

# УСТОЙЧИВОСТЬ ВОЛНЫ ГОРЕНИЯ В ВЯЗКОУПРУГОЙ СРЕДЕ К МАЛЫМ ОДНОМЕРНЫМ ВОЗМУЩЕНИЯМ

А. Г. Князева, С. Н. Сорокова

Институт физики прочности и материаловедения СО РАН, 634021 Томск, anna@ms.tsc.ru,  
s\_sorokova@mail.ru

Сформулирована задача об устойчивости фронта превращения в вязкоупругой среде. Исследование устойчивости проведено методом малых возмущений. Найдены нелинейные уравнения для декрементов затухания и комплексной частоты. Проанализированы различные частные случаи. Показано существенное влияние времени релаксации вязких напряжений на верхний и нижний пределы устойчивого горения, как для низкоскоростного, так и для высокоскоростного режимов.

Ключевые слова: волна горения, устойчивость, метод малых возмущений, время релаксации вязких напряжений.

## ВВЕДЕНИЕ

При изучении возможных режимов химического превращения как в газах и жидкостях, так и в смесях твердых веществ возникает проблема исследования их устойчивости. Одним из методов, пригодных для этой цели, является метод малых возмущений, позволяющий проанализировать условие существования устойчивых стационарных режимов в приближении узкой зоны химической реакции [1–3]. В частности, для простейшей модели твердофазного горения условие устойчивости стационарного фронта к одномерным возмущениям имеет вид

$$z_1 < z_1^* = 2 + \sqrt{5}, \quad (1)$$

где  $z_1 = \frac{1}{V_n^0} \left( \frac{\partial V_n}{\partial T} \right)_0 (T_b - T_0)$  — коэффициент чувствительности скорости фронта  $V_n$  к температуре;  $V_n^0$  — скорость стационарной волны горения; производная  $\left( \frac{\partial V_n}{\partial T} \right)_0$  вычислена при начальной температуре  $T_0$ ;  $T_b$  — температура горения.

В связанных моделях твердофазного горения задача исследования устойчивости усложняется в силу существования принципиально различных режимов превращения и возможной зависимости скорости реакции от работы механических напряжений [4–6]. Учет реологических свойств материалов вносит дополнительные особенности в формулировку и исследование задач устойчивости. Так, в рамках

вязкоупругой модели Максвелла условие существования стационарных режимов превращения зависит от соотношений нескольких характерных времен — характерного времени реакции, характерного времени прогрева, времени релаксации вязких напряжений, характерного времени распространения продольных упругих волн [7, 8].

Целью настоящей работы является исследование устойчивости стационарных режимов превращения в вязкоупругой среде.

Работа имеет приложение к изучению металлотермических превращений, которые могут протекать в различных режимах и сопровождаются появлением напряжений и деформаций различных типов.

## 1. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В системе координат, связанной с фронтом превращения, движущимся влево со скоростью  $V_n$ , в приближении малых деформаций и узкой зоны химических реакций математическая постановка задачи следует из [7, 8] и включает: уравнение теплопроводности

$$c_\varepsilon \rho \left[ \frac{\partial T}{\partial t} + V_n \frac{\partial T}{\partial x} \right] = \lambda_T \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - 3K \alpha_T T \left[ \frac{\partial \varepsilon_{11}}{\partial t} + V_n \frac{\partial \varepsilon_{11}}{\partial x} \right], \quad (2)$$

уравнение движения

$$\frac{\partial^2 \sigma_{11}}{\partial x^2} = \rho \left[ \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2V_n \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} + V_n^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right]$$

или

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 03-01-00074).

$$\frac{\partial^2 \sigma_{11}}{\partial x^2} = \rho \left[ \frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial t^2} + 2V_n \frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial t \partial x} + V_n^2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x^2} \right], \quad (3)$$

условия на границе раздела реагента и продукта

$$T|_{0+} = T|_{0-}, \quad \frac{\partial T}{\partial x}|_{0-} = \frac{\partial T}{\partial x}|_{0+} + \frac{Q_0 V_n}{\lambda_T}, \quad (4)$$

$$\sigma_{11}|_{0+} = \sigma_{11}|_{0-}, \quad u|_{0+} = u|_{0-}. \quad (5)$$

В реагентах

$$T = T_0, \quad u = \varepsilon_{11} = 0,$$

т. е. возмущений нет, и система находится в начальном (невозмущенном) состоянии; в продуктах реакции все возмущения затухают или конечны:  $\frac{\partial T}{\partial x} = 0, \frac{\partial \varepsilon_{11}}{\partial x} = 0$ .

В простейшем случае полагаем, что теплофизические свойства явно не зависят от температуры и степени превращения. Уравнения (2), (3) справедливы слева и справа от фронта горения. Условия (4) означают, что во фронте реакции температура непрерывна, а разрыв в потоке тепла связан с тепловыделением в ходе превращения; при записи уравнения движения через деформации вместо первого условия (5) используется эквивалентное ему условие непрерывности деформаций; второе условие находится специальным образом, что будет показано далее.

В общем случае скорость реакции может зависеть как от температуры, так и от работы напряжений, сопровождающих химическое превращение. В настоящей работе, как и в [7], из всевозможных внутренних напряжений рассматриваем только термические, считая их преобладающими над остальными. Внешних механических воздействий нет. Полагаем, что каким-либо способом, происходит иницирование реакции, затем реакция выходит на стационарный режим и фронт удаляется от внешней границы. Отметим, что постоянное внешнее механическое нагружение будет действовать на фронт превращения по тем же каналам, что и внутренние напряжения (напряжения, сопровождающие реакцию), т. е. через изменение термодинамических параметров.

В случае плоского реакционного фронта, которому соответствует формулировка задачи (2)–(5), имеем  $\varepsilon_{22} = \varepsilon_{33} = \varepsilon_{23} = \varepsilon_{13} = \varepsilon_{21} = 0, \sigma_{13} = \sigma_{23} = \sigma_{12} = 0$ . Оставшиеся компоненты тензора напряжений отличны от нуля и удовлетворяют следующим соотношениям:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial t} + V_n \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x} + \frac{\mu}{\varkappa} \sigma_{11} = \\ = (\lambda + 2\mu) \left[ \frac{\partial \varepsilon_{11}}{\partial t} + V_n \frac{\partial \varepsilon_{11}}{\partial x} \right] - \\ - 3K\alpha_T \left[ \frac{\partial T}{\partial t} + V_n \frac{\partial T}{\partial x} \right] + \frac{\mu}{\varkappa} K [\varepsilon_{11} - 3\alpha_T (T - T_0)], \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial t} + V_n \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x} + \frac{\mu}{\varkappa} \sigma_{22} = \lambda \left[ \frac{\partial \varepsilon_{11}}{\partial t} + V_n \frac{\partial \varepsilon_{11}}{\partial x} \right] - \\ - 3K\alpha_T \left[ \frac{\partial T}{\partial t} + V_n \frac{\partial T}{\partial x} \right] + \frac{\mu}{\varkappa} K [\varepsilon_{11} - 3\alpha_T (T - T_0)], \end{aligned}$$

$$\sigma_{33} = \sigma_{22}.$$

В начальный момент времени условия такие же, как в реагентах на бесконечном удалении от зоны реакции.

В (2)–(6) приняты следующие обозначения:  $\rho$  — плотность;  $T$  — температура;  $x$  — пространственная координата;  $t$  — время;  $c_\varepsilon, \rho, \lambda_T$  — удельная теплоемкость, плотность и теплопроводность соответственно;  $\alpha_T$  — линейный коэффициент теплового расширения;  $\varepsilon_{11} = \varepsilon = \partial u / \partial x$  — компонента тензора деформаций;  $\sigma_{11}$  — компонента тензора напряжений;  $u$  — компонента вектора перемещений в направлении распространения фронта;  $K = \lambda + 2\mu/3$  — изотермический модуль всестороннего сжатия;  $\varkappa$  — коэффициент сдвиговой вязкости;  $\lambda, \mu$  — коэффициенты Ламэ ( $\mu$  соответствует модулю сдвига в теории упругости);  $Q_0$  — суммарное тепловыделение (поглощение тепла) в ходе химической реакции.

В задаче требуется найти стационарное решение и исследовать его устойчивость к малым возмущениям.

## 2. БЕЗРАЗМЕРНЫЕ ПЕРЕМЕННЫЕ

В безразмерных переменных

$$\theta = \frac{T - T_0}{T_* - T_0}, \quad \xi = \frac{V_n x}{\varkappa T}, \quad \tau = \frac{V_n^2 t}{\varkappa T},$$

$$s = \frac{\sigma_{11}}{\sigma_*}, \quad e = \frac{\varepsilon_{11}}{\varepsilon_*},$$

где  $T_*$  — характерная для задачи температура,  $\varkappa T = \lambda_T / c_\varepsilon \rho$ ,  $\sigma_* = 3K\alpha_T (T_* - T_0)$ ,  $\varepsilon_* = \sigma_* / (2\mu + \lambda)$ , уравнение (2), второе уравнение (3) и первое уравнение (6) принимают вид:

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} + \frac{\partial \theta}{\partial \xi} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial \xi^2} - \omega(\theta + \sigma) \left( \frac{\partial e}{\partial \tau} + \frac{\partial e}{\partial \xi} \right), \quad (7)$$

$$\frac{\partial^2 s}{\partial \xi^2} = \alpha^2 \left[ \frac{\partial^2 e}{\partial \tau^2} + 2 \frac{\partial^2 e}{\partial \tau \partial \xi} + \frac{\partial^2 e}{\partial \xi^2} \right], \quad (8)$$

$$\frac{\partial s}{\partial \tau} + \frac{\partial s}{\partial \xi} + \tau_V s = \frac{\partial e}{\partial \tau} + \frac{\partial e}{\partial \xi} - \left( \frac{\partial \theta}{\partial \tau} + \frac{\partial \theta}{\partial \xi} \right) + \tau_V (h^2 e - \theta), \quad (9)$$

где  $\sigma = \frac{T_0}{T_* - T_0}$ ;  $\omega = \frac{(3\alpha_T K)^2 (T_* - T_0)}{c_\varepsilon \rho (2\mu + \lambda)}$  — коэффициент связанности полей деформации и температуры;  $\alpha^2 = (V_n/c_l)^2$  — отношение скорости фронта к продольной скорости звука,  $c_l = \sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho}$ ;  $h^2 = c_v/c_l$  — отношение объемной ( $c_v = \sqrt{K/\rho}$ ) и продольной скоростей звука;  $\tau_V = \varkappa V_n^2 / \mu \varkappa_T$  — квадрат отношения характерного времени распространения фронта реакции  $V_n^2 / \varkappa_T$  к времени релаксации вязких напряжений  $\varkappa / \mu$ .

При  $\tau_V = 0$  из уравнения (9) получаем

$$\frac{\partial s}{\partial \tau} + \frac{\partial s}{\partial \xi} = \frac{\partial e}{\partial \xi} + \frac{\partial e}{\partial \tau} - \left( \frac{\partial \theta}{\partial \tau} + \frac{\partial \theta}{\partial \xi} \right).$$

При  $\tau_V \rightarrow \infty$  имеем

$$s = h^2 e - \theta.$$

Тогда, делая замену  $e' = h^2 e$ , находим  $s = e' + \theta$ . Следовательно, в этих двух предельных случаях можно использовать решение упругой задачи [4, 9, 10].

Граничные условия в безразмерных переменных записываются следующим образом:

$$\theta|_{0-} = \theta|_{0+}, \quad \frac{\partial \theta}{\partial \xi}|_{0-} = \frac{\partial \theta}{\partial \xi}|_{0+} + \Delta \frac{V_n}{V_n^0}, \quad (10)$$

$$e|_{0-} = e|_{0+}, \quad (11)$$

где  $\Delta = Q/c_\varepsilon \rho (T_* - T_0)$ ;  $V_n^0$  — стационарная скорость фронта в невозмущенной задаче.

В реагентах

$$\xi \rightarrow -\infty: \quad \theta = 0, \quad e = 0, \quad (12)$$

в продуктах

$$\xi \rightarrow +\infty: \quad \frac{\partial \theta}{\partial \xi} = 0, \quad \frac{\partial e}{\partial \xi} = 0.$$

Для дальнейшего исследования линеаризуем уравнение теплопроводности (7) при температуре продуктов  $\theta_b$ :

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} + \frac{\partial \theta}{\partial \xi} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial \xi^2} - \omega(\theta_b + \sigma) \left( \frac{\partial e}{\partial \tau} + \frac{\partial e}{\partial \xi} \right). \quad (13)$$

Температура  $\theta_b$  находится из решения стационарной задачи.

### 3. СТАЦИОНАРНАЯ ЗАДАЧА

Приравнивая нулю все производные по времени в (8), (9) и полагая  $V_n = V_n^0$ , приходим к стационарной системе уравнений:

$$\frac{d\theta}{d\xi} = \frac{d^2 \theta}{d\xi^2} - \omega(\theta_b + \sigma) \frac{de}{d\xi}, \quad (14)$$

$$\frac{ds}{d\xi} = \alpha^2 \frac{de}{d\xi}, \quad (15)$$

$$\frac{ds}{d\xi} + \tau_V s = \frac{de}{d\xi} - \frac{d\theta}{d\xi} + \tau_V (h^2 e - \theta) \quad (16)$$

с условиями

$$\xi \rightarrow -\infty: \quad \theta = 0, \quad e = 0;$$

$$\theta|_{0-} = \theta|_{0+}; \quad \frac{d\theta}{d\xi}|_{0-} = \frac{d\theta}{d\xi}|_{0+} + \Delta; \quad e|_{0-} = e|_{0+};$$

$\xi \rightarrow +\infty$  — возмущения конечны.

При  $\tau_V \rightarrow 0$  из уравнения (16), очевидно, находим

$$\frac{ds}{d\xi} = \frac{de}{d\xi} - \frac{d\theta}{d\xi}.$$

Подставив в полученное равенство уравнение (15), выразим из него  $de/d\xi$  и подставим в (14). В результате

$$\left[ 1 + \frac{\omega(\theta_b + \sigma)}{1 - \alpha^2} \right] \frac{d\theta}{d\xi} = \frac{d^2 \theta}{d\xi^2}.$$

При  $\tau_V \rightarrow \infty$  из уравнения (16), очевидно, находим  $s = h^2 e - \theta$ . Пропуская аналогичные предыдущему случаю выкладки, получаем

$$\left[ 1 + \frac{\omega(\theta_b + \sigma)}{h^2 - \alpha^2} \right] \frac{d\theta}{d\xi} = \frac{d^2 \theta}{d\xi^2}.$$

Характеристическое уравнение для системы (14)–(16) имеет вид

$$k^2 (k^2 - \gamma k - \delta) = 0, \quad (17)$$

где

$$\gamma = 1 + \frac{\omega(\theta_b + \sigma)}{1 - \alpha^2} - \tau_V \frac{h^2 - \alpha^2}{1 - \alpha^2}, \quad (18)$$

$$\delta = \tau_V \left[ \frac{\omega(\theta_b + \sigma)}{1 - \alpha^2} - \frac{h^2 - \alpha^2}{1 - \alpha^2} \right].$$

Уравнение (17), очевидно, имеет четыре корня:

$$k_{1,2} = \frac{\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 + 4\delta}}{2}, \quad k_{3,4} = 0. \quad (19)$$

Условно примем, что  $k_1$  — положительный корень,  $k_2$  — отрицательный. Анализ показывает, что комплексных корней нет.

Следовательно, с учетом граничных условий решение стационарной задачи может быть представлено в форме:

$$\theta_1^0 = \theta_b \exp(k_1 \xi), \quad \theta_2^0 = \theta_b \frac{1}{k_1} = \frac{2}{\gamma + \sqrt{\gamma^2 + 4\delta}},$$

$$e_1^0 = e_b \exp(k_1 \xi),$$

$$e_1^0 = e_b = \frac{(k_1 + \tau_V)\theta_b}{k_1(1 - \alpha^2) + \tau_V(h^2 - \alpha^2)}, \quad (20)$$

$$s_1^0 = s_b \exp(k_1 \xi),$$

$$s_1^0 = s_b = \frac{\alpha^2(k_1 + \tau_V)\theta_b}{k_1(1 - \alpha^2) + \tau_V(h^2 - \alpha^2)}.$$

Равенство  $\theta_b = 1/k_1$  фактически служит для определения температуры продуктов. Масштабная температура находится из условия  $\Delta = 1$  и представляет собой температуру продуктов в модели твердофазного горения без учета механических процессов:  $\theta_{b0} = \theta_0 + Q_0/c_\varepsilon \rho$ .

#### 4. НЕСТАЦИОНАРНАЯ ЗАДАЧА

Решение нестационарной (возмущенной) задачи ищем в виде

$$\theta_i = \theta_i^0 + \theta'_i, \quad e_i = e_i^0 + e'_i, \quad (21)$$

где  $\theta_i^0, e_i^0$  — стационарное решение,  $\theta'_i, e'_i$  — малое возмущение,  $i = 1, 2$ .

Подставляя (21) в систему (8), (9), (13) и используя решение стационарной задачи (20), находим систему уравнений для возмущений:

$$\frac{\partial \theta'_i}{\partial \tau} + \frac{\partial \theta'_i}{\partial \xi} = \frac{\partial^2 \theta'_i}{\partial \xi^2} - \omega(\theta_b + \sigma) \left( \frac{\partial e'_i}{\partial \tau} + \frac{\partial e'_i}{\partial \xi} \right),$$

$$\frac{\partial^2 s'_i}{\partial \xi^2} = \alpha \left[ \frac{\partial^2 e'_i}{\partial \tau^2} + 2 \frac{\partial^2 e'_i}{\partial \tau \partial \xi} + \frac{\partial^2 e'_i}{\partial \xi^2} \right], \quad (22)$$

$$\frac{\partial s'_i}{\partial \tau} + \frac{\partial s'_i}{\partial \xi} + \tau_V s'_i = \frac{\partial e'_i}{\partial \tau} + \frac{\partial e'_i}{\partial \xi} - \left( \frac{\partial \theta'_i}{\partial \tau} + \frac{\partial \theta'_i}{\partial \xi} \right) + \tau_V (h^2 e'_i - \theta'_i),$$

где  $i = 1$  ( $\xi < 0$ ) относится к реагентам,  $i = 2$  ( $\xi > 0$ ) — к продуктам реакции.

Для того чтобы записать линеаризованные граничные условия для возмущений, представим скорость фронта в виде [4]

$$V_n = V_n^0 + \left( \frac{\partial V_n}{\partial T} \right)_0 (T - T^0) + \left( \frac{\partial V_n}{\partial \Pi} \right)_0 (\Pi - \Pi^0), \quad (23)$$

где  $T^0, \Pi^0$  — температура и работа напряжений в стационарной волне. В общем случае  $\Pi = - \sum_{i,j} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}$ . Переходя к безразмерным переменным в (23), запишем

$$\frac{V_n}{V_n^0} = 1 + z_1(\theta - \theta^0) + z_2(se - s^0 e^0), \quad (24)$$

где  $z_1 = \frac{1}{V_n^0} \left( \frac{\partial V_n}{\partial T} \right)_0 (T_* - T_0)$  — коэффициент чувствительности скорости реакции к температуре (представленный выше);  $z_2 = - \frac{1}{V_n^0} \left( \frac{\partial V_n}{\partial \Pi} \right)_0 \sigma_* \varepsilon_*$  — коэффициент чувствительности скорости реакции к работе напряжений, введенный в [4].

При записи граничных условий для возмущений учтем следующее. Используя стационарное решение (20), находим

$$\frac{\partial e_1^0}{\partial \xi} - \frac{\partial e_2^0}{\partial \xi} = \eta \left( \frac{\partial \theta_1^0}{\partial \xi} - \frac{\partial \theta_2^0}{\partial \xi} \right),$$

где  $\eta = \frac{k_1 + \tau_V}{(1 - \alpha^2)k_1 + \tau_V(h^2 - \alpha^2)}$ .

Положим, что при малых деформациях аналогичное условие выполняется и для возмущений. Тогда, разлагая граничные условия в ряд Тейлора в окрестности невозмущенной границы, учитывая граничные условия для невозмущенной задачи, представим граничные условия для возмущений в следующем виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \theta_1^0}{\partial \xi} \Big|_{0-} \zeta' + \theta_1' \Big|_{0-} &= \frac{\partial \theta_2^0}{\partial \xi} \Big|_{0+} \zeta' + \theta_2' \Big|_{0+} = \theta_s', \\ \frac{\partial^2 \theta_1^0}{\partial \xi^2} \Big|_{0-} \zeta' + \frac{\partial \theta_1'}{\partial \xi} \Big|_{0-} &= \frac{\partial^2 \theta_2^0}{\partial \xi^2} \Big|_{0+} \zeta' + \frac{\partial \theta_2'}{\partial \xi} \Big|_{0+} + \\ &+ z_1 \theta_s' + z_2 (s_s^0 e_s' + e_s^0 s_s'), \end{aligned} \quad (25)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial e_1^0}{\partial \xi} \Big|_{0-} \zeta' + e_1' \Big|_{0-} &= \frac{\partial e_2^0}{\partial \xi} \Big|_{0+} \zeta' + e_2' \Big|_{0+} = e_s', \\ \frac{\partial^2 e_1^0}{\partial \xi^2} \Big|_{0-} \zeta' + \frac{\partial e_1'}{\partial \xi} \Big|_{0-} &= \frac{\partial^2 e_2^0}{\partial \xi^2} \Big|_{0+} \zeta' + \frac{\partial e_2'}{\partial \xi} \Big|_{0+} + \\ &+ \eta [z_1 \theta_s' + z_2 (s_s^0 e_s' + e_s^0 s_s')]. \end{aligned}$$

Последним уравнением будет условие полного потребления вещества в зоне реакции

$$\frac{d\zeta}{d\tau} = -z_1 \theta_s' - z_2 (s_s^0 e_s' + e_s^0 s_s'). \quad (26)$$

Зададим возмущение фронта

$$\zeta = A \exp(\varphi \tau), \quad (27)$$

где  $A$  — амплитуда возмущения,  $\varphi$  — комплексная частота. Тогда возмущенные решения ищем в виде

$$\begin{aligned} \theta_i' &= f_i \exp(\varphi \tau \pm r_i \xi), \quad e_i' = h_i \exp(\varphi \tau \pm r_i \xi), \\ s_i' &= g_i \exp(\varphi \tau \pm r_i \xi), \end{aligned} \quad (28)$$

где декремент затухания  $r_1 > 0$  и знак «+» соответствуют области 1 ( $\xi < 0$ ), декремент затухания  $r_2 > 0$  и знак «-» — области 2 ( $\xi > 0$ ).

Подставляя (28) в систему уравнений для возмущений, получаем две системы линейных алгебраических уравнений относительно амплитуд  $f_1, h_1, g_1$  и  $f_2, h_2, g_2$ , условия разрешимости которых приведут к двум уравнениям для декрементов  $r_1$  и  $r_2$ :

$$\begin{aligned} (\varphi + r_1 - r_1^2)[r_1^2(\varphi + r_1 + \tau_V h^2) - \\ - \alpha^2(\varphi + r_1)^2(\varphi + r_1 + \tau_V)] + \\ + r_1^2(\varphi + r_1)\omega(\theta_b + \sigma)(\varphi + r_1 + \tau_V) = 0, \end{aligned} \quad (29)$$

$$\begin{aligned} (\varphi - r_2 - r_2^2)[r_2^2(\varphi + r_2 + \tau_V h^2) - \\ - \alpha^2(\varphi - r_2)^2(\varphi - r_2 + \tau_V)] + \\ + r_2^2(\varphi - r_2)\omega(\theta_b + \sigma)(\varphi - r_2 + \tau_V) = 0. \end{aligned}$$

Используя (27), (28) и граничные условия для возмущений (25), придем к системе пяти уравнений относительно  $f_1, h_1, f_2, h_2$  и  $A$ . Связь между амплитудами возмущений деформаций  $h_i$  и напряжений  $g_i$  найдем, используя соотношения Максвелла, которые работают как в области реагентов, так и в области продуктов. Тогда

$$g_1 = h_1 \frac{\varphi + r_1 + \tau_V h^2}{\varphi + r_1 + \tau_V} - f_1 = h_1 p_1 - f_1,$$

$$g_2 = h_2 \frac{\varphi - r_2 + \tau_V h^2}{\varphi - r_2 + \tau_V} - f_2 = h_2 p_2 - f_2,$$

где  $p_1 = \frac{\varphi + r_1 + \tau_V h^2}{\varphi + r_1 + \tau_V}$ ,  $p_2 = \frac{\varphi - r_2 + \tau_V h^2}{\varphi - r_2 + \tau_V}$ .

Условие разрешимости системы уравнений для амплитуд возмущений, составленной на основе линеаризованных граничных условий, заключается в равенстве нулю определителя матрицы ее коэффициентов. В рассматриваемой задаче

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ k_1 & r_1 & r_2 - \beta & 0 & -q \\ \eta & 0 & 0 & 1 & -1 \\ \eta k_1 & 0 & -\eta \beta & r_1 & r_2 - \eta q \\ \varphi & 0 & \beta & 0 & q \end{vmatrix} = 0,$$

где  $\beta = z_1 - z_2 \theta_b \eta$ ,  $q = z_2 \theta_b (p_2 + \alpha^2)$ , остальные обозначения приведены выше.

Раскрывая определитель, находим уравнение для определения комплексной частоты  $\varphi$ :

$$(r_1 + r_2)\{\varphi(r_1 + r_2) + (\beta + q\eta)[r_1 - \varphi - k_1]\} = 0. \quad (30)$$

Выражая  $\varphi$  из (30) и подставляя его в (29), получаем систему нелинейных уравнений, которая позволяет исследовать влияние параметров модели на условия устойчивости фронта твердофазного превращения.

## 5. АНАЛИЗ РЕЗУЛЬТАТОВ

Проанализируем различные частные случаи.

1. Так, при условиях  $\omega = \alpha = z_2 = \tau_V = 0$  уравнения (29) принимают вид

$$(\varphi + r_1 - r_1^2)r_1^2(\varphi + r_1) = 0,$$

$$(\varphi + r_2 - r_2^2)r_2^2(\varphi + r_2) = 0.$$

По определению  $r_{1,2} > 0$ . Следовательно,

$$\varphi + r_i - r_i^2 = 0, \quad i = 1, 2, \quad (31)$$

$$r_{1,2} = \frac{1}{2} \left( \sqrt{1 + 4\varphi} \pm 1 \right). \quad (32)$$

Подставляя (32) в (30), приходим к квадратному уравнению\* для  $\varphi$ :

$$4\varphi^2 + (-z_1^2 + 4z_1 + 1)\varphi + z_1 = 0. \quad (33)$$

Устойчивым режимам соответствуют корни этого уравнения с отрицательной действительной частью, что получается, если  $-z_1^2 + 4z_1 + 1 > 0$ .

Тогда условие устойчивости примет вид

$$0 < z_1 \leq z_1^* = 2 + \sqrt{5}. \quad (34)$$

При  $z_1 > z_1^*$  возмущения растут. Так как вблизи  $z_1^*$  мнимая часть  $\varphi$  отлична от нуля, процесс потери устойчивости может носить колебательный характер. Этот результат полностью совпадает с [2].

2. Если  $\omega = z_2 = \tau_V = 0$ , но  $\alpha \neq 0$ , то  $\gamma = 1$ ,  $k_1 = 1$ ,  $k_2 = 0$ ,  $\beta + q\eta = z_1$  и из (29) имеем

$$\begin{aligned} (\varphi + r_1 + r_1^2)(\varphi + r_1)[r_1^2 - \alpha^2(\varphi + r_1)^2] &= 0, \\ (\varphi - r_2 - r_2^2)(\varphi - r_2)[r_2^2 - \alpha^2(\varphi - r_2)^2] &= 0. \end{aligned}$$

Следовательно, дополнительно к (31) получаем

$$r_i^2 - \alpha^2(\varphi \pm r_i)^2 = 0, \quad \text{где } i = 1, 2. \quad (35)$$

Корни уравнения (35) соответствуют волне механических возмущений, порождаемой волной горения.

Пусть  $\alpha < 1$ , т. е. волна горения медленная. Тогда в области устойчивости ( $\text{Re } \varphi < 0$ )

$$r_1 = -\varphi\alpha_2 > 0, \quad r_2 = -\varphi\alpha_1 > 0,$$

где  $\alpha_1 = \alpha/(1 + \alpha)$ ,  $\alpha_2 = \alpha/(1 - \alpha)$ . Подставляя полученные значения декрементов в (30), получаем

$$\varphi^2(\alpha_2 + \alpha_1) + \varphi(\alpha_2 + 1)z_1 + z_1 = 0.$$

Оба корня этого уравнения с отрицательными действительными частями. Следовательно,

\*Вообще говоря, как и в [2], мы получаем кубическое уравнение для комплексной частоты, один корень которого тождественно равен нулю. Аналогичная ситуация получается и в более сложных случаях.

волна механических возмущений, порождаемая медленной волной горения, всегда устойчива. Условие появления колебательных режимов в области устойчивости для механической волны

$$z_1 < 4(\alpha_2 + \alpha_1)/(1 + \alpha_2)^2$$

не совпадает с условием появления колебательных режимов горения.

В области неустойчивости ( $\text{Re } \varphi > 0$ )

$$r_2 = \varphi\alpha_1 > 0 \text{ и } r_1 = \varphi\alpha_2 > 0.$$

Следовательно,

$$\varphi^2(\alpha_2 + \alpha_1) + \varphi(\alpha_2 - 1)z_1 - z_1 = 0.$$

Так как  $(\alpha_2 - 1)z_1 < 0$ , то такая волна механических возмущений абсолютно неустойчива.

Если  $\alpha > 1$ , то в области устойчивости получаем  $r_1 > 0$ , но  $r_2 < 0$ , чего не может быть по условию. В области неустойчивости  $r_1 < 0$ , но  $r_2 > 0$ , что тоже не имеет смысла. Следовательно, сверхзвуковые режимы горения при условии  $\omega = 0$  не реализуются, что еще раз подтверждает результаты [5].

3. Если  $\omega \neq 0$ ,  $z_2 \neq 0$ , но  $\alpha = \tau_V = 0$ , то  $\delta = 0$ ,  $\beta + q\eta = z_1$ ;  $k_1 = \gamma$ ,  $k_2 = 0$  и  $\gamma = 1 + \omega(\theta_b + \sigma)$ . Единственный положительный корень уравнения (20) для температуры в этом случае есть

$$\theta_b = \frac{1}{2\omega} \left[ \sqrt{(1 + \omega\sigma)^2 + 4\omega} - (1 + \omega\sigma) \right]. \quad (36)$$

Следовательно, условие устойчивости не будет явно зависеть от чувствительности скорости реакции к работе механических напряжений, так как в этом случае волна напряжений полностью определяется характеристиками фронта превращения. Из уравнений (29) находим

$$\begin{aligned} r_1^2(\varphi + r_1)[-r_1^2 + r_1(1 + \omega_1) + \varphi(1 + \omega_1)] &= 0, \\ r_2^2(\varphi - r_2)[-r_2^2 - r_2(1 + \omega_1) + \varphi(1 + \omega_1)] &= 0, \end{aligned}$$

где  $\omega_1 = \omega(\theta_b + \sigma)$ .

Если  $r_{1,2} = 0$ , то при данном наборе параметров из уравнения (30) получаем  $\varphi = -\gamma$ , что можно интерпретировать как незатухающие колебания с частотой  $\varphi = -\gamma$  и амплитудой  $\theta_b$ . Аналогичная интерпретация возможна и в случае 1, когда  $\varphi = -1$ .

Из решений системы уравнений

$$\begin{aligned} r_1^2 - r_1(1 + \omega_1) - \varphi(1 + \omega_1) &= 0, \\ r_2^2 + r_2(1 + \omega_1) - \varphi(1 + \omega_1) &= 0 \end{aligned}$$

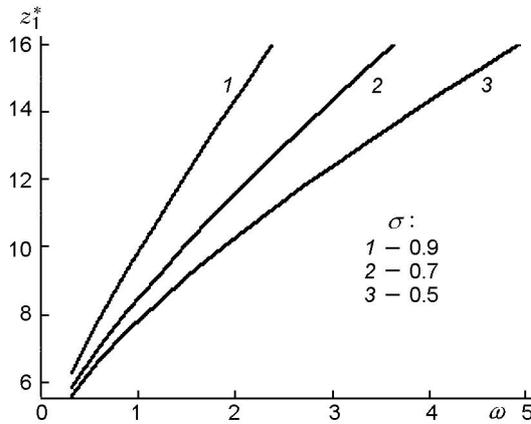


Рис. 1. Зависимость критического значения коэффициента чувствительности скорости реакции к температуре  $z_1^*$  от коэффициента связанности  $\omega$  при  $\alpha = 0$ ,  $\tau_V = 0$  и различных значениях  $\sigma$

выбираем положительные корни для декрементов

$$r_{1,2} = \frac{1}{2} \left[ \sqrt{(1 + \omega_1)^2 - 4\varphi(1 + \omega_1) \pm (1 + \omega_1)} \right]. \quad (37)$$

Подставляя (37) в (30), находим уравнение для частоты

$$4\varphi^2(1 + \omega_1) + \varphi[(1 + \omega_1)^2 + 4z_1(1 + \omega_1) - z_1^2] + z_1(1 + \omega_1)^2 = 0. \quad (38)$$

Условие устойчивости фронта превращения следует из неравенства

$$(1 + \omega_1)^2 + 4z_1(1 + \omega_1) - z_1^2 > 0$$

или

$$0 < z_1 \leq z_1^* = (2 + \sqrt{5})(1 + \omega(\theta_b + \sigma)), \quad (39)$$

что отличается от (34).

Зависимость критического значения коэффициента чувствительности  $z_1^*$  от коэффициента связанности  $\omega$ , рассчитанная с помощью (36), (39), показана на рис. 1, откуда видно, что при данном сочетании параметров механические процессы расширяют область устойчивого горения [4].

4. Если  $\omega = \tau_V = 0$ , но  $z_2 \neq 0$ ,  $\alpha \neq 0$ , то получаем  $\theta_b = 1$ ,  $\gamma = 1$ ,  $\beta + q\eta = s$ , где  $s = z_1 + \alpha^2 z_2 / (1 - \alpha^2)$ ,  $k_1 = 1$ ,  $k_2 = 0$ . Уравнения (29) в этом случае принимают тот же вид, что и в случае 2.

Рассмотрим решение (32). В результате простых преобразований при данном наборе параметров приходим к уравнению (33), где вместо  $z_1$  стоит параметр  $s$ :

$$4\varphi^2 + (-s^2 + 4s + 1)\varphi + s = 0.$$

Коэффициент чувствительности скорости фронта к работе напряжений может иметь любой знак, поэтому условие устойчивости (34) изменяется.

Если  $\alpha < 1$ , т. е. волна горения медленная, то в случае  $0 < z_2 < (2 + \sqrt{5})(1 - \alpha^2)/\alpha^2$  влияние напряжений сводится к снижению предела устойчивости

$$z_1 \leq z_1^a = 2 + \sqrt{5} - z_2 \frac{\alpha^2}{1 - \alpha^2}. \quad (40)$$

При условии  $z_2 > (2 + \sqrt{5})(1 - \alpha^2)/\alpha^2$  волна горения абсолютно неустойчива.

В случае  $z_2 < 0$  условие устойчивости медленной волны горения можно представить в виде

$$z_1^b \leq z \leq z_1^a, \quad (41)$$

где  $z_1^a = z_1^*$ ,  $z_1^b = 2 - \sqrt{5} - \alpha^2 z_2 / (1 - \alpha^2)$ . Неравенство (41) имеет смысл, если  $|z_2| > [( \sqrt{5} - 2) / \alpha^2] (1 - \alpha^2)$ .

Следовательно, уменьшение скорости реакции под действием напряжений приводит к появлению нижнего предела устойчивого горения и к увеличению значений  $z_1$ , ниже которых горение устойчиво. Например, на рис. 2, а область устойчивых режимов горения находится между линиями 2 при  $\alpha = 0.3$  и между линиями 3 при  $\alpha = 0.7$ .

Для сверхзвуковой волны горения,  $\alpha > 1$ , область устойчивости по  $z_1$ , ограниченная пределами  $z_1^a$  и  $z_1^b$  (41), появляется, если

$$z_2 > \frac{(2 - \sqrt{5})(1 - \alpha^2)}{\alpha^2} > 0.$$

Если  $z_2 < 0$ , то влияние работы напряжений приводит к уменьшению области устойчивости по  $z_1 > 0$ . Условие устойчивости имеет вид (40), где

$$|z_2| < \frac{\sqrt{5} + 2}{\alpha^2} (1 - \alpha^2).$$

На рис. 2, б область устойчивых режимов ограничена линиями 1 для  $\alpha = 1.5$ . Если  $\alpha = 1$ , сверхзвуковой режим не реализуется.

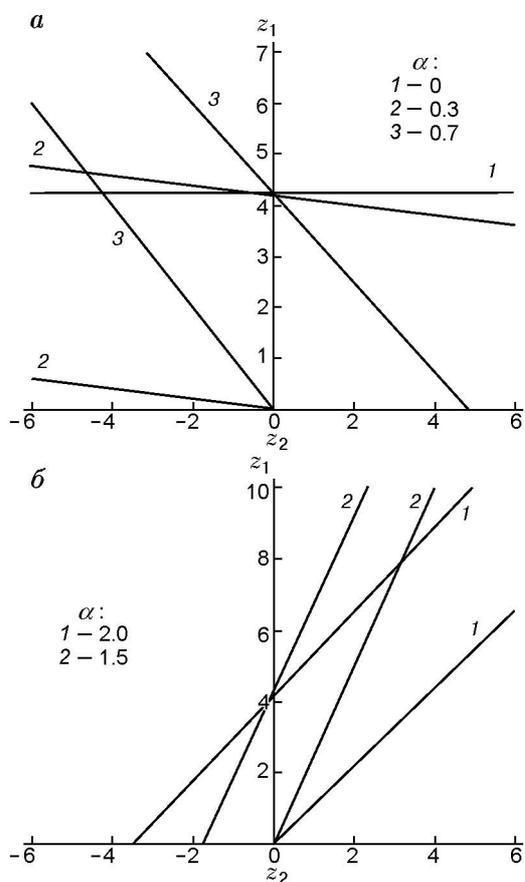


Рис. 2. Зависимость пределов устойчивого горения от коэффициента чувствительности скорости реакции к работе напряжений для дозвукового (а) и сверхзвукового (б) решений при  $\omega = 0$ ,  $\tau_V = 0$  и различных значениях  $\alpha$

Возможно, что именно замедлением (а не ускорением) скорости превращения под действием напряжений (неизбежно сопровождающих реакцию) можно объяснить известные в химии твердого тела факты, когда медленные режимы превращения некоторых реакций вообще не реализуются при их иницировании в обычных условиях, но быстрые режимы (не обязательно сверхзвуковые), инициированные особым способом, протекают с достаточно высоким выходом продукта.

Проанализируем решение уравнений (35). Пусть  $\alpha < 1$ , т. е. волна горения медленная. Тогда, полагая

$$r_1 = -\varphi\alpha_2 > 0, \quad r_2 = -\varphi\alpha_1 > 0, \quad (42)$$

где  $\alpha_1 = \alpha/(1 + \alpha)$ ,  $\alpha_2 = \alpha/(1 - \alpha)$ , найдем уравнение

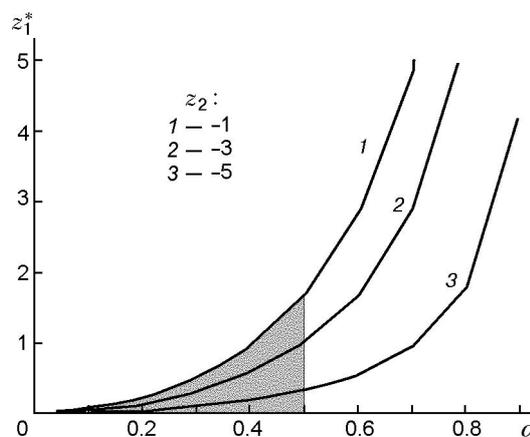


Рис. 3. Зависимость критического значения коэффициента чувствительности скорости реакции к температуре от параметра  $\alpha$  при  $\omega = 0$ ,  $\tau_V = 0$  и различных значениях коэффициента чувствительности скорости реакции к работе напряжений

$$\varphi^2(\alpha_2 + \alpha_1) + \varphi(\alpha_2 + 1)s + s = 0,$$

где  $s = z_1 + \alpha^2 \frac{z_2}{1 - \alpha^2}$ .

Следовательно, при  $z_2 > 0$  условие устойчивости имеет вид

$$z_1 > z_1^*(\alpha),$$

где  $z_1^* = \frac{\alpha^2}{1 - \alpha^2} z_2$ .

Если  $z_2 > 0$ , волна горения абсолютно неустойчива. Устойчивым режимам соответствует область выше кривой  $z_1^*(\alpha)$  для каждого данного значения  $\alpha$  на рис. 3.

Принимая

$$r_1 = \varphi\alpha_1 > 0, \quad r_2 = \varphi\alpha_2 > 0, \quad (43)$$

получаем

$$\varphi^2(\alpha_2 + \alpha_1) + \varphi(\alpha_2 - 1)s - s = 0.$$

Тогда при  $z_2 < 0$  условие устойчивости имеет вид

$$z_1 < z_1^*, \quad 0 < \alpha < 0.5.$$

Если  $z_2 < 0$  и  $0.5 < \alpha < 1$ , то волна горения абсолютно неустойчива, так же как и в области  $z_2 > 0$ . Области устойчивых решений соответствует затемненная область под кривыми  $z_1^*(\alpha)$  на рис. 3.

Если  $\alpha > 1$ , то в случае (42) получаем  $r_1 > 0$ , но  $r_2 < 0$ , чего не может быть по условию. В случае (43)  $r_1 < 0$ , но  $r_2 > 0$ , что тоже не имеет смысла.

5. Если  $\omega = 0$ , но  $\alpha \neq 0$ ,  $z_2 \neq 0$ ,  $\tau_V \neq 0$ , то получаем  $\theta_b = 1$ ,  $k_1 = 1$ ,  $\delta = \tau_V \frac{h^2 - \alpha^2}{1 - \alpha^2}$ . Из уравнений (29) в этом случае находим

$$(\varphi + r_1 + r_1^2)[r_1^2(\varphi + r_1 + \tau_V h^2) - \alpha^2(\varphi + r_1)^2(\varphi + r_1 + \tau_V)] = 0,$$

$$(\varphi - r_2 - r_2^2)[r_2^2(\varphi - r_2 + \tau_V h^2) - \alpha^2(\varphi - r_2)^2(\varphi - r_1 + \tau_V)] = 0.$$

Уравнение (30) в результате простых преобразований принимает вид

$$\varphi(r_1 + r_2)(\varphi - r_2 + \tau_V) + [S_1(\varphi - r_2) + \tau_V S_2](r_1 - \varphi - 1) = 0, \quad (44)$$

где

$$S_1 = z_1 + z_2 \eta \alpha^2,$$

$$S_2 = z_1 + z_2 \eta (h^2 + \alpha^2 - 1).$$

Подставляя в уравнение (44) корни (32) и возводя полученное выражение в квадрат, получаем уравнение четвертой степени относительно  $\varphi$ :

$$16\varphi^4 + A\varphi^3 + B\varphi^2 + C\varphi + D = 0, \quad (45)$$

где

$$A = 4 + 32\tau_V + 16S_1 - 4S_1^2,$$

$$B = 16\tau_V^2 + (24 + 32S_1 - 8S_1S_2)\tau_V + 4S_1,$$

$$C = (16S_2 + 4 - 4S_2^2)\tau_V^2 + (24S_1 + 4 - 4S_1S_2)\tau_V,$$

$$D = 4\tau_V(S_2\tau_V + S_1).$$

Устойчивым режимам соответствуют корни этого уравнения с отрицательной действительной частью. Для определения области, в которой все корни уравнения (45) имеют отрицательные вещественные части, удобнее воспользоваться следствием критерия Рауса — Гурвица, в соответствии с которым должны выполняться неравенства [11]

$$A > 0, \quad B > 0, \quad C > 0, \quad D > 0.$$

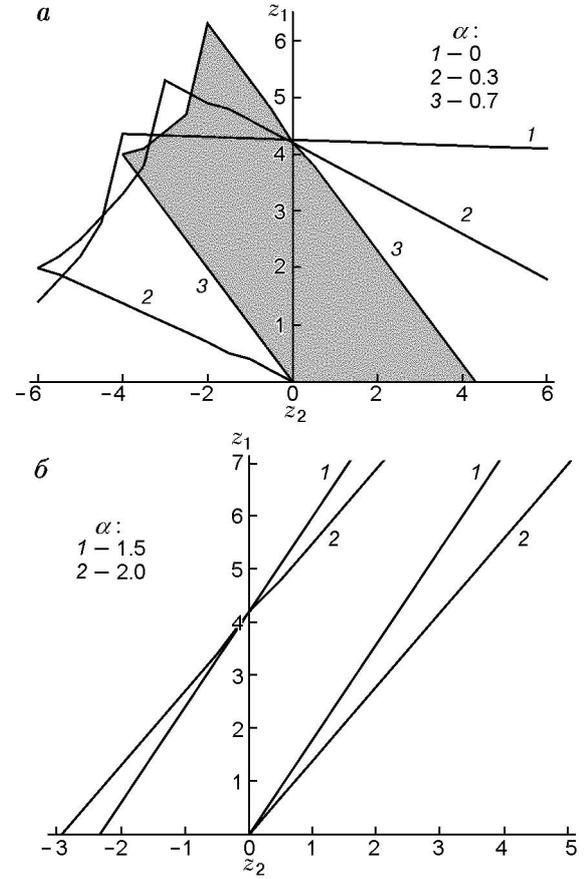


Рис. 4. Зависимость пределов устойчивого горения  $z_{1*}^a, z_{1*}^b$  от коэффициента чувствительности скорости реакции к работе напряжений для дозвукового (а) и сверхзвукового (б) решений при  $\omega = 0$ ,  $h = 0.83$ ,  $\tau_V = 0.1$  и различных значениях  $\alpha$

На рис. 4 и 5 изображена зависимость критического значения коэффициента чувствительности скорости реакции  $z_1^*$  к температуре от коэффициента чувствительности скорости реакции к работе напряжений  $z_2$  при двух различных значениях времени релаксации ( $\tau_V = 0.1$  и  $10$ ).

В случае малого времени релаксации  $\tau_V = 0.1$  для низкоскоростного режима ( $\alpha < 1$ ) область устойчивых решений ограничена кривыми, которые соответствуют верхнему и нижнему пределам (верхние и нижние кривые 2, 3 на рис. 4, а). Для  $\alpha = 0.7$  эта область на рисунке затемнена. Область устойчивости ограничена по  $z_2 < 0$ , при  $\alpha \rightarrow 1$  область устойчивых решений уменьшается. Для высокоскоростного режима ( $\alpha > 1$ ) наклон кривых, ограничива-

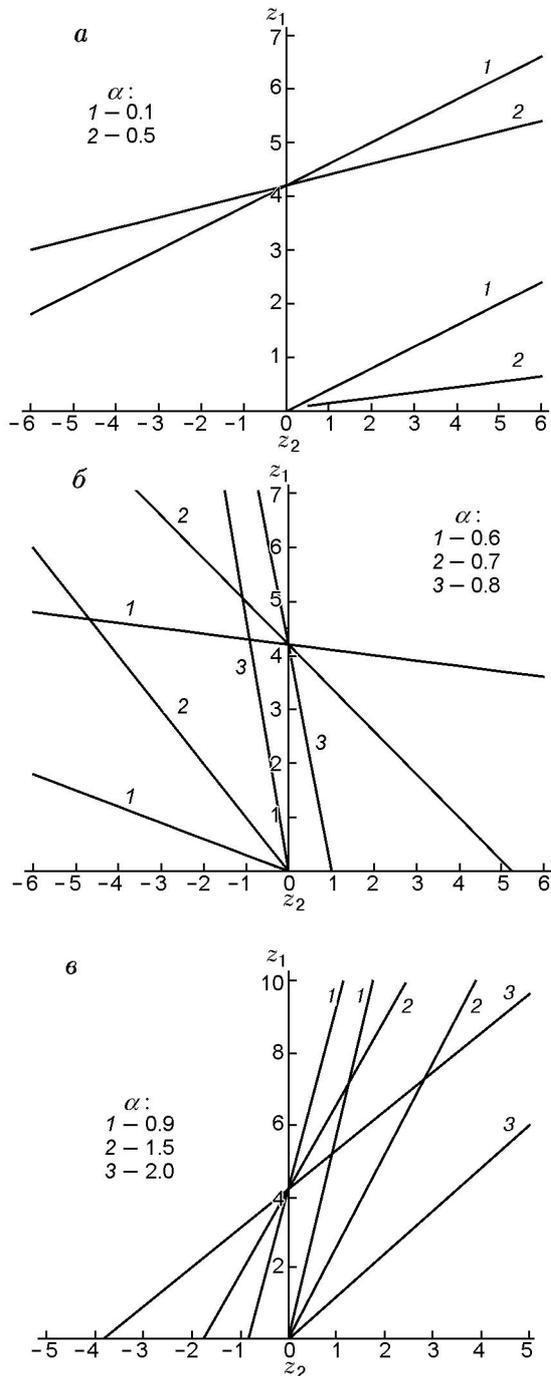


Рис. 5. Зависимость пределов устойчивого горения  $z_{1*}^a, z_{1*}^b$  от коэффициента чувствительности скорости реакции к работе напряжений для областей  $\alpha < \alpha_*$  (а),  $\alpha_* < \alpha < h$  (б),  $\alpha > h$  (в) при  $\omega = 0, h = 0.83, \tau_V = 10$  и различных значениях  $\alpha$

ющих область устойчивых режимов, изменяется в противоположную сторону и увеличивается при  $\alpha \rightarrow 1$  сверху (рис. 4, б). То есть нижний предел устойчивого распространения фронта существует для низкоскоростного режима реакции, скорость которой уменьшается с ростом напряжений, и для высокоскоростного режима распространения реакции, скорость которой увеличивается с напряжениями, как это было при  $\tau_V = 0$ .

В случае большого времени релаксации вязких напряжений ( $\tau_V \gg 1$ ) можно выделить три области изменения параметров:  $\alpha < 0.5, 0.5 < \alpha < h, \alpha > h$  (рис. 5), в которых наклон кривых, ограничивающих область устойчивых решений, различен. В первой области  $\alpha < \alpha_*$  (в отличие от случая, когда время релаксации вязких напряжений равно нулю,  $\tau_V = 0$  или  $\tau_V \ll 1$ ), здесь нижний предел появляется в положительной области изменения параметра  $z_2$ . С увеличением  $\alpha$  наклон кривых уменьшается, что отлично от рис. 2, а, где с ростом  $\alpha$  наклон кривых растет. В области  $\alpha_* < \alpha < h$  верхний и нижний пределы устойчивого горения качественно ведут себя аналогично случаю  $\tau_V = 0$ : с увеличением  $\alpha$  наклон кривых  $z_1^a(z_2), z_1^b(z_2)$  возрастает.

При  $\alpha \rightarrow h$  нижние и верхние кривые практически сливаются с осью  $z_2 = 0$  или, что то же самое, сливаются верхние и нижние пределы устойчивого горения (рис. 5, б), и при  $\alpha = h$  решения не существует.

При  $\alpha > h$  качественный характер зависимости пределов устойчивого горения от параметров такой же, как и в случае малых  $\alpha$  (рис. 5, в).

Корни уравнений

$$\begin{aligned}
 r_1^2(\varphi + r_1 + \tau_V h^2) - \\
 - \alpha^2(\varphi + r_1)^2(\varphi + r_1 + \tau_V) = 0, \\
 r_2^2(\varphi - r_2 + \tau_V h^2) - \\
 - \alpha^2(\varphi - r_2)^2(\varphi - r_2 + \tau_V) = 0
 \end{aligned}
 \tag{46}$$

явно выразить не удастся. Тем не менее полученные уравнения можно проанализировать численно совместно с уравнением (30).

Заметим, что если первая пара корней (32) дает условие устойчивости в виде

$$z_1 \leq z_1^{*(1)}(z_2, \omega, \alpha, \dots),$$

а другая пара корней (корни уравнений (46)) — условие

$$z_1 \leq z_1^{*(2)}(z_2, \omega, \alpha, \dots)$$

и т. д., то при данном наборе параметров модели  $z_2, \omega, \alpha, \dots$  устойчивым стационарным режимам превращения отвечают значения

$$z_1 \leq \min\{z_1^{*(1)}, z_1^{*(2)}, \dots\}.$$

Дальнейшее исследование модели нужно проводить численно.

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

При анализе условий устойчивости стационарных режимов превращения в вязкоупругой среде обнаружено, что время релаксации вязких напряжений изменяет область параметров, где реализуются устойчивые режимы превращения. Влияние малого и большого времени релаксации оказывается различным, что связано с различным характером влияния времени релаксации вязких напряжений на скорость превращения [5]. Показано, что нижний предел устойчивого распространения фронта существует при любых значениях времени релаксации вязких напряжений: либо для низкоскоростных, либо для высокоскоростных режимов, что зависит от характера влияния напряжений на скорость превращения.

### ЛИТЕРАТУРА

1. **Истратов А. Г., Либрович В. Б.** Об устойчивости горения пороха // ПМТФ. 1964. № 5. С. 38–43.
2. **Махвиладзе М. Г., Новожилов Б. В.** Двумерная устойчивость горения конденсированных систем // ПМТФ. 1971. № 5. С. 51–59.
3. **Максимов Э. И., Шкадинский К. Г.** Об устойчивости стационарного горения безгазовых составов // Физика горения и взрыва. 1971. Т. 7, № 3. С. 454–457.
4. **Князева А. Г.** The stationary modes of the reaction front and their stability for solid media with regard to chemically induced internal stresses and strains // Combustion of Energetic Materials. Selected papers of 5th Intern. Symp. on Special Topics in Chemical Propulsion, Italy, June 2000. New York: Begel House, Inc., 2002. P. 867–878.
5. **Князева А. Г.** Решение задачи термоупругости в форме бегущей волны и его приложение к анализу возможных режимов твердофазных превращений // ПМТФ. 2003. Т. 44, № 2. С. 14–26.
6. **Князева А. Г., Чащина А. А.** О термомеханической устойчивости фронта твердофазного превращения в щели между двумя инертными пластинами // Тр. Междунар. науч. конф. «Фундаментальные и прикладные вопросы механики», 8–11 октября, 2003, Хабаровск. С. 111–121.
7. **Князева А. Г., Сорокова С. Н.** Асимптотический анализ задачи о распространении безгазового горения в вязкоупругой среде // Физ. мезомеханика. 2004. Т. 7, спец. вып., ч. 1. С. 62–65.
8. **Князева А. Г., Дюкарев Е. А.** Модель распространения стационарного фронта превращения в вязкоупругой среде // Физика горения и взрыва. 2000. Т. 36, № 4. С. 41–51.
9. **Князева А. Г.** Стационарная модель твердофазного горения с учетом термических напряжений. Асимптотический анализ // Физ. мезомеханика. 1996. Т. 15, № 10. С. 1497–1514.
10. **Князева А. Г.** Распространение волны горения в деформированной сплошной среде // Физика горения и взрыва. 1993. Т. 29, № 3. С. 48–53.
11. **Бронштейн И. Н., Семендяев К. А.** Справочник по математике для инженеров и учащихся вузов. М.: Наука, 1986.

Поступила в редакцию 14/VI 2005 г.