УДК 530.1

В. Н. Доровский, Ю. В. Перепечко

ФЕНОМЕНОЛОГИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ ДВУХСКОРОСТНЫХ СРЕД С РЕЛАКСИРУЮЩИМИ КАСАТЕЛЬНЫМИ НАПРЯЖЕНИЯМИ

В процессе фильтрации высокотемпературных растворов (либо расплавов) сквозь вмещающий остов возникают и в последующем релаксируют касательные напряжения. Возникающие напряжения, а также динамика их релаксации в свою очередь начинают определять механику фильтрации жидкой фазы, что приводит к самосогласованному процессу взаимодействия рассматриваемых континуумов.

В [1] для описания релаксации касательных напряжений в упруговязкой среде предложено понятие эффективной упругой деформации. Введением его авторам удалось обобщить максвелловскую релаксационную модель на случай значительных деформаций среды. Этот подход оказывается принципиальным в нелинейной теории фильтрации. Обобщение максвелловской модели на фильтрационные среды в приближении малых деформаций и малых скоростей фильтрующейся жидкости неоднократно исследовалось в литературе (см., например, [2]). Распространение максвелловской модели на случай нелинейной деформации остова и высоких скоростей фильтрации жидкости, насколько известно авторам, в литературе отсутствует.

В условиях фильтрации вязкой жидкости сквозь упруговязкий остов эффективную упругую деформацию необходимо ввести несколько иным образом, чем это сделано в [1]. Теорию, использующую понятие эффективной упругой деформации, необходимо согласовать с общими физическими требованиями: законами сохранения и принципом относительности Галилея.

Ниже получена система дифференциальных уравнений, описывающая релаксацию касательных напряжений упруговязкого остова при его самосогласованном взаимодействии с фильтрующейся вязкой жидкостью. Установлено необходимое требование на начальное деформированное состояние среды. Система уравнений описывает как компактные, так и не компактные двухскоростные континуумы.

В качестве основы общей теории необходимо построить формализм упругого взаимодействия остова с фильтрующейся жидкостью в обратимом гидродинамическом приближении. В рамках континуального подхода введем для описания процесса фильтрации два поля скоростей: $\mathbf{u}$ — скорость движения упругого континуума с парциальной плотностью ρ_1, $\mathbf{v}$ — скорость движения жидкости с парциальной плотностью ρ_2, фильтрующейся сквозь упругий континуум. Два таких взаимопроникающих континуума могут взаимодействовать посредством силы трения $\mathbf{f}$, которая в обратимом приближении отсутствует, и силы реакции, которая в гидродинамике пропорциональна градиентам термодинамических величин. Кроме того, совокупность двух континуумов представляет собой гидродинамическую систему, для которой справедливы законы сохранения, в случае обратимого движения имеющие вид

$$\partial\rho/\partial t + \operatorname{div}\mathbf{j} = 0,\quad \partial j_i/\partial t + \nabla_i\Pi_{ij} = 0,$$
$$\partial S/\partial t + \operatorname{div}\mathbf{F} = 0,\quad \partial E/\partial t + \operatorname{div}\mathbf{Q} = 0. \tag{1}$$

Здесь экстенсивные величины отнесены к единице объема: ρ — плотность совокупного континуума; $\mathbf{j}$ — импульс; Π_{ij} — тензор потока импульса; $\mathbf{F}$ — обратимый поток энтропии; $\mathbf{Q}$ — обратимый поток энергии; E — энергия; S — энтропия; T — температура.

Уравнение движения фильтрующейся жидкости примем в виде, обобщающем уравнение Эйлера и согласующемся с условиями термодинамического равновесия $\mu = \text{const}$, $T = \text{const}$, $\mathbf{u} = \mathbf{v} = 0$ композиционной гидродинамической системы

$$\partial \mathbf{v}/\partial t + (\mathbf{v}, \nabla)\mathbf{v} = -\nabla\mu - \alpha\nabla\Omega, \tag{2}$$

где $\alpha\nabla\Omega$ — плотность объемных сил; μ — химический потенциал. Уравнения (1), (2) будут в дальнейшем дополнены до полной системы уравнений.

Система (1), (2) переопределена, поскольку в гидродинамике закон сохранения энергии не является независимым. Результатом согласования системы уравнений должно стать получение $\mathbf{j}$, Π_{ij}, $\mathbf{F}$, $\mathbf{Q}$, Ω, а также связи их между собой. Конструктивным механизмом такого согласования служит принцип относительности Галилея [3]. Действительно, перейдем в систему координат, в которой жидкая фаза покоится. Физические величины, относящиеся к этой системе, отметим индексом нуль. В этом случае имеем [3]

$$E = \rho v^2/2 + (\mathbf{v}, \mathbf{j}_0) + E_0, \quad \mathbf{j} = \rho\mathbf{v} + \mathbf{j}_0. \tag{3}$$

В выбранной системе отсчета $\mathbf{j}_0 = \rho_1(\mathbf{u} - \mathbf{v})$, а первое начало термодинамики имеет вид

$$dE_0 = TdS + \mu d\rho + (\mathbf{u} - \mathbf{v}, d\mathbf{j}_0) + (1/2)h_{\alpha\beta}dg^{\alpha\beta} \tag{4}$$

($g^{\alpha\beta}$ — метрический тензор деформаций, $h_{\alpha\beta}$ — тензор «напряжений»). Третий член в (4) отражает наличие движения в элементе континуума, которое нельзя устранить выбором системы отсчета. Последний член учитывает энергию упругой деформации. Заметим, что истинный тензор напряжений находится из выражения

$$-\sigma_{ik} = p\delta_{ik} + h_{\alpha\beta}\, e_i^\alpha e_k^\beta.$$

Описывая переменными S, ρ, $g^{\alpha\beta}$ термодинамическое состояние элемента континуума в системе отсчета, связанной с покоем жидкой частицы, допускаем присутствие относительного движения в выбранном элементе континуума, которое однозначно описывается дополнительной термодинамической переменной — относительным импульсом $\mathbf{j}_0$. Таким образом, имеем локально неравновесную термодинамическую систему с релаксирующими степенями свободы, в качестве которых могут быть выбраны компоненты $\mathbf{j}_0$. Формула (4) определяет по Леонтовичу локально неравновесную энтропию как функцию энергии системы, внешних параметров и релаксирующих степеней свободы ($\xi_i \to j_{0,i}$) [4]:

$$dS = \frac{dE_0}{T} - \frac{\mu}{T}d\rho - \frac{(\mathbf{u} - \mathbf{v}, d\mathbf{j}_0)}{T} - \frac{1}{2}\frac{h_{\alpha\beta}}{T}dg^{\alpha\beta}.$$

Именно в этом смысле следует понимать (4).

Дифференцируя первое соотношение из (3) по времени, с учетом (4) получим зависимость скорости изменения энергии от пространственных производных термодинамических величин:

$$\frac{\partial E}{\partial t} = \left(\mu + \frac{v^2}{2} - (\mathbf{u}, \mathbf{v})\right)\frac{\partial\rho}{\partial t} + T\frac{\partial S}{\partial t} + \left(\mathbf{j} - \rho\mathbf{u}, \frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t}\right) + \left(\mathbf{u}, \frac{\partial\mathbf{j}}{\partial t}\right) + \frac{1}{2}h_{\alpha\beta}\frac{\partial g^{\alpha\beta}}{\partial t}. \tag{5}$$

Последнюю производную можно выразить через локальный репер $\{\mathbf{e}^\alpha\}$, характеризующий деформированное состояние: $g^{\alpha\beta} = (\mathbf{e}^\alpha, \mathbf{e}^\beta)$, векторы которого удовлетворяют системе динамических уравнений [5]

$$\partial\mathbf{e}^\alpha/\partial t + \nabla(\mathbf{u}, \mathbf{e}^\alpha) = 0. \tag{6}$$

Заменив в (5) временные производные и собрав затем пространственные производные под знак дивергенции, приходим к закону сохранения энергии

$$\partial E/\partial t + \operatorname{div}\left([\mu + v^2/2 + ST/\rho]\mathbf{j} + \mathbf{u}(\mathbf{u}, \mathbf{j}_0) + h_{\alpha\beta}\mathbf{e}^\alpha(\mathbf{e}^\beta, \mathbf{u})\right) = 0,$$

определяя тем самым $\mathbf{Q}$. Одновременно находим $\mathbf{F} = (S/\rho)\mathbf{j}$, $\rho = \rho_1 + \rho_2$, $\alpha = -S/\rho$, $\Omega = T$, $\Pi_{ik} = \rho v_i v_k + j_{0,k} v_i + u_k j_{0,i} + p\delta_{ik} + h_{\alpha\beta} e_i^\alpha e_k^\beta$ как условия представления закона сохранения энергии в дивергентном виде. Процедура сворачивания пространственных производных под знак дивергенции достаточно подробно изложена в [3].

Давление задается стандартно: $p = -E_0 + TS + \mu\rho + (\mathbf{u} - \mathbf{v}, \mathbf{j}_0)$, что совместно с (4) позволяет выписать тождество Гиббса — Дюгема

(7) $$dp = \rho d\mu + SdT + \mathbf{j}_0 d(\mathbf{u} - \mathbf{v}) - (1/2) h_{\alpha\beta} dg^{\alpha\beta}.$$

В итоге с учетом (9) уравнение движения (2) принимает вид [6]

(8) $$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}, \nabla)\mathbf{v} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \frac{\rho_1}{2\rho}\nabla(\mathbf{u} - \mathbf{v})^2 - \frac{1}{2\rho} h_{\alpha\beta}\nabla g^{\alpha\beta}.$$

Уравнения (1), (6), (8) с найденными обратимыми потоками $\mathbf{j}$, Π_{ij}, $\mathbf{F}$ и заданным уравнением состояния $E_0 = E_0(\rho, S, j_0, g^{\alpha\beta})$ полностью описывают обратимую фильтрацию в рассматриваемой изотропной системе. Заметим, что нет необходимости добавлять к системе уравнений закон сохранения $\partial\rho_1/\partial t + \operatorname{div}(\rho_1 \mathbf{u}) = 0$, поскольку, если $\rho_1 \sim 1/\sqrt{g}$ ($g = \det(g_{\alpha\beta})$) согласно нелинейной теории упругости [1], «сохранение» твердого компонента является следствием системы (6). Парциальные плотности ρ_1 и ρ_2 при $\mathbf{j}_0 = 0$ легко связать с объемной долей x жидкого компонента (при $h_{\alpha\beta} = 0$):

$$\rho = \rho_1 + \rho_2 = \rho_1^f (1 - x) + \rho_2^f x,$$

где ρ_1^f, ρ_2^f — физические плотности компонентов. Кинетические поправки к ρ_1 и ρ_2, связанные с $\mathbf{j}_0 \neq 0$ в квадратичном приближении легко найти, используя тождество (7) и соотношение, вводящее объемную долю жидкого компонента, аналогично [3].

Система нелинейных гидродинамических уравнений (1), (6), (8) описывает в обратимом приближении фильтрацию для произвольных значений скоростей в упругодеформированном остове. Если опустить в (4) энергию упругих деформаций, т. е. сделать компоненты гидродинамически равноправными в системе (1), (6), (8), то пара уравнений: (8) и закон сохранения импульса из системы (1), заменяется эквивалентной системой

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}, \nabla)\mathbf{v} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \frac{\rho_1}{2\rho}\nabla(\mathbf{u} - \mathbf{v})^2,$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u}, \nabla)\mathbf{u} = -\frac{1}{\rho}\nabla p - \frac{\rho_2}{2\rho}\nabla(\mathbf{u} - \mathbf{v})^2.$$

Легко заметить наличие предельного перехода к односкоростному континууму при $\mathbf{u} \to \mathbf{v}$:

$$\partial\mathbf{v}/\partial t + (\mathbf{v}, \nabla)\mathbf{v} = -(1/\rho)\nabla p.$$

Как и следовало ожидать, когда движение компонент управляется гидродинамически равноправными уравнениями, осуществляется предельный переход $\mathbf{u} \to \mathbf{v}$ к уравнению Эйлера. Отметим проблематичность такого предельного перехода в уравнениях даже линейной теории фильтрации (см., например, [7, с. 240]).

Приведенные уравнения нелинейной теории фильтрации получены известными континуальными методами, широко применяющимися в двухскоростной гидродинамике сверхтекучего гелия [3]. Методология вывода уравнений движения отличается от методов осреднения (см., например, [8]) и носит, как нам представляется, более общий характер. В работах, связанных с методами осреднения, полагают

$$E = E_{0,1} + \rho_1 u^2/2 + E_{0,2} + \rho_2 v^2/2,$$

где $E_{0,1}$ и $E_{0,2}$ — внутренние энергии компонентов, не зависящие от $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$. Другими словами, из рассмотрения опускаются силы взаимодействия. В общем же случае нельзя выбрать такую систему отсчета, в которой можно было бы исключить относительное движение компонентов, значит, нельзя энергию всей системы разделить на внутреннюю и кинетическую. Разделяя же энергию на две части, опускаем из рассмотрения силы взаимодействия, которые в обратимом приближении сводятся к плотности реакции сил Д'Аламбера [9], что существенно отличает нашу теорию от соответствующих построений других авторов. Как следствие такого упрощения в уравнениях движения исчезают члены $\frac{\rho_1}{2\rho}\nabla(\mathbf{u}-\mathbf{v})^2$, $\frac{\rho_2}{2\rho}\nabla(\mathbf{u}-\mathbf{v})^2$ и возникают проблемы предельного перехода к односкоростному континууму (даже в линейном приближении). В то же время заметим, что дополнительные члены в уравнении движения квадратичны по скоростям наряду с членами $(\mathbf{v},\nabla)\mathbf{v}$ и $(\mathbf{u},\nabla)\mathbf{u}$. Поэтому их совместное присутствие в уравнениях движения принципиально. В этом существенное отличие полученной системы от системы линейных уравнений, приведенной, например, в [10]. Диссипативные силы, как будет показано ниже, получены в необратимом приближении согласно общим принципам термодинамики необратимых процессов. Их вид не требует каких-либо дополнительных предположений в отличие от работ по теории фильтрации, основанных на осреднении «микроскопических» уравнений движения.

Прежде чем перейти к описанию гидродинамической релаксации с продуцированием энтропии, уравнениям (6) придадим в обратимом случае эквивалентный вид, который позволяет провести обобщение их на случай необратимого движения. Согласно (6), $\operatorname{rot}\mathbf{e}^\alpha=0$ или $\partial_i e_k^\alpha-\partial_k e_i^\alpha=0$. Последнее соотношение удобно «свернуть» со скоростью $\mathbf{u}$ и сложить с (6). В итоге приходим к уравнению, эквивалентному в обратимом приближении (6):

$$\partial e_i^\alpha/\partial t+\partial_i\left(u_k e_k^\alpha\right)=K_{ik}^\alpha u_k$$

$\left(K_{ik}^\alpha=\partial_i e_k^\alpha-\partial_k e_i^\alpha\right)$. В общем случае необратимое приближение нельзя совместить с требованием $\operatorname{rot}\mathbf{e}^\alpha=0$.

Необратимую гидродинамическую релаксацию можно описать, добавляя к обратимым потокам соответствующие необратимые части и введя необходимые источники, вид которых в дальнейшем будет определен:

$$\partial e_i^\alpha/\partial t+\partial_i\left(u_k e_k^\alpha+\varphi_k e_k^\alpha\right)=\psi_{ik}e_k^\alpha+K_{ik}^\alpha(u_k+\chi_k); \tag{9}$$

$$\partial j_i/\partial t+\partial_k\left(\Pi_{ik}+\pi_{ik}^{(u)}+\pi_{ik}^{(v)}\right)=0; \tag{10}$$

$$\frac{\partial S}{\partial t}+\operatorname{div}\left(S\frac{\mathbf{j}}{\rho}+\frac{\mathbf{q}}{T}\right)=\frac{R}{T}; \tag{11}$$

$$\partial\rho/\partial t+\operatorname{div}\mathbf{j}=0; \tag{12}$$

$$\partial\mathbf{v}/\partial t+(\mathbf{v},\nabla)\mathbf{v}=-\nabla(\mu+h)-(S/\rho)\nabla T+\mathbf{f}; \tag{13}$$

$$\partial E/\partial t+\operatorname{div}(\mathbf{Q}+\mathbf{W})=0. \tag{14}$$

Здесь $\boldsymbol{\varphi}$, $\boldsymbol{\chi}$, $\mathbf{q}/T$, $\mathbf{W}$ — необратимые векторные потоки; ψ_{ik}, $\pi_{ik}^{(u,v)}$ — необратимые тензорные потоки; h — скалярный поток; $\mathbf{f}$ — сила межкомпонентного трения; R — диссипативная функция.

Отметим, что уравнение (9) уже не имеет решения вида $e_i^\alpha=\partial_i F^\alpha$. Решения уравнений (9) посредством соотношения $g^{\alpha\beta}=(\mathbf{e}^\alpha,\mathbf{e}^\beta)$ формируют тензор эффективной упругой деформации [1]. Закон сохранения энергии (14) должен тождественно следовать из системы (9)—(13). В результате все необратимые потоки должны однозначно находиться. Для этого необходимо повторить изложенный выше алгоритм согласования системы уравнений. На этапе выделения обратимых потоков приходим к

$$\frac{\partial E}{\partial t}+\operatorname{div}\left(\left[\mu+\frac{v^2}{2}+\frac{ST}{\rho}\right]\mathbf{j}+\mathbf{u}(\mathbf{u},\mathbf{j}_0)+h_{\alpha\beta}\mathbf{e}^\alpha(\mathbf{e}^\beta,\mathbf{u})\right)=R- \tag{15}$$

$$- T\,\mathrm{div}\left(\frac{\mathbf{q}}{T}\right) - u_i\partial_k\left(\pi_{ik}^{(u)} + \pi_{ik}^{(v)}\right) + (\mathbf{j} - \rho\mathbf{u})\,(\mathbf{f} - \nabla h) +$$
$$+ \frac{1}{2}\,h_{\alpha\beta}\left(\frac{\partial g^{\alpha\beta}}{\partial t} + (\mathbf{u}, \nabla)\,g^{\alpha\beta}\right) + h_{\alpha\beta}e_i^{\alpha}e_k^{\beta}\partial_k u_i.$$

Последнюю конструкцию из двух членов в (15) можно вычислить, используя определение метрического тензора и (9):

$$\frac{1}{2}\,h_{\alpha\beta}\,\frac{\partial g^{\alpha\beta}}{\partial t} + \frac{1}{2}\,h_{\alpha\beta}\,(\mathbf{u}, \nabla)\,g^{\alpha\beta} = h_{\alpha\beta}e_i^{\alpha}e_k^{\beta}(\psi_{ik} - \partial_i u_k - \partial_i\varphi_k) + \chi_k h_{\alpha\beta}e_i^{\alpha}K_{ik}^{\beta} -$$
$$- \varphi_k h_{\alpha\beta}e_i^{\alpha}\partial_i e_k^{\beta}.$$

Примем $g = \det\,(g_{\alpha\beta})$, тогда $1/\sqrt{g}$ удобно связать с парциальной плотностью $\rho_1 \sim 1/\sqrt{g}$ упруговязкого континуума [1]. Поскольку $dg = -g\,g_{\alpha\beta}dg^{\alpha\beta}$, то

$$\partial\rho_1/\partial t + \mathrm{div}\,(\rho_1(\mathbf{u} + \boldsymbol{\varphi})) = \rho_1(\delta_{ik} -$$
$$- (e_{\alpha})_i(e^{\alpha})_k)(\partial_i\varphi_k + \partial_i u_k) + L_{ik}(e_{\alpha})_i(e^{\alpha})_k.$$

Здесь тензор L_{ik} определяется выражением

$$L_{ik}e_k^{\alpha} = \psi_{ik}e_k^{\alpha} + K_{ik}^{\alpha}\,(\chi_k - \varphi_k).$$

Приведенные соотношения преобразуют правую часть уравнений (15):

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \mathrm{div}\,\mathbf{Q} = R - T\,\mathrm{div}\left(\frac{\mathbf{q}}{T}\right) - u_i\partial_k\pi_{ik}^{(u)} - v_i\partial_k\pi_{ik}^{(v)} +$$
$$+ \left(f_i + \frac{1}{\rho_2}\,\partial_k\pi_{ik}^{(v)}\right)(j_i - \rho u_i) - (j_i - \rho u_i)\,\partial_i h - \partial_i\left(h_{\alpha\beta}e_i^{\alpha}e_k^{\beta}\,\varphi_k\right) + h_{\alpha\beta}e_i^{\alpha}e_k^{\beta}L_{ik} +$$
$$+ \varphi_i\left(e_i^{\beta}\partial_k\left(h_{\alpha\beta}e_k^{\alpha}\right) + h_{\alpha\beta}e_k^{\beta}K_{ik}^{\alpha}\right).$$

Принимая во внимание два условия (в пределе $\mathbf{u} \to \mathbf{v}$ и при $g^{\alpha\beta} = 0$ теория должна приводить к уравнениям Навье — Стокса; феноменологический учет релаксации касательных напряжений должен приводить к нелинейному обобщению максвелловской релаксационной модели), получаем выражение для необратимой части потока энергии

$$\partial E/\partial t + \mathrm{div}\left(\mathbf{Q} + \mathbf{q} + h\,(\mathbf{j} - \rho\mathbf{u}) + \pi_{ik}^{(u)}u_k + \pi_{ik}^{(v)}v_k + h_{\alpha\beta}e_i^{\alpha}e_k^{\beta}\varphi_k\right) = 0.$$

Диссипативная функция при этих условиях приобретает вид

$$- R = \frac{q_k}{T}\,\partial_k T + \left(f_i + \frac{1}{\rho_2}\,\partial_k\pi_{ik}^{(v)}\right)(j_i - \rho u_i) + \varphi_i\left(e_i^{\beta}\partial_k\left(h_{\alpha\beta}e_k^{\alpha}\right) + h_{\alpha\beta}e_k^{\beta}K_{ik}^{\alpha}\right) +$$
$$+ h_{\alpha\beta}e_i^{\alpha}e_k^{\beta}L_{ik} + \pi_{ik}^{(u)}\partial_k u_i + \pi_{ik}^{(v)}\partial_k v_i + h\,\mathrm{div}\,(\mathbf{j} - \rho\mathbf{u}).$$

В потоках L_{ik}, $\pi_{ik}^{(u)}$, $\pi_{ik}^{(v)}$ удобно выделить диагональные части

$$\pi_{ik}^{(u)} = A_{ik} + a\delta_{ik},\ \pi_{ik}^{(v)} = B_{ik} + b\delta_{ik},\ L_{ik} = L_{ik}^{*} + L\delta_{ik}.$$

Введенные обозначения приводят к выражению

$$- R = \frac{q_k}{T}\,\partial_k T + \left(f_i + \frac{1}{\rho_2}\,\partial_k\pi_{ik}^{(v)}\right)(j_i - \rho u_i) + \varphi_i\left(e_i^{\beta}\partial_k\left(h_{\alpha\beta}e_k^{\alpha}\right) + h_{\alpha\beta}e_k^{\beta}K_{ik}^{\alpha}\right) +$$
$$+ a\,\mathrm{div}\,\mathbf{u} + b\,\mathrm{div}\,\mathbf{v} + h\,\mathrm{div}\,(\mathbf{j} - \rho\mathbf{u}) + 3Lh_{\nu}^{\nu} + \frac{1}{2}A_{ik}\left(\partial_k u_i + \partial_i u_k - \frac{2}{3}\,\delta_{ik}\,\mathrm{div}\,\mathbf{u}\right) +$$
$$+ \frac{1}{2}\,B_{ik}\left(\partial_k v_i + \partial_i v_k - \frac{2}{3}\delta_{ik}\,\mathrm{div}\,\mathbf{v}\right) + L_{ik}^{*}\,\left(e_i^{\alpha}e_k^{\beta}H_{\alpha\beta}\right).$$

Здесь $h_{\alpha\beta} = H_{\alpha\beta} + g_{\alpha\beta}h_{\nu}^{\nu}$. Для скалярных потоков и сил имеем линейные термодинамические соотношения

$$- a = \zeta_{11}\,\mathrm{div}\,\mathbf{u} + \zeta_{12}\,\mathrm{div}\,\mathbf{v} + \zeta_{13}\,\mathrm{div}\,(\mathbf{j} - \rho\mathbf{u}) + \zeta_{14}h_{\nu}^{\nu},$$

$$-b = \zeta_{21}\,\mathrm{div}\,\mathbf{u} + \zeta_{22}\,\mathrm{div}\,\mathbf{v} + \zeta_{23}\,\mathrm{div}\,(\mathbf{j} - \rho\mathbf{u}) + \zeta_{24}h^{\nu}_{\nu},$$

$$-h = \zeta_{31}\,\mathrm{div}\,\mathbf{u} + \zeta_{32}\,\mathrm{div}\,\mathbf{v} + \zeta_{33}\,\mathrm{div}\,(\mathbf{j} - \rho\mathbf{u}) + \zeta_{34}h^{\nu}_{\nu},$$

$$-L = \zeta_{41}\,\mathrm{div}\,\mathbf{u} + \zeta_{42}\,\mathrm{div}\,\mathbf{v} + \zeta_{43}\,\mathrm{div}\,(\mathbf{j} - \rho\mathbf{u}) + \zeta_{44}h^{\nu}_{\nu}.$$

Чтобы раскрыть физический смысл потока L, вычислим $(e_\alpha)_i e^\alpha_k$. Предварительно покажем, что объект e^α_i можно выбрать таким образом, чтобы выполнялось $(e_\alpha)_i e^\alpha_k = \delta_{ik}$. Пусть $R_{ik} = g_{\alpha\beta} e^\alpha_i e^\beta_k$. Дифференцируя R_{ik} по времени, получаем

$$\frac{\partial R_{ik}}{\partial t} = (e_\alpha)_i (e_\beta)_k \frac{\partial g^{\alpha\beta}}{\partial t} + (e_\alpha)_k \frac{\partial e^\alpha_i}{\partial t} + (e_\alpha)_i \frac{\partial e^\alpha_k}{\partial t}.$$

Использование уравнений на соответствующие производные дает

$$\partial R_{ik}/\partial t = (R_{k\nu}L_{i\nu} + R_{i\nu}L_{k\nu} - 2R_{i\nu}R_{k\mu}L_{\nu\mu}) + (R_{i\nu}R_{k\mu} + R_{i\mu}R_{k\nu} - R_{k\mu}\delta_{i\nu} -$$
$$- R_{i\mu}\delta_{k\nu})(\partial_\nu u_\mu + \partial_\nu \varphi_\mu) + (u_\nu + \varphi_\nu)\big((e_\alpha)_k\, \partial_\nu e^\alpha_\mu (R_{i\mu} - \delta_{i\mu}) +$$
$$+ (e_\alpha)_i\, \partial_\nu e^\alpha_\mu (R_{k\mu} - \delta_{k\mu})\big).$$

Полученное уравнение для произвольного момента временипм еет решение

$$R_{ik} = (e_\alpha)_i e^\alpha_k = \delta_{ik}. \tag{16}$$

Необходимо потребовать, чтобы условие (16) выполнялось в начальный момент времени. Это несложно сделать, если предположить, что начальное деформированное состояние среды создавалось путем непрерывной деформации метрики в евклидовом пространстве. Следует заметить, что при наличии потоков φ_i, ψ_{ik} метрика $g^{\alpha\beta}$, вообще говоря, неевклидова. Выбор $R_{ik} = \delta_{ik}$ приводит к уравнению непрерывности $\partial\rho_1/\partial t + \mathrm{div}\,(\rho_1(\mathbf{u} + \boldsymbol{\varphi})) = 3\rho_1 L$. Таким образом, скалярный поток L описывает поведение так называемых некомпактных тел [1], необратимая деформация которых приводит к исчезновению пустот, содержащихся в них изначально. Для компактных тел необходимо положить $\zeta_{14} = \zeta_{24} = \zeta_{34} = \zeta_{44} = 0$. Для векторных потоков и сил имеем соотношения линейной термодинамики необратимых процессов

$$-\psi_i = \alpha_{11}(1/T)\,\partial_i T + \alpha_{12}(j_i - \rho u_i) + \alpha_{13}\big(e^\beta_i \partial_k \big(h_{\alpha\beta} e^\alpha_k\big) + h_{\alpha\beta} e^\beta_k K^\alpha_{ik}\big),$$

$$-f_i = \frac{1}{\rho_2}\,\partial_k \pi^{(\sigma)}_{ik} + \alpha_{21}\frac{1}{T}\,\partial_i T + \alpha_{22}(j_i - \rho u_i) + \alpha_{23}\big(e^\beta_i \partial_k \big(h_{\alpha\beta} e^\alpha_k\big) + h_{\alpha\beta} e^\beta_k K^\alpha_{ik}\big),$$

$$-\varphi_i = \alpha_{31}(1/T)\,\partial_i T + \alpha_{32}(j_i - \rho u_i) + \alpha_{33}\big(e^\beta_i \partial_k \big(h_{\alpha\beta} e^\alpha_k\big) + h_{\alpha\beta} e^\beta_k K^\alpha_{ik}\big).$$

При отсутствии необратимого потока φ_i необходимо принять $\alpha_{3i} = 0$. Наконец, тензорные потоки A_{ik}, B_{ik}, L_{ik}, характеризующие необратимую деформацию, выражаются через соответствующие им термодинамические силы:

$$-A_{ik} = \eta_{11}(\partial_k u_i + \partial_i u_k - (2/3)\,\delta_{ik}\,\mathrm{div}\,\mathbf{u}) + \eta_{12}(\partial_k v_i + \partial_i v_k -$$
$$- (2/3)\,\delta_{ik}\,\mathrm{div}\,\mathbf{v}) + \eta_{13} e^\alpha_i e^\beta_k H_{\alpha\beta},$$

$$-B_{ik} = \eta_{21}(\partial_k u_i + \partial_i u_k - (2/3)\,\delta_{ik}\,\mathrm{div}\,\mathbf{u}) + \eta_{22}(\partial_k v_i + \partial_i v_k -$$
$$- (2/3)\,\delta_{ik}\,\mathrm{div}\,\mathbf{v}) + \eta_{23} e^\alpha_i e^\beta_k H_{\alpha\beta},$$

$$-L^*_{ik} = \eta_{31}(\partial_k u_i + \partial_i u_k - (2/3)\,\delta_{ik}\,\mathrm{div}\,\mathbf{u}) + \eta_{32}(\partial_k v_i + \partial_i v_k -$$
$$- (2/3)\,\delta_{ik}\,\mathrm{div}\,\mathbf{v}) + \eta_{33} e^\alpha_i e^\beta_k H_{\alpha\beta}.$$

Таким образом, приходим к уравнениям движения

(17)

$$\partial j_i/\partial t + \partial_k(\rho_1 u_i u_k + \rho_2 v_i v_k + p\delta_{ik} + h_{\alpha\beta} e^\alpha_i e^\beta_k + A_{ik} + B_{ik} + a\delta_{ik} + b\delta_{ik}) = 0,$$

$$\partial S/\partial t + \mathrm{div}\,(S\mathbf{j}/\rho + \mathbf{q}/T) = R/T,\ \partial\rho/\partial t + \mathrm{div}\,\mathbf{j} = 0,$$

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + (\mathbf{v}, \nabla) v_i = -\frac{1}{\rho}\partial_i p + \frac{\rho_1}{2\rho}\partial_i (\mathbf{u}-\mathbf{v})^2 - \frac{1}{2\rho} h_{\alpha\beta}\partial_i g^{\alpha\beta} - \partial_i h -$$

$$-\frac{1}{\rho_2}\partial_k (B_{ik} + b\delta_{ik}) - \alpha_{21}\frac{1}{T}\partial_i T - \alpha_{22}(j_i - \rho u_i) -$$

$$-\alpha_{23}\left(e_i^\beta \partial_k \left(h_{\alpha\beta} e_k^\alpha\right) + h_{\alpha\beta} e_k^\beta K_{ik}^\alpha\right),$$

$$\partial e_i^\alpha / \partial t + \partial_i \left(u_k e_k^\alpha + \varphi_k e_k^\alpha\right) = L_{ik}^* e_k^\alpha + K_{ik}^\alpha (u_k + \varphi_k) + L e_i^\alpha,$$

которые с учетом уравнения состояния $E_0 = E_0(\rho, S, \mathbf{j}_0, g^{\alpha\beta})$ представляют замкнутую систему, описывающую процесс фильтрации вязкой жидкости сквозь упруговязкую среду. Следуя методу [11], несложно получить линейный вариант релаксационной модели. Построенная феноменологическим путем модель описывает релаксацию касательных напряжений в остове, сквозь который происходит фильтрация ньютоновской жидкости. Теория основана на общефизических принципах, при этом в отличие от широко распространенного подхода [2] не применяется соотношение Дарси. Это дает возможность последовательно учесть нелинейные эффекты теории фильтрации для произвольных значений гидродинамических скоростей.

Используемый подход позволил вскрыть феноменологическую природу соотношения Дарси, которое в свою очередь вытекает из системы (17), если опустить инерционные нелинейные по скоростям члены, а также все кинетические коэффициенты, кроме α_{22}. Приходим к системе уравнений

$$\partial_k \left(p\delta_{ik} + h_{\alpha\beta} e_i^\alpha e_k^\beta\right) = 0,$$

$$\frac{1}{\rho}\partial_i p + \frac{1}{2\rho} h_{\alpha\beta}\partial_i g^{\alpha\beta} + \alpha v_i = 0, \ \mathrm{div}(\rho_2 \mathbf{v}) = 0,$$

описывающей взаимодействие поля v с полем напряжений $h_{\alpha\beta}$ при отсутствии движения твердого компонента. Заметим, что развитый подход легко обобщается на случай, когда фильтрующаяся жидкость проявляет свойства максвелловского тела. Тогда при описании жидкой фазы необходимо следовать подходу, принятому в работе для описания упруговязкого остова. Получить исходные уравнения не представляет труда, применяя настоящий подход. Исследование фильтрационных систем, в которых сама фильтрующаяся жидкость проявляет свойства, отличные от ньютоновских жидкостей, приобретает в нефтяной технологии в настоящее время определяющее значение [12]. Развитый подход становится интересным для этого класса задач, поскольку в нем не используется соотношение Дарси.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Годунов С. К.** Элементы механики сплошных сред.— М.: Наука, 1978.
2. **Баренблатт Г. И., Ентов В. М., Рыжик В. М.** Теория нестационарной фильтрации жидкости и газа.— М.: Недра, 1972.
3. **Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.** Гидродинамика.— М.: Наука, 1988.
4. **Леонтович М. А.** Введение в термодинамику. Статистическая физика.— М.: Наука, 1986.
5. **Андреев А. Ф., Каган М. Ю.** Гидродинамика вращающейся сверхтекучей жидкости // ЖЭТФ.— 1984.— Т. 86, вып. 2.
6. **Доровский В. Н.** Континуальная теория фильтрации // Геология и геофизика.— 1989.— № 7.
7. **Нигматулин Р. И.** Основы механики гетерогенных сред.— М.: Наука, 1978.
8. **Нигматулин Р. И.** Динамика многофазных сред.— М.: Наука, 1987.— Ч. 1, 2.
9. **Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.** Механика.— М.: Наука, 1989.
10. **Paul H. Roberts, David E.** Loper dynamical processes in slurries // Structure and Dynamics of Partially Solidified Systems.— Boston, 1987.—(NATO ASI Ser. E; № 125).
11. **Доровский В. Н., Перенечко Ю. В.** Реология фильтрационных систем // Теоремы вложения и их приложения к задачам математической физики.— Новосибирск: Ин-т математики СО АН СССР, 1989.

12. **Левашкевич В. Г.** Нелинейные эффекты при фильтрации жидкости в пористой среде.— Минск: Наука и техника, 1987.

г. Новосибирск *Поступила 12/VII 1990 г., в окончательном варианте — 22/III 1991 г.*

УДК 593.3—548.51

В. А. Мисюра

К ВОПРОСУ О РАВНОВЕСНОЙ ФОРМЕ КРИСТАЛЛА

Принцип Гиббса — Кюри [1, 2] утверждает, что внешняя равновесная форма кристалла доставляет минимум его поверхностной энергии при заданном объеме. При этом неявно предполагается, что основной механизм переноса массы при формировании равновесной огранки кристалла — диффузия вещества и вакансий внутри кристалла; тем самым исключается более распространенный механизм переноса массы, связанный с обменом вещества между кристаллом и внешней средой. Именно последний механизм является определяющим почти во всех современных технологиях выращивания кристаллов из растворов и расплавов. По этой причине представляется естественным взглянуть на проблему равновесной огранки с несколько иных позиций, изучив задачу о термодинамическом равновесии кристалла со своим расплавом или насыщенным раствором.

Ниже рассмотрена краевая задача, описывающая термодинамическое равновесие анизотропного упругого тела, помещенного в свой расплав. Показано, что она не всегда имеет решение. Существование решения такой задачи связано с геометрией раздела фаз, а для кристалла, помещенного в свой расплав,— с его внешней формой. Последнее обстоятельство наводит на мысль, что если в термодинамической системе анизотропное упругое тело — расплав можно пренебречь поверхностной энергией раздела фаз, то равновесную форму кристалла можно определить как такую, при которой решение соответствующей задачи о термодинамическом равновесии существует. Получены некоторые необходимые условия существования решения изучаемой задачи, которые можно считать ограничениями на равновесную форму огранки кристалла. Найденный результат показывает, что за равновесную огранку кристалла отвечает не только свободная поверхностная энергия. Есть и другие механизмы, связанные с условиями существования термодинамического равновесия кристалла со своим расплавом, упругими свойствами кристалла и анизотропией этих свойств.

1. Первый принцип Гиббса гласит, что в состоянии термодинамического равновесия изолированной системы ее энтропия S достигает максимума на всех возможных состояниях системы с заданным уровнем энергии, а второй, что в состоянии равновесия изолированной системы ее энергия ε достигает минимума на всех возможных состояниях системы с заданным уровнем энтропии. Гиббс рассматривал их как основные исходные утверждения равновесной термодинамики. Общепризнанным это стало лишь в последнее время, когда всю статистическую теорию термодинамического равновесия удалось изложить, исходя из них.

Принципы Гиббса обладают большой общностью. В них варьированию подвергаются, по существу, все параметры, которые могут изменяться в изучаемых процессах. Справедливы они и в том случае, когда рассматривается равновесие двух веществ, на поверхности раздела которых может происходить превращение одного вещества в другое (фазовый переход). При этом варьируется поверхность раздела и массы этих веществ.

Пусть V — область в R^3, которая разделена на две части (V_1 и V_2) поверхностью Ω. Две фазы некоторого вещества находятся в областях V_1 и V_2. Твердую фазу будем моделировать упругим телом с плотностью внутренней энергии U_1, зависящей от дисторсии x^i_a и энтропии s $\left(x^i_a =\right.$