

УДК 532.54:536.24

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МЕТОДА ГОМОТОПИЧЕСКОГО АНАЛИЗА ПРИ РЕШЕНИИ ЗАДАЧИ О ТЕЧЕНИИ И ТЕПЛООБМЕНЕ В ЖИДКОЙ ПЛЕНКЕ НА НЕСТАЦИОНАРНО РАСТЯГИВАЮЩЕЙСЯ ПЛАСТИНЕ

Т. Хадеминежад, М. Р. Ханармуэй, П. Талебизадех, А. Хамиди

Технологический университет Амиркабир, 15875-4413 Тегеран, Иран
E-mails: taha.khademi@gmail.com, m.khanarmuei@gmail.com,
talebizadeh.pouyan@gmail.com, arman2.hamidi@gmail.com

С использованием метода гомотопического анализа и с помощью преобразования подобия исследовано влияние вязкой диссипации, неоднородного источника (стока) тепла, магнитного поля и теплового излучения на характеристики теплообмена в случае течения тонкой пленки жидкости по нестационарно растягивающейся пластине. Выявлено влияние различных физических параметров на характеристики теплообмена. Показано, что параметр теплового излучения оказывает существенное влияние на температуру поверхности. Установлено, что использование неоднородного отвода тепла позволяет более эффективно охлаждать поверхности. Получены предельные случаи решений и показано, что эти решения хорошо согласуются с известными результатами численных расчетов.

Ключевые слова: метод гомотопического анализа, преобразование подобия, теплообмен в пленке жидкости.

DOI: 10.15372/PMTF20150413

Введение. Интерес к исследованию течения тонкой пленки жидкости обусловлен возможностью его применения в различных областях. Изучение особенностей течения и теплообмена внутри тонкой пленки жидкости необходимо для разработки технологий покраски и создания различных теплообменников и химического технологического оборудования. Течение в тонкой пленке жидкости применяется также для создания изолирующих покрытий проводов и волокон.

Задача о конденсации ламинарной пленки на вертикальной пластине впервые рассмотрена в работе [1] с использованием теории пограничного слоя и преобразования подобия. Позднее были изучены различные особенности течения жидкости при обтекании растягивающейся пластины. В [2] с использованием метода гомотопического анализа (МГА) проведен анализ процесса переноса импульса и тепла в ламинарной пленке жидкости на горизонтальной растягивающейся пластине. В [3] изучено нестационарное магнитогидродинамическое течение максвелловской жидкости по импульсно растягиваемой пластине. В [4] исследовано влияние термокапиллярности и магнитного поля на течение и теплообмен в пленке жидкости на упругой нестационарно растягивающейся поверхности. Аналитическое решение задачи о нелинейном теплообмене на нестационарно растягивающейся

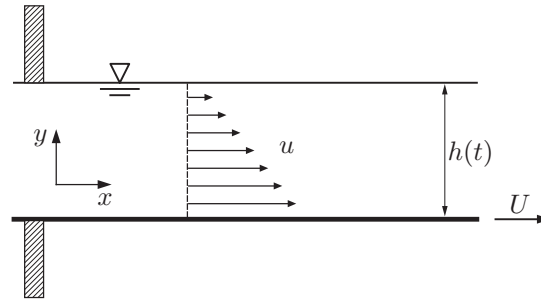


Рис. 1. Схема течения пленки жидкости на нестационарной растягивающейся пластине

проницаемой поверхности с заданной температурой стенки получено в [5] с использованием МГА. С помощью МГА в [6] найдено аналитическое решение задачи о течении в пограничном слое на движущейся пористой поверхности, зависящее от времени. В [7] с использованием МГА изучена естественная конвекция на движущейся вертикальной пористой пластине при наличии тепловыделения и массообмена. В [8] развит спектральный МГА решения нелинейной задачи о теплообмене на ребре. Решения ряда других задач о течении жидкости, полученные с помощью МГА, приведены в работах [9–21].

Анализ работ, посвященных исследованию теплообмена в тонкой пленке жидкости, показал, что с помощью МГА не изучались течения пленки однородной толщины при совместном влиянии теплового излучения, вязкой диссипации и неоднородного источника (стока) тепла при наличии магнитного поля. В данной работе предложен метод решения задачи о течении пленки жидкости на нестационарно растягивающейся пластине. Предлагаемый метод основан на методе гомотопического анализа, применяемом при решении нелинейных задач [22].

1. Математическая модель. Рассмотрим тонкую упругую пленку жидкости однородной толщины $h(t)$, находящуюся на горизонтальной растягивающейся пластине. Направление оси x совпадает с направлением движения растягиваемой пластины (рис. 1).

Пластина перемещается в собственной плоскости со скоростью, определяемой по формуле

$$U(x, t) = bx/(1 - \alpha t),$$

где b — скорость растяжения; α — положительная постоянная, имеющая размерность, обратную размерности времени. Предполагается, что температура поверхности T_s растягивающейся пластины меняется в зависимости от расстояния x от разреза:

$$T_s(x, t) = T_0 - T_{ref} \frac{bx^2}{2\nu} (1 - \alpha t)^{-2/3}. \quad (1)$$

Здесь T_0 — температура в разрезе; $0 \leq T_{ref} \leq T_0$.

Поля скорости и температуры пленки жидкости удовлетворяют следующим уравнениям пограничного слоя:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0; \quad (2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{1}{\rho} (\mathbf{J} \times \mathbf{B})_x; \quad (3)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{k}{\rho C_P} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\mu}{\rho C_P} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 - \frac{1}{\rho C_P} \frac{\partial q_r}{\partial y} + \frac{q'''}{\rho C_P}; \quad (4)$$

$$y = 0: \quad u = U, \quad v = 0, \quad T = T_S; \quad (5)$$

$$y = h: \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial T}{\partial y} = 0, \quad v = \frac{dh}{dt}. \quad (6)$$

Здесь u, v — компоненты скорости в направлениях осей x, y соответственно; T — температура в пограничном слое; ν — кинематическая вязкость; k — теплопроводность; t — время; \mathbf{J} — плотность тока; $\mathbf{B} = (0, B_0, 0)$ — внешнее магнитное поле; B_0 — положительная постоянная; q — тепловой поток; μ — динамическая вязкость; штрих обозначает производную по координате x . Полагая, что плоская пленка жидкости имеет гладкую поверхность, влиянием поверхностных волн можно пренебречь. Также предполагается, что взаимодействие пленки с покоящейся атмосферой (поверхностное натяжение) является несущественным. На адиабатической свободной поверхности ($y = h$) вязкое сдвиговое напряжение $\tau = \mu \partial U / \partial y$ и поток тепла $q_r = -k \partial T / \partial y$ обращаются в нуль. Вектор плотности тока \mathbf{J} направлен параллельно оси z . Следовательно, согласно закону Ома

$$J_z = \sigma(E_z + (\mathbf{q} \times \mathbf{B})_z) = \sigma(E_z + uB_0), \quad (7)$$

где σ — постоянная электропроводность жидкости; E_z — z -компонента электрического поля, являющаяся функцией только z ; \mathbf{q} — вектор скорости.

Таким образом, z -компонента плотности тока J_z должна удовлетворять уравнению $\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$, т. е.

$$\frac{\partial J_z}{\partial z} = \sigma \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0, \quad (8)$$

откуда следует, что E_z — постоянная. После подстановки (7) в (3) уравнение импульса принимает вид

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\sigma B_0 E_z}{\rho} - \frac{\sigma B_0^2 u}{\rho}. \quad (9)$$

В случае невязкого свободного потока ($u = U, \nu = \mu = 0, U$ — постоянная) уравнение (9) записывается в виде

$$-\frac{\sigma B_0 E_z}{\rho} - \frac{\sigma B_0^2 U}{\rho} = 0,$$

следовательно,

$$E_z = -B_0 U$$

($U = 0$ — скорость свободного потока). Тогда нестационарное уравнение импульса можно записать следующим образом:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\sigma B_0^2 u}{\rho}.$$

Величина q''' в уравнении (4) — интенсивность неоднородного источника ($q''' > 0$) или стока ($q''' < 0$) тепла на единицу объема, определяемая по формуле

$$q''' = \frac{kU(x, t)}{\nu x} [A^*(T_s - T_\infty)f' + B^*(T - T_\infty)],$$

где A^*, B^* — параметры выделения (поглощения) тепла. Следует отметить, что параметры A^* и B^* положительны в случае внутреннего источника тепла и отрицательны в случае внутреннего стока тепла. Температура поверхности пластины T_s рассматривается как функция расстояния x и времени t , определяемая уравнением (1).

Для того чтобы было выполнено уравнение неразрывности, введем функцию тока следующим образом:

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{bx}{1 - \alpha t} f'(\eta), \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = -\left(\frac{\nu b}{1 - \alpha t}\right)^{1/2} f(\eta). \quad (10)$$

Введем также следующие безразмерные переменные:

$$\begin{aligned} \psi(x, y, t) &= \left(\frac{\nu b}{1 - \alpha t}\right)^{1/2} x f(\eta), & \eta &= \left(\frac{b}{\nu(1 - \alpha t)}\right)^{1/2} y, \\ T &= T_0 - T_{ref} \frac{bx^2}{2\nu} (1 - \alpha t)^{-3/2} \theta(\eta), & \theta(\eta) &= \frac{T - T_0}{T_s - T_0}. \end{aligned} \quad (11)$$

Подставляя уравнения (10), (11) в (3), (4), получаем нелинейные дифференциальные уравнения

$$S(f' + \eta f''/2) + (f')^2 - f f'' - f''' + M f' = 0; \quad (12)$$

$$\frac{1 + N}{Pr} \theta'' - \left(\frac{S}{2} (3\theta + \eta \theta') + 2f'\theta - \theta' f\right) + Ec f''^2 + \frac{1}{Pr} (A^* f' + B^* \theta) = 0, \quad (13)$$

где $N = 16\sigma^* T_\infty^3 / (3kk^*)$ — параметр теплового излучения; M — параметр магнитного поля; k^* — средний коэффициент поглощения; Ec , Pr — числа Эккерта и Прандтля.

Граничные условия данной задачи имеют вид

$$\begin{aligned} f'(0) &= 1, & f(0) &= 0, & \theta(0) &= 1, \\ f''(\beta) &= 0, & \theta'(\beta) &= 0, & f(\beta) &= S\beta/2, \end{aligned} \quad (14)$$

где S — параметр нестационарности; β — безразмерная толщина пленки.

Заметим, что уравнение импульса пограничного слоя (уравнение (12)) с граничными условиями (14) не зависит от теплового поля, в то же время поле температуры $\theta(\eta)$ зависит от поля скорости $f(\eta)$. Поскольку пластина растягивается в горизонтальном направлении, влияние конвективных потоков незначительно и, следовательно, поле скорости оказывает влияние на температуру, а температура не влияет на поле скорости.

2. Метод гомотопического анализа. Задача (12)–(14) решается с использованием МГА. Представим решение в следующем виде:

$$f(\eta) = \sum_{m=0}^{+\infty} a_m \eta^m, \quad \theta(\eta) = \sum_{m=0}^{+\infty} b_m \eta^m \quad (15)$$

(a_m, b_m — константы). Чтобы уравнение (15) и граничные условия (уравнения (14)) были выполнены, нужно выбрать начальное приближение для $f(\eta)$ и $\theta(\eta)$ в виде

$$f_0(\eta) = \eta + \frac{3S - 6}{4\beta} \eta^2 - \frac{S - 2}{4\beta^2} \eta^3, \quad \theta_0(\eta) = 1. \quad (16)$$

Пусть $L_f = \frac{\partial^3}{\partial \eta^3}$, $L_\theta = \frac{\partial^2}{\partial \eta^2}$ — линейные операторы, обладающие следующими свойствами:

$$L_f[C_1 + C_2\eta + C_3\eta^2] = 0, \quad L_\theta[C_1 + C_2\eta] = 0$$

(C_1, C_2, C_3 — константы).

Течение в тонкой пленке жидкости на нестационарно растягивающейся пластине описывается уравнениями (12), (13). Нелинейные операторы определяются следующим образом:

$$N_f[f(\eta, q)] = S \left(\frac{\partial f(\eta, q)}{\partial \eta} + \frac{\eta}{2} \frac{\partial^2 f(\eta, q)}{\partial \eta^2} \right) + \left(\frac{\partial f(\eta, q)}{\partial \eta} \right)^2 - \\ - f \frac{\partial^2 f(\eta, q)}{\partial \eta^2} - \frac{\partial^3 f(\eta, q)}{\partial \eta^3} + M \frac{\partial f(\eta, q)}{\partial \eta} = 0, \\ N_\theta[\theta(\eta, q), f(\eta, q)] = (1 + N) \frac{\partial^2 \theta(\eta, q)}{\partial \eta^2} - \\ - \text{Pr} \left[\frac{S}{2} \left(3\theta + \eta \frac{\partial \theta(\eta, q)}{\partial \eta} \right) + 2 \frac{\partial f(\eta, q)}{\partial \eta} \theta - \frac{\partial \theta(\eta, q)}{\partial \eta} f \right] + \\ + \text{Ec Pr} \left(\frac{\partial^2 f(\eta, q)}{\partial \eta^2} \right)^2 + \left(A^* \frac{\partial f(\eta, q)}{\partial \eta} + B^* \theta \right) = 0.$$

Здесь $f(\eta, q)$, $\theta(\eta, q)$ — неизвестные функции η и q .

Пусть h_f , h_θ — ненулевые вспомогательные параметры, а $H_f(\eta)$, $H_\theta(\eta)$ — ненулевые вспомогательные функции. Тогда уравнение деформации нулевого порядка можно записать в виде

$$(1 - q)L_f[f(\eta, q) - f_0(\eta)] = qh_f H_f(\eta) N_f[f(\eta, q)], \\ (1 - q)L_\theta[\theta(\eta, q) - \theta_0(\eta)] = qh_\theta H_\theta(\eta) N_\theta[\theta(\eta, q), f(\eta, q)]. \quad (17)$$

Граничные условия имеют вид

$$f(0, q) = 0, \quad f'(0, q) = 1, \quad f''(\beta, q) = 0, \quad f(\beta, q) = S\beta/2, \\ \theta(0, q) = 1, \quad \theta'(\beta, q) = 0, \quad (18)$$

где $q \in [0, 1]$ — параметр вложения. Из уравнений (16) следует, что при $q = 0$ решения уравнений (17), (18) имеют вид

$$f(\eta, 0) = f_0(\eta), \quad \theta(\eta, 0) = \theta_0(\eta).$$

Так как при $q = 1$ $h_f \neq 0$, $h_\theta \neq 0$ и $H_f \neq 0$, $H_\theta \neq 0$, то уравнения (17), (18) эквивалентны уравнениям (12)–(14) при условии

$$f(\eta, 1) = f(\eta), \quad \theta(\eta, 1) = \theta(\eta). \quad (19)$$

Таким образом, если параметр вложения увеличивается от 0 до 1, то функции $f(\eta, q)$ и $\theta(\eta, q)$ изменяются от начальных значений $f_0(\eta)$ и $\theta_0(\eta)$ до значений $f(\eta)$ и $\theta(\eta)$, соответствующих точному решению.

Раскладывая $f(\eta, q)$ и $\theta(\eta, q)$ в ряд Тейлора по q , получаем

$$f(\eta, q) = f_0(\eta) + \sum_{m=1}^{\infty} f_m(\eta) q^m, \quad \theta(\eta, q) = \theta_0(\eta) + \sum_{m=1}^{\infty} \theta_m(\eta) q^m,$$

где

$$f_m(\eta) = \frac{1}{m!} \left. \frac{\partial^m f(\eta, q)}{\partial q^m} \right|_{q=0}, \quad \theta_m(\eta) = \frac{1}{m!} \left. \frac{\partial^m \theta(\eta, q)}{\partial q^m} \right|_{q=0}.$$

Используя уравнение (19), находим

$$f(\eta, q) = f_0(\eta) + \sum_{m=1}^{\infty} f_m(\eta), \quad \theta(\eta, q) = \theta_0(\eta) + \sum_{m=1}^{\infty} \theta_m(\eta). \quad (20)$$

С учетом (20) из уравнений (17), (18) получаем уравнения деформации m -го порядка

$$\begin{aligned} L_f[f_m(\eta) - \chi_m f_{m-1}(\eta)] &= h_f H_f(\eta) R_{1,m}(\eta), \\ L_\theta[\theta_m(\eta) - \chi_m \theta_{m-1}(\eta)] &= h_\theta H_\theta(\eta) R_{2,m}(\eta) \end{aligned} \quad (21)$$

с граничными условиями

$$\begin{aligned} f_m(0) = 0, \quad f'_m(0) = 0, \quad f''(\beta) = 0, \quad f(\beta) = 0, \\ \theta_m(0) = 0, \quad \theta'_m(\beta) = 0 \quad \text{при} \quad m \geq 1, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} R_{1,m}(\eta) &= f'''_{m-1} + \sum_{n=0}^{m-1} f_{m-1-n} f''_n - \sum_{n=0}^{m-1} f'_{m-1-n} f'_n - \frac{S\eta}{2} f''_{m-1} - (S+M) f'_{m-1}, \\ R_{2,m}(\eta) &= (1+N) \theta''_{m-1} - \text{Pr} \left(2 \sum_{n=0}^{m-1} f'_{m-1-n} \theta_n - \sum_{n=0}^{m-1} f_n \theta'_{m-1-n} + \frac{S\eta}{2} \theta'_{m-1} + \frac{3S}{2} \theta_{m-1} \right) + \\ &\quad + \text{Ec Pr} \sum_{n=0}^{m-1} f''_{m-1-n} f''_n + A^* f'_{m-1-n} + B^* \theta_{m-1-n}, \\ \chi_m &= \begin{cases} 1, & m > 1, \\ 0, & m = 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Решения уравнений (21) можно представить в виде

$$\begin{aligned} f_m(\eta) &= \int_0^\eta \int_0^\eta \int_0^\eta h_f H_f(\eta) R_{1,m}(\eta) d\eta d\eta d\eta + \chi_m f_{m-1} + C_1 + C_2 \eta + C_3 \eta^2, \\ \theta_m(\eta) &= \int_0^\eta \int_0^\eta h_\theta H_\theta(\eta) R_{2,m}(\eta) d\eta d\eta + \chi_m \theta_{m-1} + C_1 + C_2 \eta. \end{aligned}$$

Тогда приближение $f(\eta)$ и $\theta(\eta)$ m -го порядка принимает вид

$$f(\eta) \approx \sum_{n=0}^m f_n(\eta), \quad \theta(\eta) \approx \sum_{n=0}^m \theta_n(\eta).$$

В результате получаем первые и вторые члены ряда решения:

$$\begin{aligned} f_0(\eta) &= \eta + \frac{3S-6}{4\beta} \eta^2 + \frac{2-S}{4\beta^2} \eta^3, \\ f_1(\eta) &= -\frac{h\eta^3}{3360\beta^4} (3\eta^4 S^2 - 12\eta^4 S + 12\eta^4 + 84\eta^3 S\beta - 21\eta^3 S^2\beta - 84\eta^3\beta - 84\eta^2 S\beta^2 + \\ &\quad + 84\eta^2\beta^2 M - 21\eta^2 S^2\beta^2 - 42\eta^2 S\beta^2 M + 252\eta^2\beta^2 - 420\eta\beta^3 - 420\eta\beta^3 M - 420\eta\beta^3 S + \\ &\quad + 315\eta S^2\beta^3 + 210\eta\beta^3 MS + 560\beta^4 + 560\beta^4 M + 840S\beta^2 - 1680\beta^2), \\ \theta_0(\eta) &= 1, \end{aligned}$$

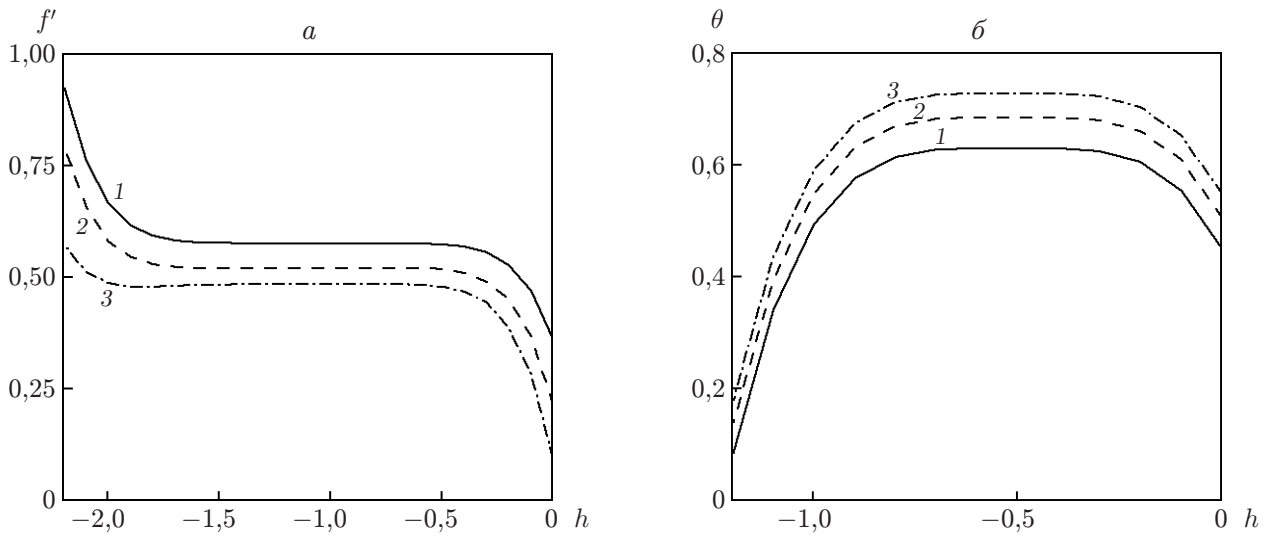


Рис. 2. Зависимости $f'(h)$ (а) и $\theta(h)$ (б), полученные с использованием приближения МГА 10-го порядка при $S = 1,2$, $Pr = 1,0$, $Ec = 0,02$, $N = 1,0$, $A^* = B^* = 0,05$, $\eta = 0,5$ и различных значениях M , β :
 1 — $M = 0$, $\beta = 1,12778$; 2 — $M = 1,0$, $\beta = 0,90388$; 3 — $M = 2,0$, $\beta = 0,77580$

$$\begin{aligned} \theta_1(\eta) = & \frac{h\eta^2}{16\beta^4} (2\eta^2 Pr S\beta^2 - 12\eta^2 Ec Pr S + 3\eta^2 Ec Pr S^2 - 4\eta^2 Pr \beta^2 + 2\eta^2 A^*\beta^2 - \\ & - \eta^2 A^* S\beta^2 + 12\eta^2 Ec Pr - 8\eta Pr S\beta^3 + 48\eta Ec Pr S\beta - 12\eta Ec Pr S^2\beta + 16\eta Pr \beta^3 - \\ & - 8\eta A^*\beta^3 + 4\eta A^* S\beta^3 - 48\eta Ec Pr \beta - 12 Pr S\beta^4 - 16 Pr \beta^4 + 8A^*\beta^4 - 72 Ec Pr S\beta^2 + \\ & + 8B^*\beta^4 + 18 Ec Pr S^2\beta^2 + 72 Ec Pr \beta^2). \end{aligned}$$

3. Исследование сходимости МГА. Для исследования сходимости полученного аналитического решения [23] построены кривые $f'(h)$ и $\theta(h)$, соответствующие 10-му порядку приближения этого решения (рис. 2).

4. Результаты исследования и их обсуждение. По-видимому, найти точное решение полной системы уравнений (3), (4) не представляется возможным вследствие нелинейности уравнений импульса и тепла пограничного слоя. Поэтому было использовано преобразование подобия, позволяющее преобразовать управляющие дифференциальные уравнения в частных производных для течения и теплообмена в систему нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений. Полученная краевая задача решалась с помощью МГА.

На рис. 3 показано влияние параметра магнитного поля M на осевую скорость при различных значениях S . Видно, что с увеличением значения параметра магнитного поля осевая скорость уменьшается. Это обусловлено тем, что приложенное поперечное магнитное поле приводит к возникновению сопротивления в виде силы Лоренца, вызывающей уменьшение скорости. Уменьшение горизонтальной скорости вследствие увеличения мощности магнитного поля происходит при обоих рассмотренных значениях $S = 0,8; 1,2$.

Влияние параметра магнитного поля на температуру показано на рис. 4. Видно, что с увеличением параметра магнитного поля температура увеличивается. Таким образом, охлаждение пленки является более эффективным в случае отсутствия магнитного поля.

На рис. 5 показано влияние числа Прандтля Pr на температуру при различных значениях S . Видно, что при $Pr = 1$ температура увеличивается от значения, равного температуре на свободной поверхности T_s , до значения, равного температуре в разрезе T_0 [24].

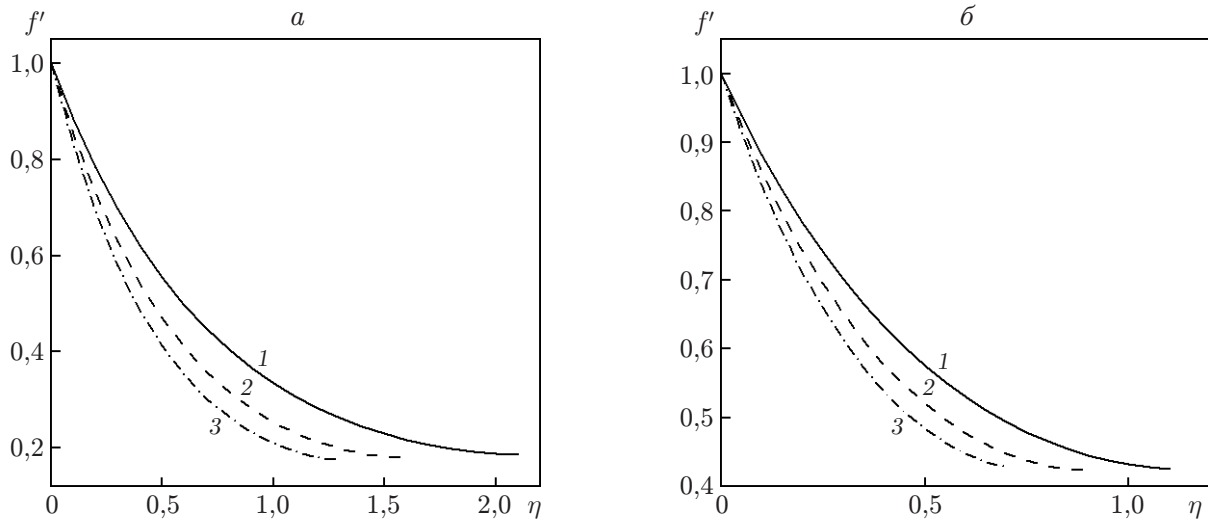


Рис. 3. Зависимость осевой скорости f' от переменной подобия η при различных значениях S , β , M :

a — $S = 0,8$ (1 — $M = 0$, $\beta = 2,15199$; 2 — $M = 1,0$, $\beta = 1,61688$; 3 — $M = 2,0$, $\beta = 1,25088$), b — $S = 1,2$ (1 — $M = 0$, $\beta = 1,12778$; 2 — $M = 1,0$, $\beta = 0,90388$; 3 — $M = 2,0$, $\beta = 0,77580$)

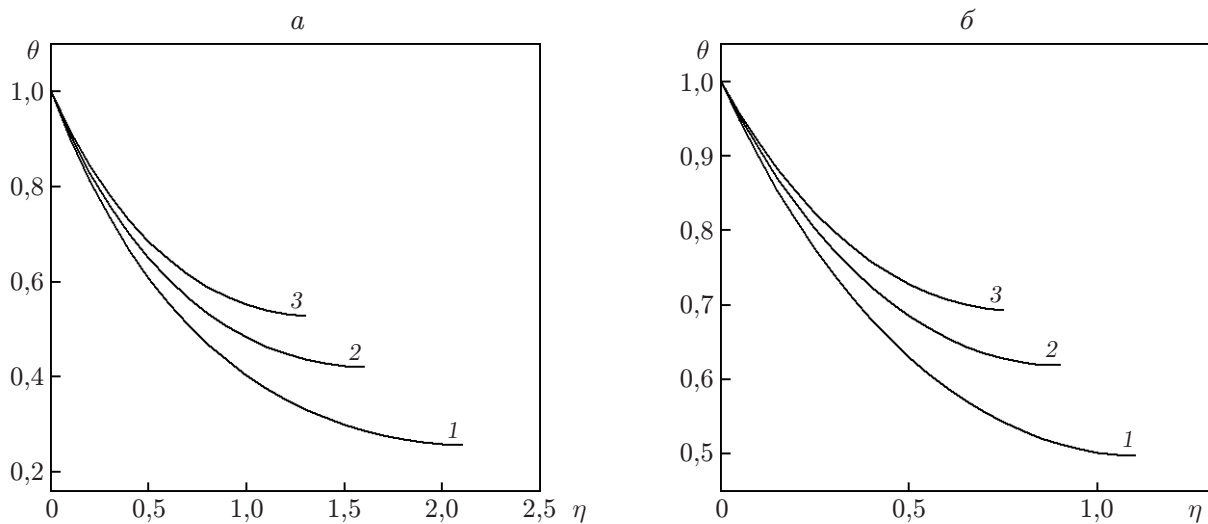


Рис. 4. Зависимость температуры θ от переменной подобия η при $\text{Pr} = 1,0$, $\text{Ec} = 0,02$, $N = 1,0$, $A^* = B^* = 0,05$ и различных значениях S , M , β :

a — $S = 0,8$ (1 — $M = 0$, $\beta = 2,15199$; 2 — $M = 1,0$, $\beta = 1,61688$; 3 — $M = 2,0$, $\beta = 1,35088$), b — $S = 1,2$ (1 — $M = 0$, $\beta = 1,12778$; 2 — $M = 1,0$, $\beta = 0,90388$; 3 — $M = 2,0$, $\beta = 0,77580$)

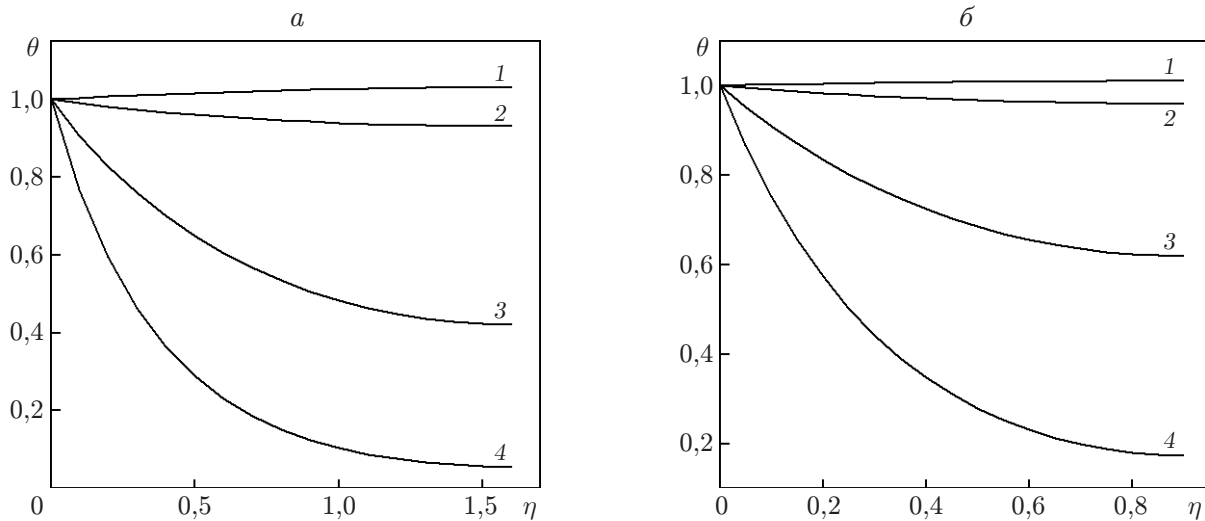


Рис. 5. Зависимость температуры θ от переменной подобия η при $M = 1,0$, $Ec = 0,02$, $N = 1,0$, $A^* = B^* = 0,05$ и различных значениях S , β , Pr :
 $a - S = 0,8$, $\beta = 1,61688$, $b - S = 1,2$, $\beta = 0,90388$; 1 — $Pr = 0,01$, 2 — $Pr = 0,1$, 3 — $Pr = 1,0$, 4 — $Pr = 5,0$

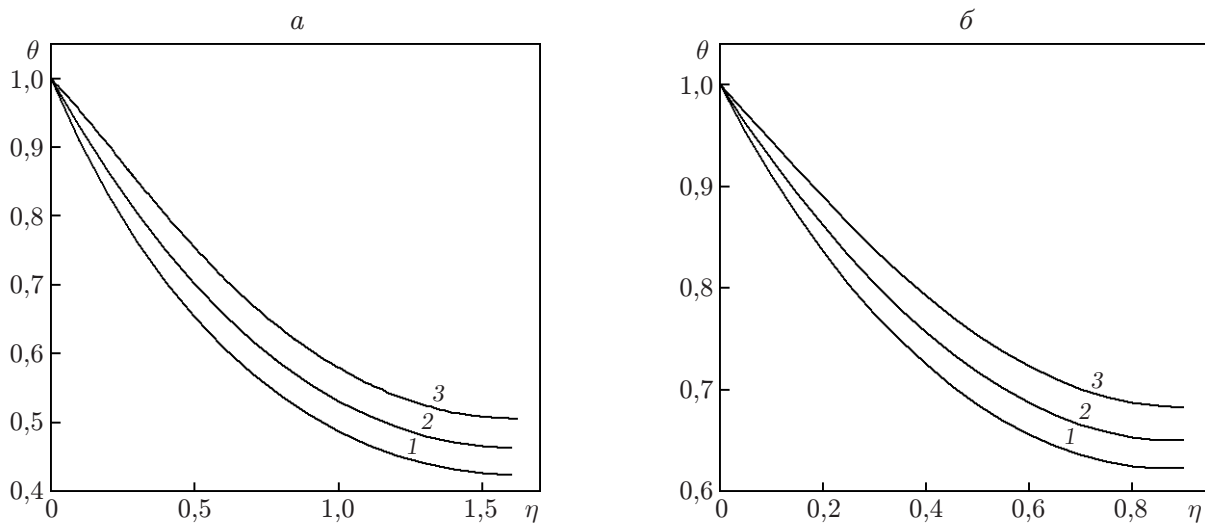


Рис. 6. Зависимость температуры θ от переменной подобия η при $M = 1,0$, $Pr = 1,0$, $N = 1,0$, $A^* = B^* = 0,05$ и различных значениях S , β , Ec :
 $a - S = 0,8$, $\beta = 1,61688$, $b - S = 1,2$, $\beta = 0,90388$; 1 — $Ec = 0,1$, 2 — $Ec = 1,0$, 3 — $Ec = 2,0$

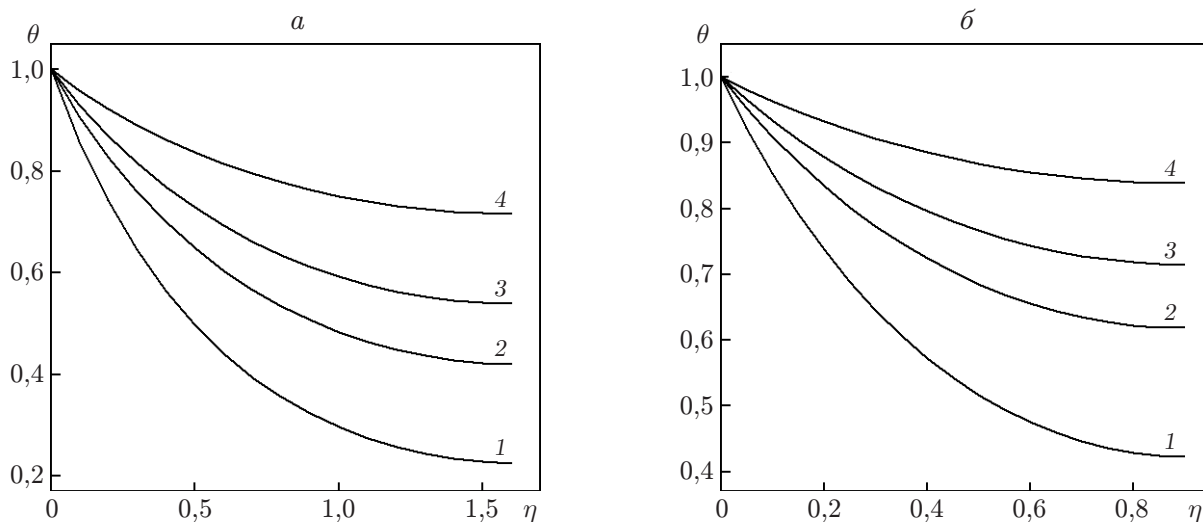


Рис. 7. Зависимость температуры θ от переменной подобия η при $M = 1,0$, $Ec = 0,02$, $Pr = 1,0$, $A^* = B^* = 0,05$ и различных значениях S , β , N :
a — $S = 0,8$, $\beta = 1,61688$, *б* — $S = 1,2$, $\beta = 0,90388$; 1 — $N = 0$, 2 — $N = 1,0$, 3 — $N = 2,0$, 4 — $N = 5,0$

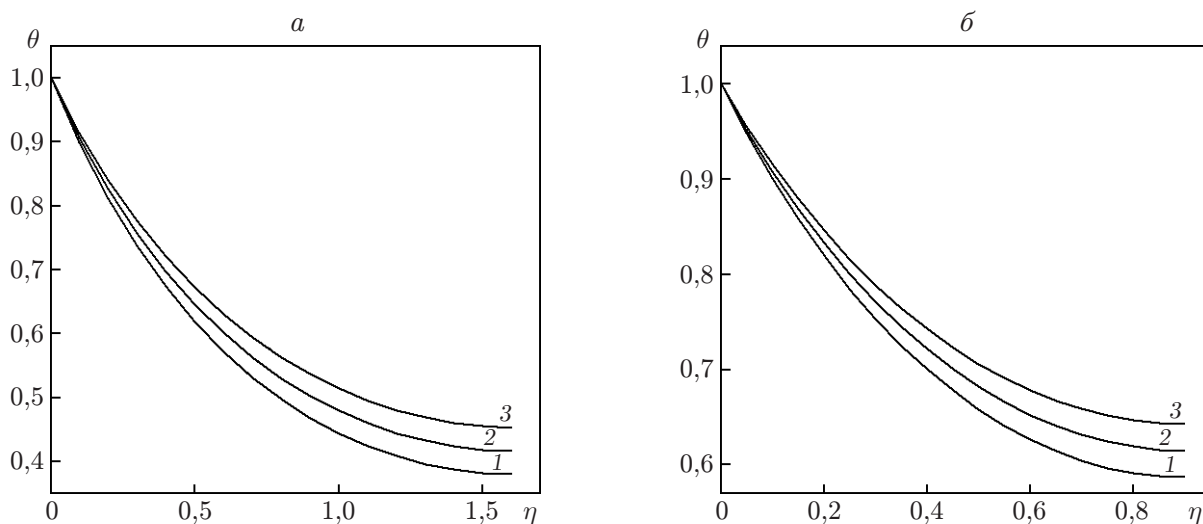


Рис. 8. Зависимость температуры θ от переменной подобия η при $M = 1,0$, $Ec = 0,02$, $Pr = 1,0$, $N = 1,0$, $B^* = 0,05$ и различных значениях S , β , A^* :
a — $S = 0,8$, $\beta = 1,61688$, *б* — $S = 1,2$, $\beta = 0,90388$; 1 — $A^* = -0,4$, 2 — $A^* = 0$, 3 — $A^* = 0,4$

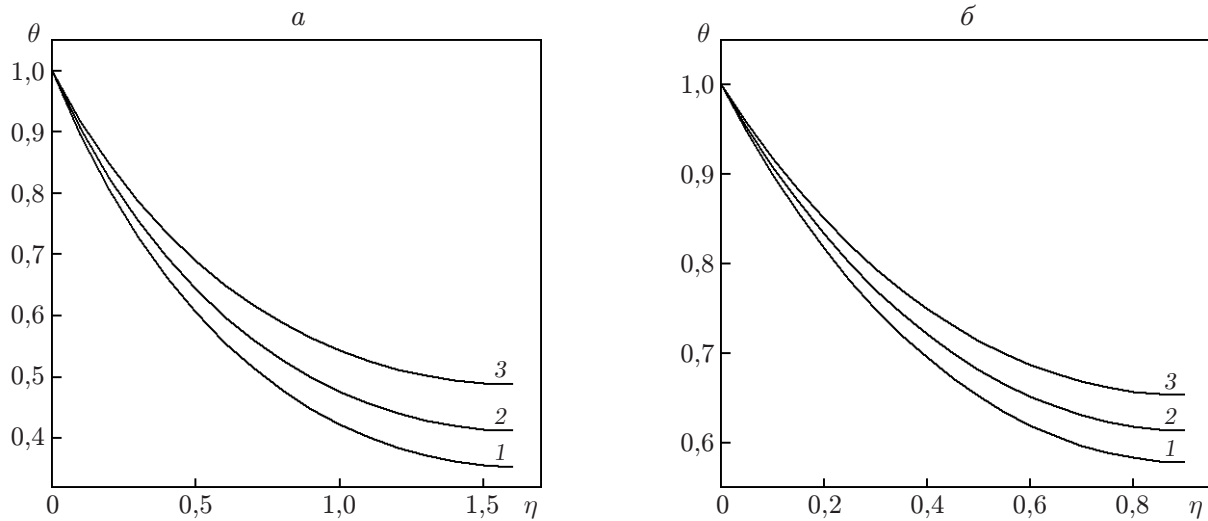


Рис. 9. Зависимость температуры θ от переменной подобия η при $M = 1,0$, $Ec = 0,02$, $Pr = 1,0$, $N = 1,0$, $A^* = 0,05$ и различных значениях S , β , B^* :
 а — $S = 0,8$, $\beta = 1,616\ 88$, б — $S = 1,2$, $\beta = 0,903\ 88$; 1 — $B^* = -0,4$, 2 — $B^* = 0$, 3 — $B^* = 0,4$

Таблица 1
 Значения коэффициента поверхностного трения $f''(0)$ при $M = 0$

S	Данные [2]*		Данные [26]		Данные настоящей работы	
	β	$f''(0)/\beta$	β	$f''(0)$	β	$f''(0)$
0,8	2,151 990	-1,245 795	2,151 990	-1,245 788	2,151 990	-1,245 805
1,0	1,543 620	-1,277 762	1,543 617	-1,277 769	1,543 617	-1,277 769
1,2	1,127 780	-1,279 177	1,127 780	-1,279 163	1,127 780	-1,279 171
1,4	0,821 032	-1,233 549	0,821 033	-1,233 545	0,821 033	-1,233 545
1,6	0,576 173	-1,114 937	0,576 176	-1,114 935	0,576 176	-1,114 940
1,8	0,356 389	-0,867 414	0,356 390	-0,867 521	0,356 390	-0,867 416

* В работе [2] использовано другое преобразование подобия. Значение $f''(0)/\beta$ в [2] эквивалентно значению $f''(0)$ в данной работе.

Таблица 2
 Значения температуры поверхности $\theta(\beta)$ и градиента температуры на стенке $-\theta'(0)$ при $S = 0,8$, $M = 0$, $N = 0$, $\beta = 2,151\ 99$, $A^* = B^* = 0$, $Ec = 0$

Pr	Данные [2]*		Данные [26]		Данные настоящей работы	
	$\theta(\beta)$	$-\theta'(0)/\beta$	$\theta(\beta)$	$-\theta'(0)$	$\theta(\beta)$	$-\theta'(0)$
0,01	0,960 480	0,042 042	—	—	0,960 496	0,042 033
0,10	0,692 533	0,351 378	—	—	0,692 627	0,351 331
1,00	0,097 884	1,670 913	0,097 825	1,671 919	0,097 942	1,670 989
2,00	0,024 941	2,436 884	0,024 869	2,443 914	0,024 883	2,443 863
3,00	0,008 785	3,027 170	0,008 324	3,034 915	0,008 319	3,036 114

* В работе [2] использовано другое преобразование подобия. Значение $-\theta'(0)/\beta$ в [2] эквивалентно значению $-\theta'(0)$ в данной работе.

Таблица 3

Значения температуры поверхности $\theta(\eta)$ при различных значениях управляющих параметров

M	Pr	Ec	N	A^*	B^*	$\theta(\eta)$		
						$S = 0,8$	$S = 1,2$	
0						0,257 963	0,496 334	
1	1,00	0,02	1	0,05	0,05	0,421 081	0,618 479	
2						0,527 499	0,693 305	
1	0,01	0,02	1	0,05	0,05	1,030 872	1,009 698	
	0,10					0,931 545	0,959 522	
	1,00					0,421 081	0,618 479	
	5,00					0,055 642	0,174 643	
1	1,00	0,10	1	0,05	0,05	0,424 503	0,621 082	
		1,00				0,463 002	0,650 364	
		2,00				0,505 779	0,682 901	
1	1,00	0,02	0	0,05	0,05	0,227 768	0,424 093	
			1			0,421 081	0,618 479	
			2			0,539 726	0,715 280	
			5			0,716 178	0,838 516	
1	1,00	0,02	1	-0,40	0,05	0,379 596	0,586 795	
				0		0,416 471	0,614 958	
				0,40		0,453 345	0,643 122	
1	1,00	0,02	1	0,05	-0,40	0,353 919	0,578 312	
						0	0,412 702	0,613 801
						0,40	0,487 824	0,652 868

На рис. 6 показано влияние числа Эккерта Ec на температуру при различных значениях параметра нестационарности S . Видно, что учет вязкости приводит к увеличению температуры жидкости и толщины теплового пограничного слоя. Таким образом, для более эффективного охлаждения пленки следует использовать жидкость с малой вязкостью.

Влияние параметра теплового излучения N на температуру при различных значениях S показано на рис. 7. Видно, что увеличение параметра теплового излучения N приводит к существенному увеличению толщины теплового пограничного слоя. Поскольку толщина теплового пограничного слоя является функцией всех других управляющих параметров теплообмена [25], с увеличением значений N температура увеличивается. Наличие теплового излучения приводит к увеличению скорости теплообмена.

На рис. 8, 9 показано влияние параметра источника (стока) тепла A^* , зависящего от пространственных координат, и параметра источника (стока) тепла B^* , зависящего от температуры, на температуру при различных значениях параметра нестационарности S . На рис. 8, 9 видно, что вследствие влияния параметров стока ($A^* < 0$, $B^* < 0$) температура жидкости уменьшается, тогда как в результате влияния параметров источника ($A^* > 0$, $B^* > 0$) увеличивается толщина температурного пограничного слоя. Следовательно, для эффективного охлаждения пластины следует использовать отвод тепла. Данные результаты хорошо согласуются с результатами работ [2, 26], полученными для предельного случая.

В табл. 1, 2 приведены значения коэффициента поверхностного трения, температуры поверхности и градиента температуры, полученные в данной работе, а также в работах [2, 26]. Из табл. 1, 2 следует, что результаты, полученные в настоящей работе, хорошо согласуются с данными [2, 26].

В табл. 3 приведены значения температуры поверхности $\theta(\eta)$ при различных значениях параметров M , Pr , Ec , N , A^* , B^* . Из табл. 3 следует, что с увеличением M , Ec , N , A^* , B^* температура поверхности увеличивается, тогда как с увеличением Pr она уменьшается.

Закключение. В работе проведено исследование влияния вязкости, неоднородного источника (стока) тепла и теплового излучения в тонкой пленке жидкости на нестационарно растягивающейся пластине при наличии магнитного поля. Решения задачи получены аналитически методом гомотопического анализа. Проведенное исследование позволяет сделать следующие выводы.

С увеличением параметра поперечного магнитного поля M скорость уменьшается, что приводит к увеличению температуры поверхности.

Наличие вязкости приводит к увеличению температуры поверхности вследствие увеличения напряжения сдвига на ней.

Увеличение параметра теплового излучения N приводит к существенному увеличению температуры поверхности при наличии неоднородного источника (стока) тепла.

Полученные значения коэффициента поверхностного трения и температуры поверхности хорошо согласуются с известными результатами исследований, что свидетельствует об эффективности использования МГА при решении задачи о течении в пленке жидкости на нестационарно растягивающейся поверхности.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Sparrow E. M., Gregg J. L.** A boundary-layer treatment of laminar film condensation // Trans. ASME. J. Heat Transfer. 1959. V. 81. P. 13–18.
2. **Wang C.** Analytic solutions for a liquid film on an unsteady stretching surface // Heat Mass Transfer. 2006. V. 42. 759766.
3. **Alizadeh-Pahlavan A., Sadeghy K.** On the use of homotopy analysis method for solving unsteady MHD flow of Maxwellian fluids above impulsively stretching sheets // Comm. Nonlinear Sci. Numer. Simulat. 2009. V. 14. P. 1355–1365.
4. **Noor N. F. M., Hashim I.** Thermocapillarity and magnetic field effects in a thin liquid film on an unsteady stretching surface // Intern. J. Heat Mass Transfer. 2010. V. 53. P. 2044–2051.
5. **Ziabakhsh Z., Domairry G., Mozaffari M., Mahbobifar M.** Analytical solution of heat transfer over an unsteady stretching permeable surface with prescribed wall temperature // J. Taiwan Inst. Chem. Engrs. 2010. V. 41. P. 169–177.
6. **Abbasbandy S., Hayat T.** On series solution for unsteady boundary layer equations in a special third grade fluid // Comm. Nonlinear Sci. Numer. Simulat. 2010. V. 16. P. 3140–3146.
7. **Talebizadeh P., Moghimi M. A., Kimiaefar A., Ameri M.** Numerical and analytical solutions for natural convection flow with thermal radiation and mass transfer past a moving vertical porous plate by DQM and HAM // Intern. J. Comput. Methods. 2011. V. 8, N 3. P. 611–631.
8. **Motsa S. S.** Application of the new spectral homotopy analysis method (SHAM) in the nonlinear heat conduction and convective fin problem with variable thermal conductivity // Intern. J. Comput. Methods. 2012. V. 9, N 3. 1250039.
9. **Ali A., Mehmood A.** Homotopy analysis of unsteady boundary layer flow adjacent to permeable stretching surface in a porous medium // Comm. Nonlinear Sci. Numer. Simulat. 2008. V. 13. P. 340–349.
10. **Sajid M., Hayat T.** The application of homotopy analysis method for MHD viscous flow due to a shrinking sheet // Chaos, Solitons Fractals. 2009. V. 39. P. 1317–1323.

11. **Hayat T., Abbas Z., Sajid M.** MHD stagnation-point flow of an upper-convected Maxwell fluid over a stretching surface // *Chaos, Solitons Fractals*. 2009. V. 39. P. 840–848.
12. **Abbas Z., Hayat T., Sajid M., Asghar S.** Unsteady flow of a second grade fluid film over an unsteady stretching sheet // *Math. Comput. Modelling*. 2008. V. 48. P. 518–526.
13. **Wang C., Pop I.** Analysis of the flow of a power-law fluid film on an unsteady stretching surface by means of homotopy analysis method // *J. Non-Newtonian Fluid Mech.* 2006. V. 138. P. 161–172.
14. **Zheng L., Wang L., Zhang X.** Analytic solutions of unsteady boundary flow and heat transfer on a permeable stretching sheet with non-uniform heat source/sink // *Comm. Nonlinear Sci. Numer. Simulat.* 2011. V. 16. P. 731–740.
15. **Sajid M., Hayat T., Asghar S.** Non-similar analytic solution for MHD flow and heat transfer in a third-order fluid over a stretching sheet // *Intern. J. Heat Mass Transfer*. 2007. V. 50. P. 1723–1736.
16. **Elsayed M. A., Elbashbeshy T. G., Emam K. M., Abdelgaber K. M.** Effects of thermal radiation and magnetic field on unsteady mixed convection flow and heat transfer over an exponentially stretching surface with suction in the presence of internal heat generation/absorption // *J. Egyptian Math. Soc.* 2012. V. 20. P. 215–222.
17. **Tabaei H., Moghimi M. A., Kimiaefar A., Moghimi M. A.** Homotopy analysis and differential quadrature solution of the problem of free-convective magnetohydrodynamic flow over a stretching sheet with the Hall effect and mass transfer taken into account // *J. Appl. Mech. Tech. Phys.* 2011. V. 52, N 4. P. 624–636.
18. **Kandasamy R., Muhaimin I.** Homotopy analysis method for thermophoretic particle deposition effect on magnetohydrodynamic mixed convective heat and mass transfer past a porous wedge in the presence of suction // *J. Appl. Mech. Tech. Phys.* 2010. V. 51, N 2. P. 249–260.
19. **Shabani Shahrababaki A., Abazari R.** Perturbation method for heat exchange between a gas and solid particles // *J. Appl. Mech. Tech. Phys.* 2009. V. 50, N 6. P. 959–964.
20. **Sadri S., Babaelahi M.** Analysis of a laminar boundary layer flow over a flat plate with injection or suction // *J. Appl. Mech. Tech. Phys.* 2013. V. 54, N 1. P. 59–67.
21. **Husnain S., Mehmood A., Ali A.** Heat and mass transfer analysis in unsteady boundary layer flow through porous media with variable viscosity and thermal diffusivity // *J. Appl. Mech. Tech. Phys.* 2012. V. 53, N 5. P. 722–732.
22. **Liao S. J.** *Beyond perturbation: introduction to the homotopy analysis method.* Boca Raton: Chapman and Hall: CRC Press, 2003.
23. **Liao S. J.** *A kind of linear invariance under homotopy and some simple applications of it in mechanics: Bericht / Inst. fuer Sciffbau der Univ. Hamburg.* N 520. Hamburg, 1992.
24. **Anderson H. I., Aarseth J. B., Dandapat B. S.** Heat transfer in a liquid film on an unsteady stretching surface // *Intern. J. Heat Mass Transfer*. 2000. V. 43. P. 69–74.
25. **Siddheshwar P. G., Mahabaleswar U. S.** Effects of radiation and heat source on MHD flow of a viscoelastic liquid and heat transfer over a stretching sheet // *Intern. J. Non-Linear Mech.* 2005. V. 40. P. 807–820.
26. **Nandeppanavar M. M., Vajravelu K., Subhas Abel M., et al.** Heat transfer in a liquid film over an unsteady stretching sheet // *Intern. J. Heat Mass Transfer*. 2012. V. 55. P. 1316–1324.

*Поступила в редакцию 29/VII 2013 г.,
в окончательном варианте — 17/X 2013 г.*