в [1–4].

В настоящей работе для построения уравнений, описывающих упругое деформирование слоистого тела вращения, используются результаты [5–7], полученные на основе нескольких аппроксимаций каждой из неизвестных функций в виде отрезков рядов по полиномам Лежандра, что позволило корректно сформулировать условия сопряжения напряжений и перемещений на межслойных поверхностях. С использованием этой методики получены решения ряда задач упругого деформирования слоистых конструкций [7–9].

1. Определение криволинейной системы координат. Пусть S — достаточно гладкая замкнутая выпуклая поверхность, причем начало координат O системы (x, y, z) лежит внутри S на оси z (рис. 1). Поверхность S образована вращением выпуклой кривой L , расположенной в плоскости zr , где $r = (x^2 + y^2)^{1/2}$, причем L пересекает ось z под прямым углом, радиус кривизны во всех точках L не меньше ρ_* (рис. 2).

Уравнение кривой L можно представить в виде

$$r = \hat{r}(\gamma) = \frac{dF(\gamma)}{d\gamma} \cos \gamma + F(\gamma) \sin \gamma, \quad z = \hat{z}(\gamma) = \frac{dF(\gamma)}{d\gamma} \sin \gamma - F(\gamma) \cos \gamma.$$

Здесь γ — угол между касательной и осью r ; $F(\gamma)$ — опорная функция контура L (расстояние от точки O до касательной). Очевидно, $\hat{r}(\gamma) \geq 0$ для $0 \leq \gamma \leq \pi$. Радиус кривизны кривой L равен

$$\rho = \rho(\gamma) = F(\gamma) + \frac{d^2F(\gamma)}{d\gamma^2} \geq \rho_* > 0.$$

Уравнения поверхности S можно записать в виде

$$x = x_S(\beta, \gamma) = \left(\frac{dF(\gamma)}{d\gamma} \cos \gamma + F(\gamma) \sin \gamma \right) \cos \beta,$$

$$y = y_S(\beta, \gamma) = \left(\frac{dF(\gamma)}{d\gamma} \cos \gamma + F(\gamma) \sin \gamma \right) \sin \beta,$$

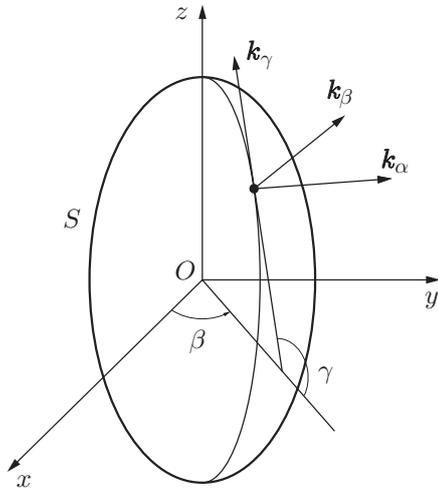


Рис. 1

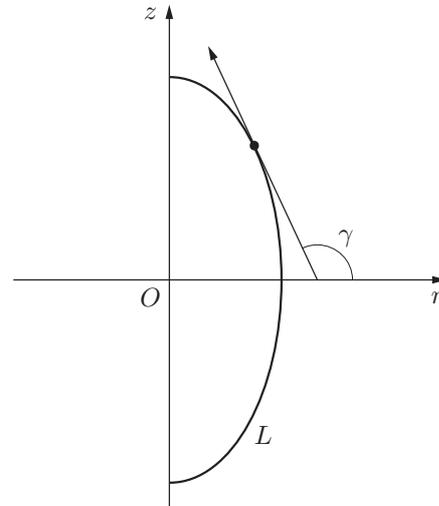


Рис. 2

$$z = z_S(\beta, \gamma) = \frac{dF(\gamma)}{d\gamma} \sin \gamma - F(\gamma) \cos \gamma.$$

Рассмотрим ортогональную криволинейную систему координат (α, β, γ) :

$$\begin{aligned} x &= x(\alpha, \beta, \gamma) = \left(\frac{dF(\gamma)}{d\gamma} \cos \gamma + (F(\gamma) + \alpha) \sin \gamma \right) \cos \beta, \\ y &= y(\alpha, \beta, \gamma) = \left(\frac{dF(\gamma)}{d\gamma} \cos \gamma + (F(\gamma) + \alpha) \sin \gamma \right) \sin \beta, \\ z &= z(\alpha, \beta, \gamma) = \frac{dF(\gamma)}{d\gamma} \sin \gamma - (F(\gamma) + \alpha) \cos \gamma, \\ \alpha &\geq 0, \quad 0 \leq \gamma \leq \pi, \quad 0 \leq \beta < 2\pi. \end{aligned} \quad (1.1)$$

Якобиан преобразования координат $J(\alpha, \beta, \gamma)$ не меняет знак:

$$J(\alpha, \beta, \gamma) = D(x, y, z)/D(\alpha, \beta, \gamma) = (\rho(\gamma) + \alpha)(\hat{r}(\gamma) + \alpha \sin \gamma) \geq 0.$$

Из (1.1) следует, что поверхность $\alpha = \text{const}$ представляет собой эквидистантную (равноудаленную) поверхность от поверхности S . Единичные векторы координатных линий (см. рис. 1) имеют вид

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_\alpha &= (\sin \gamma \cos \beta, \sin \gamma \sin \beta, -\cos \gamma), & \mathbf{k}_\beta &= (-\sin \beta, \cos \beta, 0), \\ \mathbf{k}_\gamma &= (\cos \gamma \cos \beta, \cos \gamma \sin \beta, -\sin \gamma). \end{aligned}$$

2. Уравнения линейной теории упругости в криволинейной системе координат (α, β, γ) . Рассмотрим постановку задачи линейной теории упругости в ортогональной системе координат (α, β, γ) . Напряжения $\sigma_{\alpha\alpha}, \sigma_{\alpha\beta}, \sigma_{\alpha\gamma}, \sigma_{\beta\beta}, \sigma_{\beta\gamma}, \sigma_{\gamma\gamma}$ удовлетворяют уравнениям равновесия

$$\frac{\partial \hat{\mathbf{t}}_\alpha}{\partial \alpha} + \frac{\partial \hat{\mathbf{t}}_\beta}{\partial \beta} + \frac{\partial \hat{\mathbf{t}}_\gamma}{\partial \gamma} = 0.$$

Здесь

$$\hat{\mathbf{t}}_\alpha = H_\gamma H_\beta (\sigma_{\alpha\alpha} \mathbf{k}_\alpha + \sigma_{\alpha\beta} \mathbf{k}_\beta + \sigma_{\alpha\gamma} \mathbf{k}_\gamma),$$

$$\hat{\mathbf{t}}_\beta = H_\alpha H_\gamma (\sigma_{\alpha\beta} \mathbf{k}_\alpha + \sigma_{\beta\beta} \mathbf{k}_\beta + \sigma_{\beta\gamma} \mathbf{k}_\gamma), \quad \hat{\mathbf{t}}_\gamma = H_\alpha H_\beta (\sigma_{\alpha\gamma} \mathbf{k}_\alpha + \sigma_{\beta\gamma} \mathbf{k}_\beta + \sigma_{\gamma\gamma} \mathbf{k}_\gamma),$$

$$H_\alpha = 1, \quad H_\beta = \hat{r}(\gamma) + \alpha - \sin \gamma, \quad H_\gamma = \rho(\gamma) + \alpha.$$

Тензор деформаций определяется через вектор перемещений \mathbf{U} в виде

$$e_{\alpha\alpha} = \frac{\mathbf{k}_\alpha}{H_\alpha} \cdot \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \alpha}, \quad e_{\beta\beta} = \frac{\mathbf{k}_\beta}{H_\beta} \cdot \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \beta}, \quad e_{\gamma\gamma} = \frac{\mathbf{k}_\gamma}{H_\gamma} \cdot \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \gamma},$$

$$2e_{\alpha\beta} = \frac{\mathbf{k}_\alpha}{H_\beta} \cdot \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \beta} + \frac{\mathbf{k}_\beta}{H_\alpha} \cdot \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \alpha}, \quad 2e_{\alpha\gamma} = \frac{\mathbf{k}_\alpha}{H_\gamma} \cdot \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \gamma} + \frac{\mathbf{k}_\gamma}{H_\alpha} \cdot \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \alpha},$$

$$2e_{\beta\gamma} = \frac{\mathbf{k}_\beta}{H_\gamma} \cdot \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \gamma} + \frac{\mathbf{k}_\gamma}{H_\beta} \cdot \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \beta}.$$
(2.1)

Напряжения и деформации связаны законом Гука

$$\sigma_{\alpha\alpha} = 2\mu e_{\alpha\alpha} + \lambda e, \quad \sigma_{\beta\beta} = 2\mu e_{\beta\beta} + \lambda e, \quad \sigma_{\gamma\gamma} = 2\mu e_{\gamma\gamma} + \lambda e,$$

$$\sigma_{\alpha\beta} = 2\mu e_{\alpha\beta}, \quad \sigma_{\alpha\gamma} = 2\mu e_{\alpha\gamma}, \quad \sigma_{\beta\gamma} = 2\mu e_{\beta\gamma},$$

$$e = e_{\alpha\alpha} + e_{\beta\beta} + e_{\gamma\gamma},$$
(2.2)

где λ, μ — модули упругости.

3. Уравнения упругого деформирования оболочки вращения овального профиля. Рассмотрим оболочку вращения толщины $2h$, занимающую объем V и ограниченную координатными поверхностями α_1, α_2 ; $0 < \alpha_1 < \alpha_2 = \alpha_1 + 2h$. В направлении α введем координату $\xi \in [-1, 1]$, $\alpha = \alpha_0 + h\xi$, $\alpha_0 = (\alpha_1 + \alpha_2)/2$.

Неизвестные функции \mathbf{U} , $\hat{\mathbf{t}}_\alpha$, $\hat{\mathbf{t}}_\beta$, $\hat{\mathbf{t}}_\gamma$ можно представить в виде рядов по полиномам Лежандра:

$$\mathbf{U} = \sum_{k=0}^{\infty} [\mathbf{U}]^k p_k(\xi), \quad \hat{\mathbf{t}}_i = \sum_{k=0}^{\infty} [\hat{\mathbf{t}}_i]^k p_k(\xi).$$
(3.1)

Здесь $p_k(\xi)$ — ортогональные полиномы Лежандра; $[\mathbf{U}]^k$, $[\hat{\mathbf{t}}_i]^k$ — коэффициенты разложений, зависящие от координат β, γ :

$$[\mathbf{U}]^k = \frac{1+2k}{2} \int_{-1}^1 \mathbf{U} p_k d\xi, \quad [\hat{\mathbf{t}}_i]^k = \frac{1+2k}{2} \int_{-1}^1 \hat{\mathbf{t}}_i p_k d\xi.$$

Поверхность $\xi = 0$ является срединной поверхностью оболочки. В ортогональной системе координат (α, β, γ) имеют место равенства

$$H_\beta = A_\beta (1 + \xi h/R_\beta), \quad H_\gamma = A_\gamma (1 + \xi h/R_\gamma),$$

$$R_\beta = \frac{A_\beta}{\sin \gamma} = \frac{dF}{d\gamma} \operatorname{ctg} \gamma + F(\gamma) + \alpha_0, \quad R_\gamma = A_\gamma = \frac{d^2 F}{d\gamma^2} + F(\gamma) + \alpha_0,$$

где A_β, A_γ — коэффициенты Ламе срединной поверхности; R_β, R_γ — главные радиусы кривизны срединной поверхности.

В соответствии с [5–7] напряжения аппроксимируются отрезками рядов (3.1)

$$\hat{\mathbf{t}}_\beta \simeq A_\gamma (\mathbf{N}_\beta p_0/(2h) + 3\mathbf{M}_\beta p_1/(2h^2)), \quad \hat{\mathbf{t}}_\gamma \simeq A_\beta (\mathbf{N}_\gamma p_0/(2h) + 3\mathbf{M}_\gamma p_1/(2h^2)),$$

$$\hat{\mathbf{t}}_\alpha \simeq A_\beta A_\gamma [\mathbf{P}_0 p_0 + \Delta \mathbf{P} p_1 + (p_2 - p_0)(\mathbf{k}_\alpha \times (\mathbf{P}_0 \times \mathbf{k}_\alpha) - \mathbf{Q}/(2h))],$$

$$\Delta \mathbf{P} = (\mathbf{P}^+ - \mathbf{P}^-)/2, \quad \mathbf{P}_0 = (\mathbf{P}^+ + \mathbf{P}^-)/2.$$

Здесь

$$\begin{aligned}
 \mathbf{N}_\beta &= h \int_{-1}^1 \left(\sigma_{\alpha\beta} \mathbf{k}_\alpha + \sigma_{\beta\beta} \mathbf{k}_\beta + \left(1 + \frac{h\xi}{R_\gamma} \right) \sigma_{\beta\gamma} \mathbf{k}_\gamma \right) d\xi, \\
 \mathbf{N}_\gamma &= h \int_{-1}^1 \left(\sigma_{\alpha\gamma} \mathbf{k}_\alpha + \left(1 + \frac{h\xi}{R_\beta} \right) \sigma_{\beta\gamma} \mathbf{k}_\beta + \sigma_{\gamma\gamma} \mathbf{k}_\gamma \right) d\xi, \\
 \mathbf{M}_\beta &= h^2 \int_{-1}^1 \xi (\sigma_{\beta\beta} \mathbf{k}_\beta + \sigma_{\beta\gamma} \mathbf{k}_\gamma) d\xi, \quad \mathbf{M}_\gamma = h^2 \int_{-1}^1 \xi (\sigma_{\beta\gamma} \mathbf{k}_\beta + \sigma_{\gamma\gamma} \mathbf{k}_\gamma) d\xi, \\
 \mathbf{Q} &= h \int_{-1}^1 (\sigma_{\alpha\beta} \mathbf{k}_\beta + \sigma_{\alpha\gamma} \mathbf{k}_\gamma) d\xi, \quad \mathbf{P}^\pm = (\sigma_{\alpha\alpha} \mathbf{k}_\alpha + \sigma_{\alpha\beta} \mathbf{k}_\beta + \sigma_{\alpha\gamma} \mathbf{k}_\gamma) \Big|_{\xi=\pm 1}.
 \end{aligned} \tag{3.2}$$

Перемещения $\mathbf{U} = U_\alpha \mathbf{k}_\alpha + U_\beta \mathbf{k}_\beta + U_\gamma \mathbf{k}_\gamma$ аппроксимируются отрезками рядов (3.1)

$$\begin{aligned}
 \mathbf{k}_\alpha \times (\mathbf{U} \times \mathbf{k}_\alpha) &= \mathbf{v} p_0 + \boldsymbol{\psi} p_1 + (\mathbf{v}_0 - \mathbf{v}) p_2 + (\Delta \mathbf{v} - \boldsymbol{\psi}) p_3, \\
 \mathbf{U} \cdot \mathbf{k}_\alpha &= W p_0 + \Delta W p_1 + (W_0 - W) p_2, \\
 \Delta \mathbf{v} &= (\mathbf{v}^+ - \mathbf{v}^-)/2, \quad \mathbf{v}_0 = (\mathbf{v}^+ + \mathbf{v}^-)/2, \\
 \Delta W &= (W^+ - W^-)/2, \quad W_0 = (W^+ + W^-)/2.
 \end{aligned} \tag{3.3}$$

Здесь

$$\begin{aligned}
 \mathbf{v} &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 (\mathbf{k}_\beta U_\beta + \mathbf{k}_\gamma U_\gamma) d\xi, \quad \boldsymbol{\psi} = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 (\mathbf{k}_\beta U_\beta + \mathbf{k}_\gamma U_\gamma) \xi d\xi, \\
 W &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \mathbf{k}_\alpha \cdot \mathbf{U} d\xi, \quad W^\pm = \mathbf{k}_\alpha \cdot \mathbf{U} \Big|_{\xi=\pm 1}, \quad \mathbf{v}^\pm = (\mathbf{k}_\beta U_\beta + \mathbf{k}_\gamma U_\gamma) \Big|_{\xi=\pm 1}.
 \end{aligned}$$

Деформации (2.1) аппроксимируются отрезками рядов

$$\begin{aligned}
 e_{\alpha\alpha} &= \varepsilon_{\alpha\alpha} p_0 + \chi_{\alpha\alpha} p_1, \quad e_{\beta\beta} = \varepsilon_{\beta\beta} p_0 + \chi_{\beta\beta} p_1, \\
 e_{\gamma\gamma} &= \varepsilon_{\gamma\gamma} p_0 + \chi_{\gamma\gamma} p_1, \quad e_{\beta\gamma} = \varepsilon_{\beta\gamma} p_0 + \chi_{\beta\gamma} p_1, \\
 e_{\alpha\beta} &= \varepsilon_{\alpha\beta} p_0 + \chi_{\alpha\beta} p_1 + \omega_{\alpha\beta} p_2, \quad e_{\alpha\gamma} = \varepsilon_{\alpha\gamma} p_0 + \chi_{\alpha\gamma} p_1 + \omega_{\alpha\gamma} p_2.
 \end{aligned} \tag{3.4}$$

Здесь

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{\alpha\alpha} &= \Delta W/h, \quad \chi_{\alpha\alpha} = 3(W_0 - W)/h, \\
 \varepsilon_{\beta\beta} &= \frac{\mathbf{k}_\beta}{A_\beta} \cdot \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \beta} + \frac{1}{R_\beta} W, \quad \chi_{\beta\beta} = \frac{\mathbf{k}_\beta}{A_\beta} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\psi}}{\partial \beta}, \\
 \varepsilon_{\gamma\gamma} &= \frac{\mathbf{k}_\gamma}{A_\gamma} \cdot \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \gamma} + \frac{1}{R_\gamma} W, \quad \chi_{\gamma\gamma} = \frac{\mathbf{k}_\gamma}{A_\gamma} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\psi}}{\partial \gamma}, \\
 2\varepsilon_{\beta\gamma} &= \frac{\mathbf{k}_\gamma}{A_\beta} \cdot \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \beta} + \frac{\mathbf{k}_\beta}{A_\gamma} \cdot \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \gamma},
 \end{aligned} \tag{3.5}$$

$$\begin{aligned}
 2\chi_{\beta\gamma} &= \frac{1}{R_\gamma} \frac{\mathbf{k}_\gamma}{A_\beta} \cdot \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \beta} + \frac{1}{R_\beta} \frac{\mathbf{k}_\beta}{A_\gamma} \cdot \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \gamma} + \frac{\mathbf{k}_\gamma}{A_\beta} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\psi}}{\partial \beta} + \frac{\mathbf{k}_\beta}{A_\gamma} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\psi}}{\partial \gamma}, \\
 2\varepsilon_{\alpha\beta} &= \frac{\mathbf{k}_\alpha}{A_\beta} \cdot \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \beta} + \frac{1}{A_\beta} \frac{\partial W}{\partial \beta} + \frac{1}{h} \mathbf{k}_\beta \cdot \Delta \mathbf{v}, \\
 2\chi_{\alpha\beta} &= 3\mathbf{k}_\beta \cdot (\mathbf{v}_0 - \mathbf{v})/h, \quad 2\omega_{\alpha\beta} = 5\mathbf{k}_\beta \cdot (\Delta \mathbf{v} - \boldsymbol{\psi})/h, \\
 2\varepsilon_{\alpha\gamma} &= \frac{\mathbf{k}_\alpha}{A_\gamma} \cdot \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \gamma} + \frac{1}{A_\gamma} \frac{\partial W}{\partial \gamma} + \frac{1}{h} \mathbf{k}_\gamma \cdot \Delta \mathbf{v}, \\
 2\chi_{\alpha\gamma} &= 3\mathbf{k}_\gamma \cdot (\mathbf{v}_0 - \mathbf{v})/h, \quad 2\omega_{\alpha\gamma} = 5\mathbf{k}_\gamma \cdot (\Delta \mathbf{v} - \boldsymbol{\psi})/h.
 \end{aligned}$$

Найдем связь усилий \mathbf{N}_β , \mathbf{N}_γ и моментов \mathbf{M}_β , \mathbf{M}_γ с деформациями и кривизнами. Аппроксимации деформаций (3.4), (3.5) подставим в (2.2), а полученные выражения для напряжений — в формулы (3.2). После интегрирования с учетом ортогональности полиномов Лежандра и ряда преобразований получим

$$\begin{aligned}
 \mathbf{N}_\beta &= 2h \left[\frac{5}{6} \left(2\mu\varepsilon'_{\alpha\beta} + \frac{1}{5} (\mathbf{P}_0 \cdot \mathbf{k}_\beta) \right) \mathbf{k}_\alpha + \right. \\
 &\quad \left. + \left(\frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_{\beta\beta} + \nu\varepsilon_{\gamma\gamma}) + \frac{\nu}{1-\nu} (\mathbf{P}_0 \cdot \mathbf{k}_\alpha) \right) \mathbf{k}_\beta + 2\mu \left(\varepsilon_{\beta\gamma} + \frac{h}{3R_\gamma} \chi_{\beta\gamma} \right) \mathbf{k}_\gamma \right], \\
 \mathbf{N}_\gamma &= 2h \left[\frac{5}{6} \left(2\mu\varepsilon'_{\alpha\gamma} + \frac{1}{5} (\mathbf{P}_0 \cdot \mathbf{k}_\gamma) \right) \mathbf{k}_\alpha + \right. \\
 &\quad \left. + \left(\frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_{\gamma\gamma} + \nu\varepsilon_{\beta\beta}) + \frac{\nu}{1-\nu} (\mathbf{P}_0 \cdot \mathbf{k}_\alpha) \right) \mathbf{k}_\gamma + 2\mu \left(\varepsilon_{\beta\gamma} + \frac{h}{3R_\beta} \chi_{\beta\gamma} \right) \mathbf{k}_\beta \right], \quad (3.6) \\
 \mathbf{M}_\beta &= \frac{2h^2}{3} \left[\left(\frac{E}{1-\nu^2} (\chi_{\beta\beta} + \nu\chi_{\gamma\gamma}) + \frac{\nu}{1-\nu} (\Delta \mathbf{P} \cdot \mathbf{k}_\alpha) \right) \mathbf{k}_\beta + 2\mu \chi_{\beta\gamma} \mathbf{k}_\gamma \right], \\
 \mathbf{M}_\gamma &= \frac{2h^2}{3} \left[\left(\frac{E}{1-\nu^2} (\chi_{\beta\beta} + \nu\chi_{\gamma\gamma}) + \frac{\nu}{1-\nu} (\Delta \mathbf{P} \cdot \mathbf{k}_\alpha) \right) \mathbf{k}_\gamma + 2\mu \chi_{\beta\gamma} \mathbf{k}_\beta \right],
 \end{aligned}$$

где E — модуль Юнга; ν — коэффициент Пуассона;

$$2\varepsilon'_{\alpha\beta} = \frac{\mathbf{k}_\alpha}{A_\beta} \cdot \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \beta} + \frac{1}{A_\beta} \frac{\partial W}{\partial \beta} + \frac{\mathbf{k}_\beta \cdot \boldsymbol{\psi}}{h}; \quad 2\varepsilon'_{\alpha\gamma} = \frac{\mathbf{k}_\alpha}{A_\gamma} \cdot \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \gamma} + \frac{1}{A_\gamma} \frac{\partial W}{\partial \gamma} + \frac{\mathbf{k}_\gamma \cdot \boldsymbol{\psi}}{h}.$$

Найдем зависимость между внешними поверхностными силами \mathbf{P}^\pm и перемещениями. Аппроксимации деформаций (3.4), (3.5) подставим в (2.2), а полученные выражения для напряжений — в формулы (3.2). Учитывая свойства полиномов Лежандра при $\xi = \pm 1$, получим

$$\begin{aligned}
 \Delta \mathbf{q} &= 3\mu(\mathbf{v}_0 - \mathbf{v})/h, \quad \mathbf{q}_0 = 5\mu(\Delta \mathbf{v} - \boldsymbol{\psi})/h, \\
 g_0 &= E\Delta W/h + \nu N/(2h), \quad \Delta g = 3E(W_0 - W)/h + 3\nu M/(2h^2).
 \end{aligned} \quad (3.7)$$

Здесь

$$\begin{aligned}
 \Delta \mathbf{q} &= (\mathbf{q}^+ - \mathbf{q}^-)/2, \quad \mathbf{q}_0 = (\mathbf{q}^+ + \mathbf{q}^-)/2, \\
 \Delta g &= (g^+ - g^-)/2, \quad g_0 = (g^+ + g^-)/2, \\
 N &= \mathbf{N}_\beta \cdot \mathbf{k}_\beta + \mathbf{N}_\gamma \cdot \mathbf{k}_\gamma, \quad M = \mathbf{M}_\beta \cdot \mathbf{k}_\beta + \mathbf{M}_\gamma \cdot \mathbf{k}_\gamma, \\
 \mathbf{q}^\pm &= (\sigma_{\alpha\beta} \mathbf{k}_\beta + \sigma_{\alpha\gamma} \mathbf{k}_\gamma) \Big|_{\xi=\pm 1}, \quad g^\pm = \sigma_{\alpha\alpha} \Big|_{\xi=\pm 1}.
 \end{aligned}$$

Уравнения равновесия имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \beta} (A_\gamma \mathbf{N}_\beta) + \frac{\partial}{\partial \gamma} (A_\beta \mathbf{N}_\gamma) + 2A_\beta A_\gamma \Delta \mathbf{P} = 0, \\ \frac{\partial}{\partial \beta} (A_\gamma \mathbf{k}_\alpha \times \mathbf{M}_\beta) + \frac{\partial}{\partial \gamma} (A_\beta \mathbf{k}_\alpha \times \mathbf{M}_\gamma) + \\ + A_\beta A_\gamma (\mathbf{k}_\beta \times \mathbf{N}_\beta + \mathbf{k}_\gamma \times \mathbf{N}_\gamma) + A_\beta A_\gamma 2h(\mathbf{k}_\alpha \times \mathbf{P}_0) = 0. \end{aligned} \quad (3.8)$$

4. Уравнения слоистого тела, составленного из параллельных слоев. Рассмотрим поверхность S_0 , образованную вращением выпуклой кривой L_0 с опорной функцией $F_0(\gamma)$. Кривые L_i ($i = \overline{1, n}$) с опорными функциями $F_i(\gamma) = F_{i-1}(\gamma) + 2h_i$ образуют семейство эквидистантных поверхностей S_i , причем расстояние между соседними поверхностями S_i, S_{i-1} равно $2h_i$.

Пусть B — слоистое тело, составленное из монослоев B_i ($i = \overline{1, n}$), ограниченных поверхностями S_{i-1}, S_i . Обозначим верхним индексом i величины, относящиеся к слою B_i . Тогда из алгебраических уравнений (3.7) можно получить выражения для $(\mathbf{U}^+)^i, (\mathbf{P}^+)^i$:

$$\begin{aligned} (g^+)^i &= 3E^i(W^i - (W^-)^i)/h^i - 2(g^-)^i + 3\nu^i(N^i - M^i/h^i)/(2h^i), \\ (\mathbf{q}^+)^i &= 15\mu^i((\mathbf{v}^-)^i + \boldsymbol{\psi}^i - \mathbf{v}^i)/h^i + 4(\mathbf{q}^-)^i - 3\mathbf{Q}^i/(2h^i), \\ (W^+)^i &= -2(W^-)^i + 3W^i - h^i(g^-)^i/E^i + \nu^i(N^i - 3M^i/h^i)/(2E^i), \\ (\mathbf{v}^+)^i &= 4(\mathbf{v}^-)^i + 5\boldsymbol{\psi}^i - 3\mathbf{v}^i + h^i(\mathbf{q}^-)^i/\mu^i - \mathbf{Q}^i/(2\mu^i). \end{aligned} \quad (4.1)$$

На поверхностях межслойного контакта S_i ($i = \overline{1, n-1}$) должны быть выполнены условия непрерывности напряжений

$$(\mathbf{q}^+)^i = (\mathbf{q}^-)^{i+1}, \quad (g^+)^i = (g^-)^{i+1} \quad (4.2)$$

и перемещений

$$(\mathbf{v}^+)^i = (\mathbf{v}^-)^{i+1}, \quad (W^+)^i = (W^-)^{i+1}. \quad (4.3)$$

В дальнейшем ограничимся случаем, когда на лицевых поверхностях S_0, S_n слоистого тела B заданы напряжения

$$(\mathbf{q}^-)^1 = \mathbf{Q}_0, \quad (\mathbf{q}^+)^n = \mathbf{Q}_n, \quad (g^-)^1 = G_0, \quad (g^+)^n = G_n. \quad (4.4)$$

Уравнения (4.1)–(4.4) представляют собой систему линейных алгебраических уравнений относительно перемещений и напряжений на поверхностях межслойного контакта S_i ($i = \overline{1, n-1}$) и перемещений на лицевых поверхностях S_0, S_n . Решая эту систему, получим

$$\begin{aligned} (g^+)^i &= A_1^i G_n + A_2^i G_0 + \sum_{k=1}^i (a_{1k}^i W^k + a_{2k}^i N^k + a_{3k}^i M^k), \\ (W^+)^i &= B_1^i G_n + B_2^i G_0 + \sum_{k=1}^i (b_{1k}^i W^k + b_{2k}^i N^k + b_{3k}^i M^k), \\ (\mathbf{q}^+)^i &= C_1^i \mathbf{Q}_n + C_2^i \mathbf{Q}_0 + \sum_{k=1}^i (c_{1k}^i \mathbf{v}^k + c_{2k}^i \boldsymbol{\psi}^k + c_{3k}^i \mathbf{Q}^k), \\ (\mathbf{v}^+)^i &= D_1^i \mathbf{Q}_n + D_2^i \mathbf{Q}_0 + \sum_{k=1}^i (d_{1k}^i \mathbf{v}^k + d_{2k}^i \boldsymbol{\psi}^k + d_{3k}^i \mathbf{Q}^k), \end{aligned} \quad (4.5)$$

$$\begin{aligned}
W_n &= (W^+)^n = B_1^n G_n + B_2^n G_0 + \sum_{k=1}^n (b_{1k}^n W^k + b_{2k}^n N^k + b_{3k}^n M^k), \\
W_0 &= (W^-)^1 = B_1^0 G_n + B_2^0 G_0 + \sum_{k=1}^n (b_{1k}^0 W^k + b_{2k}^0 N^k + b_{3k}^0 M^k), \\
V_n &= (\mathbf{v}^+)^n = D_1^n \mathbf{Q}_n + D_2^n \mathbf{Q}_0 + \sum_{k=1}^n (d_{1k}^n \mathbf{v}^k + d_{2k}^n \boldsymbol{\psi}^k + d_{3k}^n \mathbf{Q}^k), \\
V_0 &= (\mathbf{v}^-)^1 = D_1^0 \mathbf{Q}_n + D_2^0 \mathbf{Q}_0 + \sum_{k=1}^n (d_{1k}^0 \mathbf{v}^k + d_{2k}^0 \boldsymbol{\psi}^k + d_{3k}^0 \mathbf{Q}^k).
\end{aligned}$$

Подставляя выражения (4.5) в формулы (3.5)–(3.8), после преобразований получим систему уравнений в частных производных

$$\frac{\partial}{\partial \beta} (G_1 \mathbf{X}) + \frac{\partial}{\partial \gamma} (G_2 \mathbf{X}) = G_3 \mathbf{X} + G_4. \quad (4.6)$$

Здесь G_k ($k = 1, \dots, 4$) — матрицы размерности $10n \times 10n$; $\mathbf{X} = (\mathbf{v}^i, \boldsymbol{\psi}^i, W^i, N^i, M^i)$ ($i = 1, \dots, n$) — вектор неизвестных функций.

ЛИТЕРАТУРА

1. Дудченко А. А., Лурье С. А., Образцов И. Ф. Анизотропные многослойные пластины и оболочки. М.: ВИНТИ, 1983. С. 3–68. (Итоги науки и техники. Сер. Механика деформируемого твердого тела; Т. 15).
2. Амбарцумян С. А. Общая теория анизотропных оболочек. М.: Наука, 1974.
3. Пелех Б. Л., Максимук А. В., Коровайчук И. М. Контактные задачи для слоистых элементов конструкций и тел с покрытиями. Киев: Наук. думка, 1988.
4. Григолюк Э. И., Коган Е. А., Мамай В. И. Проблемы деформирования тонкостенных слоистых конструкций с расслоениями // Изв. РАН. Механика твердого тела. 1994. № 2. С. 6–42.
5. Иванов Г. В. Теория пластин и оболочек. Новосибирск: Изд-во Новосиб. ун-та, 1980.
6. Алексеев А. Е. Построение уравнений слоя переменной толщины на основе разложений по полиномам Лежандра // ПМТФ. 1994. Т. 35, № 4. С. 137–147.
7. Волчков Ю. М., Дергилева Л. А., Иванов Г. В. Численное моделирование напряженных состояний в плоских задачах упругости методом слоев // ПМТФ. 1994. Т. 35, № 6. С. 129–135.
8. Алексеев А. Е. Изгиб трехслойной ортотропной балки // ПМТФ. 1995. Т. 36, № 3. С. 158–166.
9. Алексеев А. Е., Алехин В. В., Аннин Б. Д. Плоская задача теории упругости для неоднородного слоистого тела // ПМТФ. 2001. Т. 42, № 6. С. 136–141.

Поступила в редакцию 25/XI 2002 г.