

РАСТЕКАНИЕ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО СЛОЯ ЖИДКОСТИ  
ПРИ УДАРЕ

Э. И. Андрианкин, В. К. Боболев

(Москва)

Рассматривается удар по тонкому эллиптическому слою жидкости, исследуется влияние формы слоя на закон торможения ударника и на скорость растекания, анализируется устойчивость этого процесса. Задача решается для медленного течения вязкой жидкости и для идеальной, но с учетом сил инерции. Теория согласуется с полученными экспериментальными данными.

Безынерционное растекание тонкого кругового слоя вязкой жидкости было исследовано еще Рейнольдсом [1]. В последнее время интерес к задаче возрос в связи с некоторыми вопросами смазки, штамповки и исследования чувствительности жидких взрывчатых веществ [2-7]. Имеется ряд работ, в которых изучался удар по круговому слою [3-6].

**1. Постановка задачи.** Рассмотрим осевой удар со скоростью  $w_0$  по слою жидкости в виде эллиптического цилиндра высотой  $h_0$  с полуосями  $a_0 \geq b_0$  или полосы шириной  $2b_0$ , в которую вырождается эллипс, когда  $a_0 \gg b_0$ . Сжимаемостью жидкости, ударника и наковальни пренебрежем. Отношение  $h_0 / b_0$  будем считать малым. Если ввести характерные масштабы длины  $a_0$ ,  $b_0$  и  $h_0$  соответственно вдоль осей  $x$ ,  $y$  и  $z$ , времени  $h_0 / |w_0|$ , давления  $\rho w_0^2 b_0^2 / h_0^2$  осевой компоненты скорости  $|w_0|$  и масштаб  $|w_0| b_0 / h_0$  для скоростей вдоль осей  $x$  и  $y$ , то после упрощений, следующих из малости отношения  $(h_0 / b_0)^2$ , система уравнений гидродинамики запишется так:

$$\begin{aligned} \frac{Du}{Dt} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}, \quad \frac{Dv}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}, \quad \frac{\partial p}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} &= 0, \quad \frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} + w \frac{\partial}{\partial z}, \quad \nu = \frac{\mu}{\rho} \end{aligned} \quad (1.1)$$

Граничными условиями являются требования равенства осевой составляющей скорости в жидкости и на ударнике и наковальне

$$w|_{z=0} = 0, \quad w|_{z=h} = w^\circ(t), \quad h = h_0 + \int_0^t w^\circ dt, \quad w^\circ(0) = w_0^\circ \quad (1.2)$$

( $w_0^\circ$  — начальная скорость сдавливания) и условия симметрии в центре

$$u(0, 0, t) = 0, \quad v(0, 0, t) = 0$$

Для вязкой жидкости при  $z = 0$  и  $z = h(t)$  должны также выполняться условия прилипания  $u = 0$  и  $v = 0$ .

Давлением на боковой поверхности слоя пренебрежем.

Решение ищем в виде [8]

$$u = xU(z, t), \quad v = yV(z, t), \quad p = P(t) \left[ 1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \right] \quad (1.3)$$

Тогда уравнения (1.1) удовлетворяются, если

$$a^2 \left[ \frac{\partial U}{\partial t} + U^2 + w \frac{\partial U}{\partial z} - \nu \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \right] = b^2 \left[ \frac{\partial V}{\partial t} + V^2 + w \frac{\partial V}{\partial z} - \nu \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \right] \quad (1.4)$$

$$U + V + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \quad P(t) = \frac{a^2 \rho}{2} \left[ U^2 + \frac{\partial U}{\partial t} + w \frac{\partial U}{\partial z} - \nu \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \right]$$

**2. Растекание слоя идеальной жидкости.** Рассмотрим сначала случай когда силы инерции преобладают над вязким сопротивлением, и жидкость можно считать идеальной, положив  $\nu = 0$ .

Будем считать, что  $U$  и  $V$  от  $z$  не зависят. Тогда из (1.4) найдем

$$w = zW(t), \quad W = w^\circ(t) / h(t) \quad (2.1)$$

Из (1.4) получим уравнения для  $U$  и  $V$

$$a^2(U^2 + U') = b^2(V^2 + V), \quad U + V + W = 0 \quad (2.2)$$

$$P = \frac{\rho a^2}{2} (U^2 + U') \left( 1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \right)$$

и скорости движения ударника

$$m_0 \dot{w}^\circ(t) = \frac{\pi a^2 b \rho}{4} (U^2 + U') \quad (2.3)$$

Здесь точка в позиции штриха означает производную по времени.

Начальные условия для этих уравнений можно получить, предположив, что в процессе удара ( $0 \leq t \leq t_0$ ) ускорения бесконечны, а скорости стремятся к конечным начальным значениям [5]. Интегрируя давление по площади контакта с жидкостью и по времени от 0 до  $t_0$  и переходя к пределу  $t_0 \rightarrow 0$ , найдем потерянный ударником импульс

$$\Delta I = \lim_{t_0 \rightarrow 0} \int_0^{t_0} \int_S p ds dt = \frac{\pi a_0^3 b_0 \rho}{4} U_0, \quad \Delta I = m_0 (w_0^\circ - w_0)$$

который не зависит от системы координат, и поэтому при замене осей  $x$  и  $y$  запишется так:

$$\Delta I = \frac{\pi b_0^3 a_0 \rho}{4} U_0, \quad \text{т. е. } a_0^2 U_0 = b_0^2 V_0 \quad (2.4)$$

Используя (2.2) — (2.4), найдем

$$U_0 = -\frac{b_0^2 W_0}{a_0^2 + b_0^2}, \quad V_0 = -\frac{a_0^2 W_0}{a_0^2 + b_0^2}, \quad W_0 = \frac{w_0^\circ}{h_0} \quad (2.5)$$

$$w_0^\circ = \frac{m_0 w_0}{m_0 + m_*}, \quad m_* = \frac{\pi \rho a_0^2 b_0^3}{4 h_0 (a_0^2 + b_0^2)}$$

где  $m_*$  — присоединенная масса, а индексом 0 отмечены начальные значения величин.

Начальные условия (2.5) следуют также из гидродинамической теории удара [9-11].

Проверим это на примере простейшей задачи, когда  $a_0 \rightarrow \infty$  и эллипс вырождается в полосу шириной  $2b_0$ . Частное решение для скоростей, потенциал  $\Phi_0$  и удельный импульс  $i_0$  запишутся тогда так:

$$v = -w_0^\circ \frac{y}{h}, \quad w = w_0^\circ \frac{z}{h}, \quad i_0 = -\frac{2}{3} \frac{\rho_0 w_0^\circ b_0^3}{h_0}$$

$$\Phi_0 = w_0^\circ \frac{(z^2 - h^2) - (y^2 - b^2)}{2h_0} \quad (2.6)$$

В более строгой постановке потенциал для начального поля скоростей определяется из решения уравнения Лапласа  $\Delta\Phi = 0$  при условиях

$$\Phi(\pm b_0, z) = 0, \quad \partial\Phi/\partial z|_{z=0} = 0, \quad \partial\Phi/\partial z|_{z=h_0} = w_0^\circ$$

Представим  $\Phi$  в виде  $\Phi = \Phi_0 + \Phi_1$ , тогда

$$\Delta\Phi_1 = 0, \quad \Phi_1(\pm b_0, z) = w_0^\circ \frac{h_0^2 - z^2}{2h_0}, \quad \partial\Phi_1/\partial z|_{z=0, h_0} = 0$$

Пользуясь методом Фурье, найдем

$$\Phi = w_0^\circ \frac{z^2}{2h_0} + w_0^\circ \frac{b_0^2 - y^2}{2h_0} - w_0^\circ \frac{h_0}{6} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{k+1} w_0^\circ h_0 \operatorname{ch}(\pi ky/h_0)}{\pi^2 k^2 \operatorname{ch}(\pi b_0 k/h_0)} \cos \frac{\pi kz}{h_0} \quad (2.7)$$

Из (2.7) следует, что

$$\begin{aligned} \bar{u} &= \frac{1}{h_0} \int_0^{h_0} \frac{\partial\Phi}{\partial y} dz = -w_0^\circ \frac{y}{h_0}, \quad i_0 = -2\rho_0 \int_0^{b_0} \Phi(h_0, y) dy = \\ &= -\frac{2\rho_0 w_0^\circ b_0^3}{3h_0} \left[ 1 - \frac{1}{2} \left( \frac{h_0}{b_0} \right)^2 - \sigma \left( \frac{h_0}{b_0} \right)^3 \right], \quad \sigma = \frac{6}{\pi^3} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3} \operatorname{th} \frac{\pi k b_0}{h_0} \quad (2.8) \end{aligned}$$

Так как  $\operatorname{th}(\pi k b_0/h_0) \leq 1$ , а  $k^{-3} \leq k^{-2}$ , то

$$\sigma < \frac{6}{\pi^3} \sum_{k=1}^{\infty} k^{-2} = \frac{1}{\pi}$$

Из сравнения (2.6) и (2.8) видно, что частное решение описывает осредненное по толщине слоя поле скоростей, причем начальные скорости сдвигания  $w_0^\circ = w_0 + \Delta I / m_0$  и присоединенная масса  $m_* = -\Delta I / w_0^\circ$  отличаются от точного решения на величины порядка  $(h_0/b_0)^2$ . Заметим, однако, что боковая скорость  $u = \partial\Phi/\partial y$  в начальный момент у стенки ударника бесконечна. Образование при  $t_0 \rightarrow 0$  пелены с большой скоростью характерно для многих задач и наблюдается, например, при ударе пластинки о поверхность воды. Это явление качественно объясняется волнами боковой разгрузки [5].

Время  $t_*$  выхода на режим частного решения можно оценить из условия возрастания потенциала на боковой поверхности слоя жидкости до максимальной величины разности  $(\Phi - \Phi_0)_{\max} = w_0^\circ h_0 / 2$ , характеризующей нестрогость начальных условий (2.6). Используя интеграл Лагранжа — Коши, найдем

$$(\Phi - \Phi_0)_{\max} \approx \int_0^{t_*} \frac{v^2 + w^2}{2} dt \approx \frac{1}{2} \left( \frac{w_0^\circ b_0}{h_0} \right)^2 t_*, \quad t_* \approx \frac{h_0}{|w_0^\circ|} \left( \frac{h_0}{b_0} \right)^2$$

Возвращаясь к (2.2) и (2.3) и вводя безразмерные функции

$$\theta = \frac{W}{W_0}, \quad \psi = -\frac{2U}{W}, \quad \xi = \frac{h}{h_0}, \quad \tau = \frac{t|w_0^\circ|}{h_0}$$

придем к последовательно интегрируемой системе уравнений

$$2\xi(1 + \beta\xi) \frac{d^2\psi}{d\xi^2} = -\psi(1 - \psi)(2 - \psi) + \beta\xi[\delta\psi^2 + 2(1 + \varepsilon)\psi - 4\varepsilon], \quad \psi(1) = \varepsilon \quad (2.9)$$

$$\frac{2\xi(1+\beta)}{\theta} \frac{d\theta}{d\xi} = \psi^2 - 2\psi + 2(1 - \beta\xi), \quad \theta(1) = 1 \quad (2.10)$$

$$\tau = - \int_1^\xi \frac{d\xi}{\xi\theta}, \quad \varepsilon = \frac{2b^2}{a^2 + b^2}, \quad \delta = 1 - \varepsilon, \quad \beta = \frac{4h_0 m_0 (a^2 + b^2)}{\pi a^2 b^3 \rho} \quad (2.11)$$

Если основание ударника точно совпадает с плоским сечением слоя, то  $a = a_0$ ,  $b = b_0$ ,  $\beta = m_0 / m_*$  и эти уравнения образуют замкнутую систему.

Уравнение типа Абеля (2.9) в области  $\psi \geq 0$ ,  $0 \leq \xi \leq 1$  имеет три особые точки:  $\xi = 0, \psi = 0$  — седло;  $\xi = 0, \psi = 2$  — седло;  $\xi = 0, \psi = 1$  — узел с наклоном особого решения  $d\psi / d\xi = 3\beta(1 - \varepsilon)$ . Вблизи узла интегральные кривые касаются оси  $\psi$  с бесконечной производной

$$\psi = 1 + K\xi^{1/2} + 3(1 - \varepsilon)\xi, \quad K = \text{const} \quad (2.12)$$

Из (2.10) и (2.12) следует, что вблизи узла, который соответствует полному сдавливанию слоя жидкости

$$h \rightarrow 0, \quad \theta = B\xi^{1/2}, \quad B = \text{const}$$

и, следовательно, из (2.11) заключаем, что время движения ударника  $\tau \sim \xi^{-1/2} \rightarrow \infty$ . Если поменять местами оси  $x$  и  $y$  в условиях задачи, то функция  $U$  перейдет в  $V$ , а параметр  $\varepsilon$  — в  $2 - \varepsilon$ . Используя (2.2), это свойство в безразмерных величинах запишется так:

$$\varphi(\xi, \beta, \varepsilon) = -\varphi(\xi, \beta, 2 - \varepsilon), \quad \varphi = 1 - \psi$$

В частном случае, когда эллипс вырождается в круг

$$\varepsilon = 1, \quad \varphi(\xi, \beta, 1) = -\varphi(\xi, \beta, 1), \quad \text{т. е. } \psi = 1$$

Тогда из (2.10) и (2.11) найдем

$$\theta = \xi^{1/2} \left( \frac{1 + \beta}{1 + \beta\xi} \right)^{3/2}, \quad \tau = \frac{2\beta^{1/2}}{(1 + \beta)^{3/2}} [X(k) - X(k_0)] \quad (2.13)$$

$$X(k) = \frac{k(k^2 - 2)}{k^2 - 1} - \frac{1}{2} \ln \frac{k+1}{k-1}, \quad k = (1 + 1/\beta\xi)^{1/2}, \quad k_0 = (1 + 1/\beta)^{1/2}$$

Для радиальной скорости и давления получим простые формулы

$$v_r = - \frac{w_0}{2h_0} r\theta(\xi), \quad p = \frac{3\beta\rho(1 + \beta)^2 (w_0 r_0 \xi)^2}{8h_0^2 (1 + \beta\xi)^4} \left[ 1 - \left( \frac{r}{r_0} \right)^2 \right] \quad (2.14)$$

$$\beta = \frac{8h_0 q}{\rho r_0^2}, \quad q_0 = \frac{m_0}{\pi r_0^2}$$

Из (2.13) и (2.14) видно, что скорость вытекания  $v_r(r_0, t)$  и давление в центре  $p(0, t)$  достигают наибольших значений не сразу, а через некоторые промежутки времени (см., например, кривую 3 на фиг. 1, где дано изменение давления в центре круга  $p_0 = Ph_0^2 / \rho r_0^2 w_0^2$  для случая  $\beta = 10$ ). Максимум возникает из-за влияния двух противоположных факторов — утоньшения слоя и торможения ударника.

В другом предельном случае  $\varepsilon \rightarrow 0$ , когда эллипс вырождается в полосу шириной  $2b_0$ , уравнения (2.9) — (2.11) также легко интегрируются

$$\psi \equiv 0, \quad \theta = \frac{\xi(1 + \beta)^2}{(1 + \beta\xi)^2}, \quad \tau = \frac{\beta}{(1 + \beta)^2} \left[ \frac{1}{\beta\xi} - \frac{1}{\beta} + \beta(1 - \xi) - 2 \ln \xi \right]$$

$$v = - \frac{w_0}{h_0} y\theta, \quad p = \frac{\beta\rho\xi}{1 + \beta\xi} \left( \frac{w_0 b_0 \theta}{h_0} \right)^2 \left[ 1 - \left( \frac{y}{b_0} \right)^2 \right] \quad (2.15)$$

$$\beta = \frac{4h_0 q}{\rho b_0^2}, \quad w_0^2 = \frac{\beta w_0}{1 + \beta}, \quad q = \lim_{a_0 \rightarrow \infty} \frac{m_0}{\pi a_0 b_0}$$

Из (2.15) видно, что при конечном  $\beta$  время сдвливания

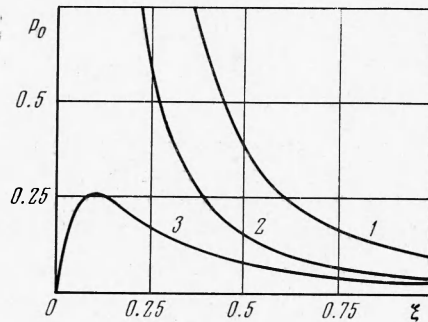
$$t \sim (1 + \beta)^{-2} \xi^{-1} \rightarrow \infty$$

Из формул (2.2), (2.9) и (2.10) следует выражение для давления в центре эллипса

$$P(\xi) = \frac{\beta \rho \xi}{8(1 + \beta \xi)} \left( \frac{w_0^\circ b_0 \theta}{h_0} \right)^2 [(2 - \psi)(4 - \psi) + \delta \psi^2 + 2(1 + \varepsilon)\psi - 4\varepsilon]$$

$$v = -\frac{w_0^\circ}{2h_0} y \theta (2 - \psi) \quad (2.16)$$

Уменьшение  $\varepsilon$ , т. е. увеличение эксцентриситета, уменьшает жесткость удара, и при  $r_0^2 = a_0 b_0$ , максимальное давление на эллипсе  $\psi < 1$  и полосе



Фиг. 1

оказывается меньше, чем на круге  $\psi \equiv 1$ . Это вполне естественно, так как периметр эллипса больше, чем у круга, и, следовательно, выдавливание происходит более свободно. Если  $r_0 = b_0$ , то давление на полосе оказывается выше, чем на круге, так как по отношению к площади периметр круга больше, чем у полосы. На фиг. 1 для сравнения приведены кривые изменения давления  $p_0 = Ph_0^2 / \rho_0 w_0^2 b_0^2$  в центре полосы (кривая 1) и круга (кривая 2) при сжатии с постоянной скоростью.

Обычно в экспериментах  $\beta$  велико, и поэтому решение с постоянной скоростью сдвливания имеет практический смысл. К тому же это решение является точным, так как при  $w_0 = \text{const}$  в (1.1) комбинация членов  $dw / \partial t + w \partial w / dz = 0$ , и поэтому осевая проекция уравнения Эйлера удовлетворяется точно, а не приближенно, даже когда  $h / b$  не мало.

Пусть  $\varepsilon$  произвольно, но масса ударника велика. Тогда решение (2.9) можно искать разложением в ряд по малому параметру  $\beta^{-1}$ , и уже нулевой член  $\psi_0$  при  $\beta \rightarrow \infty$ , удовлетворяющий уравнению

$$2\xi \frac{d\psi_0}{d\xi} = \delta \psi_0^2 + 2(1 + \varepsilon)\psi_0 - 4\varepsilon, \quad \psi_0(1) = \varepsilon \quad (2.17)$$

дает хорошее приближение в области  $10\beta^{-1} \leq \xi \leq 1$ . Интегрируя (2.17), найдем

$$\delta \psi_0 (\alpha + \xi^k) = (\delta - 2 - k) \xi^k + \alpha (k - 2 + \delta), \quad \alpha (k - 2 + \delta^2) = k + 2 - \delta^2$$

$$p = \frac{\rho a_0 \varepsilon}{8} \left( \frac{w_0^\circ}{h_0 \xi} \right)^2 \left[ (1 - \psi_0)^2 + 3 \right] \left[ 1 - \frac{x^2}{a_0^2} - \frac{y^2}{b_0^2} \right], \quad \theta = 1/\xi, \quad \tau = 1 - \xi$$

При  $\xi \rightarrow 0$ ,  $\psi_0 \rightarrow \psi_*$ ,  $\psi_* = 1 - (2 - k) / \delta \leq 1$ , т. е. для нулевого приближения, положение узла  $\varepsilon \neq 1$  не совпадает с (2.12) и при малых  $\xi$  наблюдается отличие  $\psi_0$  от точного решения. Но при  $\varepsilon = 1$  приближенное решение становится точным, так как в этом случае  $\psi_0 \equiv 1$ .

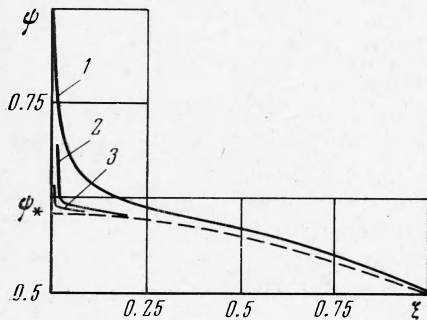
На фиг. 2 и фиг. 3 нанесены графики функций  $\psi(\xi)$  и  $\tau(\xi)$  для случаев  $\varepsilon = 0.5$  и  $\beta = 10, 100$  и  $1000$  (соответственно кривые 1, 2 и 3) и для сравнения пунктиром нанесено нулевое приближение. Видно, что отличие приближенного решения от точного наблюдается только при  $\xi \leq 10\beta^{-1}$ .

Интересно сравнить скорости вытекания  $v_b$  и  $u_a$  соответственно вдоль малой и большой полуосей эллипса

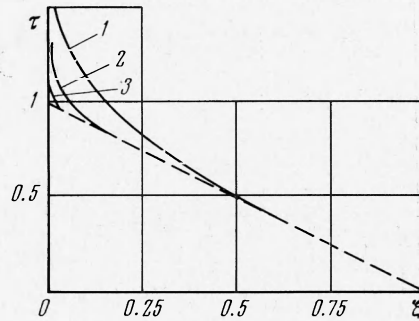
$$\frac{v_b}{u_a} = \frac{U}{V} \left( \frac{\varepsilon}{2-\varepsilon} \right)^{1/2}, \quad \frac{v}{u} = \frac{y}{x} \frac{V}{U}, \quad \frac{U}{V} = \frac{2-\psi}{\psi} \quad (2.18)$$

В начальный момент  $\psi = \varepsilon < 1$  и согласно (2.18)  $v_b > u_a$ . Этот эффект объясняется большим градиентом давления в направлении малой полуоси, что приводит также к повороту вектора скорости  $v/u \geq y/x$ . При сдвливании с постоянной скоростью  $\tau \rightarrow 1$ ,  $\psi \rightarrow 1 - (2-k)/\delta$ , и поэтому  $v_b > u_a$  всегда.

Если масса ударника конечна, то при  $\xi \rightarrow 0$ ,  $\psi \rightarrow 1$ , и поэтому становится  $v_b < u_a$ . Этот эффект связан с инерционностью растекания жидкости, когда влиянием сил давления можно пренебречь.



Фиг. 2



Фиг. 3

Выпишем еще точное решение для случая когда сдвливание слоя происходит постоянной внешней силой  $f_0 = \pi a_0^3 b_0 \rho (U^2 + U')/4$ . Интегрируя это уравнение и используя (2.2), найдем

$$\frac{A+U}{A-U} = \frac{A+U_0}{A-U_0} \exp 2At, \quad \frac{B+V}{B-V} = \frac{B+V_0}{B-V_0} \exp 2Bt$$

$$A = 4f_0 / \pi \rho a_0^3 b_0, \quad B = a_0 A / b_0$$

Заметим, что уравнения (2.2) просто интегрируются и для случая  $\varepsilon \rightarrow 0$   $f_0/a_0 = \text{const}$ . Растекание эллиптического слоя между двумя плоскостями описывается теми же уравнениями (2.2) и (2.3), если считать  $\varepsilon = \varepsilon(t)$  и  $\beta = \beta(t)$ , так как

$$da/dt = aU, \quad abh = a_0 b_0 h_0, \quad a(0) = a_0 \quad (2.19)$$

При расплющивании эллиптический слой остается эллиптическим. Действительно, произвольно выбранная точка с координатами  $x, y$  в момент времени  $t_1$ , лежащая на эллипсе с полуосями  $a_1$  и  $b_1$  в момент  $t_1 + dt$ , переходит в точку с координатами

$$x_1 = x_1 + U x_1 dt_1, \quad y_1 = y_1 + V y_1 dt$$

принадлежащую эллипсу с полуосями

$$a_2 = a_1 + U a_1 dt, \quad b_2 = b_1 + V b_1 dt$$

В этом можно убедиться, разлагая с точностью до  $dt$  уравнение  $x_2^2/a_2^2 + y_2^2/b_2^2 = 1$  и учитывая, что

$$x_1^2/a_1^2 + y_1^2/b_1^2 = 1$$

Практический интерес представляет удар большой массой, когда  $w_0^\circ = \text{const}$  и из (2.2), (2.3) и (2.19) приходим к уравнениям

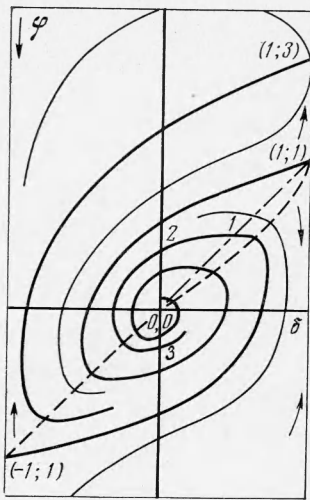
$$2\xi \frac{d\varphi}{d\xi} = 4\varphi - \delta(\varphi^2 + 3), \quad \xi \frac{d\delta}{d\xi} = \varphi(1 - \delta^2), \quad 2\xi \frac{d\bar{a}}{d\xi} = \bar{a}(\varphi - 1)$$

$$\varphi(1) = \delta_0, \quad \bar{a}(1) = 1, \quad \bar{a} = a/a_0, \quad \delta(1) = \delta_0 \quad (2.20)$$

Из первых двух уравнений (2.20) получается уравнение Абеля

$$2\varphi(1 - \delta^2) \frac{d\varphi}{d\delta} = 4\varphi - \delta(\varphi^2 + 3)$$

Оно имеет особые точки:  $(0,0)$  — фокус,  $(1,1)$  и  $(-1,1)$  — седла,  $(1,3)$  и  $(-1,-3)$  — узлы. Вертикали  $\delta = \pm 1$  — особые решения, интегральные кривые к которым подходят с бесконечными производными. Ось  $\delta$  — изоклина бесконечностей. Изоклина нулей  $\delta = 4\varphi / (\varphi^2 + 3)$  — пунктир на фиг. 4 выходит из особой точки  $(1,1)$  с наклоном  $d\varphi/d\delta = 2$  и лежит ниже сепаратрисы  $\varphi = 1 + \frac{2}{3}(\delta - 1)$ . Начальные условия (точка 1) лежат на биссектрисе  $\varphi = \delta$  — штрих-пунктир.



Фиг. 4

Из поля интегральных кривых (фиг. 4) видно, что по мере сдавливания эллипс превращается в круг с некоторым радиусом  $r_2$  (точка 2). Однако в этот момент поле скоростей еще остается несимметричным, так как при  $\varphi = \varphi_2 < 1$

$$a = b = r_2, \quad U/V = (1 - \varphi) / (1 + \varphi) < 1,$$

т. е.  $v_b > v_a$  и поэтому круг снова превращается в эллипс, но теперь с полуосями  $b > a$  (отрезок интегральной кривой между точками 2 и 3 на фиг. 4). Далее этот процесс повторяется со все уменьшающимся эксцентриситетом. При этом колеблется и фокусное расстояние  $|a^2 - b^2|^{1/2}$ .

Записывая вблизи фокуса уравнения (2.20) в полярных координатах

$$2 \frac{d\omega}{d\eta} = 2 + \cos^2 \omega - 2 \sin 2\omega + 0.25r^2 \sin^2 2\omega, \quad \eta = -\ln \xi, \quad \varphi = r \sin \omega,$$

$$\delta = r \cos \omega, \quad 0 \leq r \leq 1$$

видим, что при  $h \rightarrow 0$  ( $\eta \rightarrow \infty$ ) должно и  $\omega \rightarrow \infty$ , так как  $d\omega/d\eta > 0$ , т. е. число колебаний бесконечно. Отметим, что сепаратриса, выходящая из точки  $(1,1)$  (жирная линия на фиг. 4), не может служить решением задачи, так как начальному условию  $\delta_0 = 1$  соответствует вырождение эллипса в полосу,  $\varphi \equiv 1$ . Однако подойти к этой сепаратрисе можно сколь угодно близко, и при этом колебания начинаются лишь вблизи момента полного сдавливания, когда  $h \rightarrow 0$ . Выражая из (2.20)  $a$  и  $b$  в виде

$$a = a_0 \xi^{-1/2} \exp \frac{1}{2} \int_1^\xi \frac{\varphi}{\xi} d\xi, \quad b = b_0 \xi^{-1/2} \exp -\frac{1}{2} \int_1^\xi \frac{\varphi}{\xi} d\xi$$

найдем, что амплитуды пульсаций  $K = (a - b) / a_0$  осей эллипса имеют экстремумы  $K_*$  в точках  $\xi_0$ , являющихся корнями уравнения

$$[1 - \varphi(\xi_0)] \exp \int_1^{\xi_0} \frac{\varphi}{\xi} d\xi = 1 + \varphi(\xi_0), \quad K_* = 2 \left( \frac{b_0}{a_0 \xi_0} \right)^{1/2} \frac{\varphi(\xi_0)}{1 + \varphi(\xi_0)}$$

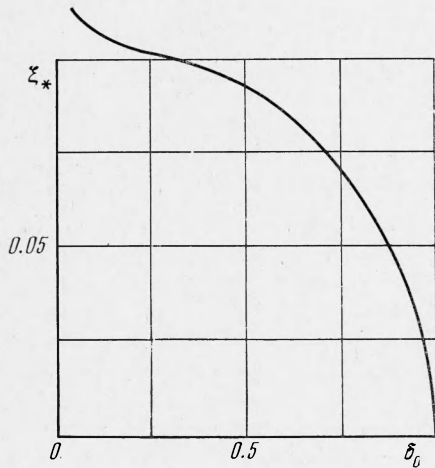
Из (2.20) следует, что при  $\xi \rightarrow 0$  также и  $\delta \rightarrow 0$  согласно уравнению

$$\frac{d^2\delta}{d\eta^2} + 2\frac{d\delta}{d\eta} + \frac{3}{2}\delta = 0, \quad \varphi \rightarrow \frac{d\delta}{d\eta}$$

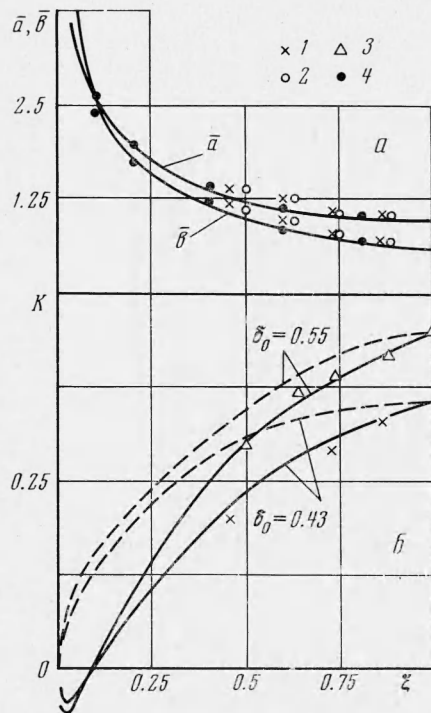
$$\delta \rightarrow \xi \left( A \sin \frac{\ln \xi}{\sqrt{2}} + B \cos \frac{\ln \xi}{\sqrt{2}} \right), \quad \varphi \rightarrow \xi \left( A_1 \sin \frac{\ln \xi}{\sqrt{2}} + B_1 \cos \frac{\ln \xi}{\sqrt{2}} \right)$$

$$K \rightarrow \xi^{1/2} \left( A_2 \sin \frac{\ln \xi}{\sqrt{2}} + B_2 \cos \frac{\ln \xi}{\sqrt{2}} \right)$$

Поэтому амплитуды пульсаций затухают и эллипс превращается в круг. На фиг. 5 приведена в зависимости от  $\delta_0$  расчетная кривая относительных толщин слоя  $\xi_*$ , при которых эллипс впервые проходит стадию круга (точка 2 на фиг. 4). Обращает внимание позднее (при малых  $\xi$ ) начало колебаний формы эллипса. И только когда эллипс близок к кругу с самого начала, колебания происходят еще при небольших сжатиях. Так, напри-



Фиг. 5



Фиг. 6

мер, расчеты показали, что при  $\delta_0 = 10^{-3}$  и  $10^{-4}$   $\xi_*$  оказалось равным соответственно 0.16 и 0.29. На фиг. 6, а приведены для случая  $\delta_0 = 0.43$  расчетные кривые изменения полуосей эллипса  $\bar{a}$  и  $\bar{b} = b/a_0$ . На фиг. 6, б приведены расчетные кривые  $K = \bar{a} - \bar{b}$  для случаев  $\delta_0 = 0.43$  и  $\delta_0 = 0.55$ . Для сравнения с теорией (Э. И. Андрианкин) на фиг. 6, а, б приведены также опытные данные В. К. Боболева и А. В. Дубовика: 1 — опыты с водным глицерином  $\rho = 1.24 \text{ г/см}^3$ ,  $\mu = 3 \text{ нз}$ ,  $w_0 = 2 \text{ м/сек}$ ,  $m_0 = 5 \text{ кг}$ , радиус ударника — 9.5 мм,  $h_0 = 0.25$ ,  $a_0 = 4.45 \text{ мм}$ ,  $b_0 = 2.85 \text{ мм}$ ,  $Re = 1$ ,  $\delta_0 = 0.42$ ,  $\beta = 1.76 \cdot 10^4$ ; 2 —  $h_0 = 0.5 \text{ мм}$ ,  $a_0 = 0.45 \text{ мм}$ ,  $b_0 = 2.85 \text{ мм}$ ,  $Re = 2$ ,  $\delta_0 = 0.43$ ,  $\beta = 3.5 \cdot 10$ ; 3 — опыты с медом,  $\rho = 1.41 \text{ г/см}^3$ ,  $\mu = 100 \text{ нз}$ ,  $w_0 = 1 \text{ м/сек}$ ,  $m_0 = 10 \text{ кг}$ ,  $h_0 = 0.5 \text{ мм}$ ,  $a_0 = 4.75 \text{ мм}$ ,  $b_0 = 2.55 \text{ мм}$ ,  $Re \approx 0.35$ ,  $\delta_0 = 0.55$ ,  $\beta = 7.4 \cdot 10^4$ .

Задача о растекании кругового слоя  $a = b = R(t)$  просто решается даже с учетом торможения ударника, так как в этом случае

$$U = V, \quad \beta = \beta_0 \xi^2, \quad \psi = 1, \quad \beta_0 = 8h_0 m_0 / \pi \rho r_0^4$$



Интегрируя (2.10) и (2.11) с учетом (2.19), найдем

$$R = r_0 \xi^{-1/2}, \quad U = -\frac{w_0^\circ}{2h_0} \xi, \quad \theta^2 = \frac{\xi(1+\beta_0)}{1+\beta_0\xi^3}$$

$$\tau = 2(\xi^{-1/2} - 1) + 0.4\beta_0(1 - \xi^{1/2})$$

Пусть в момент времени  $t_1$  ударник остановился из-за какого-либо внешнего воздействия, тогда дальнейшее растекание жидкости происходит по инерции

$$p = 0, \quad \dot{U} + U^2 = 0, \quad UR_* = dR_*/dt, \quad R_1^2 h_1 = R_*^2 h$$

$$U = U_1 R_1 / R_*, \quad R_* = R_1 [1 + U_1(t - t_1)]$$

3. Медленное растекание вязкого слоя. Пренебрегая в (1.4) инерционными членами, получим уравнения

$$a^2 \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = b^2 \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}, \quad U + V + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \quad m_0 \frac{dw}{dt} = \frac{\pi ab}{2} P(t)$$

$$P(t) = -\frac{\mu a^2}{2} \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}$$

Интегрируя их с учетом условий прилипания, получим

$$U = z(\delta - z)U^\circ(t), \quad V = z(\delta - z)V^\circ(t), \quad w = -\frac{z^2(3h - 2z)}{3\varepsilon} U^\circ(t)$$

$$P = \mu a^2 U^\circ, \quad V^\circ = a^2 U^\circ / b^2, \quad U^\circ = -3\varepsilon h^{-3} w^\circ(t)$$

Интегрируя уравнение движения ударника, найдем

$$w^\circ(t) = w_0^\circ + \frac{3\pi\mu a_0^3 b_0^3 (1 - \xi^2)}{2m_0 h_0^2 \xi^2 (a_0^2 + b_0^2)} \quad (3.1)$$

$$\tau = (1 - \xi_k) \left[ 1 - \xi - \frac{\xi_k}{2} \ln \frac{(\xi - \xi_k)(1 + \xi_k)}{(\xi + \xi_k)(1 - \xi_k)} \right]$$

$$\xi_k^{-2} = 1 + \frac{2m_0 h_0^2 w_0^\circ (a_0^2 + b_0^2)}{3\pi\mu a_0^3 b_0^3}$$

Из (3.1) следует, что остановка ударника происходит на конечной толщине слоя  $\xi_k$ , однако время движения до остановки,  $\sim \ln(\xi - \xi_k)$  бесконечно. Если сравнить конечные толщины слоев  $\xi_k^\circ$  и  $\xi_k$  при ударе, соответственно круговым и эллиптическим ударником с равными массой, скоростью и площадью основания  $r_0^2 = a_0 b_0$ , то получается вполне естественный результат  $\xi_k^\circ > \xi_k$ , т. е. сдавливать узкий слой легче.

При решении задачи о расплющивании эллиптического слоя между двумя плоскостями будем считать, что граница эллипса расширяется со средней по толщине слоя скоростью. Тогда

$$a' = \frac{U^\circ a}{h} \int_0^h z(h - z) dz = \frac{U^\circ a h^2}{6}, \quad b' = \frac{V^\circ b h^2}{6} \quad (3.2)$$

Эти соотношения удовлетворяют условию постоянства массы жидкости  $abh = a_0 b_0 h_0$ .

Учитывая, что  $V^\circ = a^2 U^\circ b^{-2}$ , из (3.2) найдем

$$a^2 - b^2 = c_0^2, \quad c_0^2 = a_0^2 - b_0^2, \quad a^2 = \frac{c_0^2}{2} + \lambda^{1/2}, \quad \lambda = \frac{c_0^4}{4} + \left(\frac{a_0 b_0}{\xi}\right)^2 \quad (3.3)$$

$$K = \left(\frac{\delta_0}{1 + \delta_0}\right)^{1/2} [(1 + \omega_1)^{1/2} - (\omega_1 - 1)^{1/2}], \quad \omega_1^2 = 1 + \frac{1 - \delta_0^2}{\delta_0^2 \xi^2}$$

т. е. фокусное расстояние сохраняется (в отличие от инерционной задачи), но разность  $(a - b) / a$  монотонно падает. Зависимость  $K(\xi)$  для случаев  $\delta_0 = 0.43$  и  $0.55$  пунктиром проведена на фиг. 6, б. Однако остановка движения при конечной массе ударника происходит, когда  $\xi_b > 0$ , и поэтому эллипс в круг не переходит. Действительно, интегрируя уравнение движения ударника с учетом (3.3), найдем

$$w^\circ(\xi) = w_0^\circ + \frac{3\pi\mu a_0^2 b_0^2}{8m_0 h_0^2} \left[ \xi^{-4} - 1 + \frac{2c_0^2(\lambda^{3/2} - \lambda_1^{3/2})}{3a_0^4 b_0^4} - \frac{c_0^6(\lambda^{1/2} - \lambda_1^{1/2})}{2a_0^4 b_0^4} \right]$$

$$4\lambda_1 = a_0^2 + b_0^2$$

Так как при  $\xi \rightarrow 0$  первый член в квадратных скобках быстро возрастает, то  $w^\circ(\xi)$  обращается в нуль при  $\xi_b > 0$ . Неудивительно также совпадение кривых  $a$  и  $b$  для инерционной и вязкой задачи (точки 4 на фиг. 6, а), так как растекание контролируется балансом массы, хотя силы давления совершенно разные.

В заключение выпишем уравнение движения жидкости при сдвливании кругового слоя постоянной силой  $f_0 = \pi r_0^2 P_0 / 2$  с учетом одновременно инерционных и вязких членов.

Решение ищем в виде

$$U \equiv V, \quad U = -\frac{1}{2} \frac{\partial w}{\partial z}, \quad w = w(z)$$

Тогда из (1.4) получим уравнение для  $w$ , аналогичное пограничному слою

$$2\nu \frac{d^3 w}{dz^3} - 2w \frac{d^2 w}{dz^2} + \left(\frac{dw}{dz}\right)^2 = \alpha^2, \quad \alpha^2 = \frac{16f_0}{\pi r_0^4 \rho}$$

решение которого можно найти в рядах.

Авторы благодарят А. В. Дубовика за проведение эксперимента и Л. В. Мостовую за численные расчеты.

Поступила 28 VII 1971

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Reynolds O. On the theory of lubrications and its application to Mr. B. Towre's experiments including an experimental determination of the viscosity of olive oil. Philos. Trans. Roy. Soc. London, 1886, vol. 177, pt 1.
2. Солоухин Р. И. О пузырьковом механизме ударного воспламенения в жидкости. Докл. АН СССР, 1961, т. 136, № 2.
3. Харитон Ю. Б. К вопросу детонации от удара. В сб. статей по теории взрывчатых веществ, М., Оборонгиз, 1940, стр. 177—196.
4. Ишлинский А. Ю. О плоском движении песка. Укр. матем. ж., 1954, т. 6, № 4.
5. Андрианкин Э. И. Растекание вязкой капли при ударе. ПМТФ, 1966, № 5.
6. Андрианкин Э. И., Боболев В. К., Дубовик А. В. Схлопывание цилиндрической полости в слое жидкости при ударе. ПМТФ, 1970, № 6.
7. Андрианкин Э. И., Боболев В. К., Дубовик А. В. Схлопывание эллиптической полости и возбуждение взрыва в слое жидкости при ударе. ПМТФ, 1971, № 5.
8. Овсянников Л. В. Новое решение уравнений гидродинамики. Докл. АН СССР, 1956, т. 111, № 1.
9. Лаврентьев М. А., Келдыш М. В., Маркушевич А. И., Седов Л. И., Лотов А. Б. Сб. статей по вопросам удара о поверхность воды, Тр. ЦАГИ, 1935, вып. 152.
10. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного. М., Физматгиз, 1958.
11. Седов Л. И. Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики, гл. 4. М.—Л., Гостехтеоретиздат, 1950.