

УДК 539.3

ТОЧНЫЕ И ПРИБЛИЖЕННЫЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ ПРОГИБОВ УПРУГО ЗАКРЕПЛЕННОГО СТЕРЖНЯ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ПОПЕРЕЧНОЙ НАГРУЗКИ

Ю. В. Захаров, К. Г. Охоткин*, Н. В. Филенкова**, А. Ю. Власов**

Институт физики им. Л. В. Киренского СО РАН, 660036 Красноярск

* Сибирский государственный аэрокосмический университет, 660014 Красноярск

** Сибирский государственный технологический университет, 660049 Красноярск

E-mail: vay@atomlink.ru

Приведено точное решение задачи нелинейного изгиба тонкого упруго закрепленного на одном конце стержня приложенной на свободном конце поперечной сосредоточенной нагрузки постоянного направления. Решение записано в параметрическом виде и выражено через эллиптические функции Якоби. На основе точных решений получены приближенные формулы для стрелы прогиба стержня.

Ключевые слова: изгиб стержней, упругое закрепление, эллиптические функции Якоби.

Введение. Задачи геометрически нелинейного изгиба тонких стержней в общей постановке рассмотрены в [1, 2], задачи изгиба стержней на упругих опорах и упругом основании — в работах [3, 4]. В [5, 6] развита теория геометрически нелинейного изгиба тонких стержней. В работе [6] аналитически найдены и систематизированы формы изгиба стержня при различных нагрузках постоянного направления и способах закрепления концов стержня. Полученные решения записаны в параметрическом виде и выражены через эллиптические интегралы и функции Якоби, зависящие от одного параметра — модуля эллиптических функций, определяемого граничными условиями и внешней действующей силой, в отличие от работ [1, 2], где решения зависели от трех параметров. В [7] вычислены критические нагрузки и найдены равновесные формы стержня, жестко защемленного на одном конце и свободного на другом, при нагружении следящей сосредоточенной силой. Однако в указанных работах не учитывается возможность упругого закрепления стержня, что ограничивает область применения полученных результатов.

В настоящей работе рассматривается случай, когда стержень упруго закреплен на одном конце и свободен на другом. Построено точное аналитическое решение задачи о нелинейном изгибе такого стержня при нагружении свободного конца поперечной силой постоянного направления. Вычислены критические нагрузки и найдены равновесные формы изогнутого стержня. Получены приближенные формулы для стрелы прогиба.

1. Решение задачи об изгибе упруго закрепленного стержня. Рассмотрим тонкий нерастяжимый стержень длиной L с изгибной жесткостью EI . Выберем декартову систему координат xy , так чтобы изначально прямой стержень был расположен вдоль

Работа выполнена при финансовой поддержке Красноярского краевого фонда науки (грант № 15G107) и в рамках Программы Министерства образования Российской Федерации “Развитие научного потенциала высшей школы” (№ 4418).

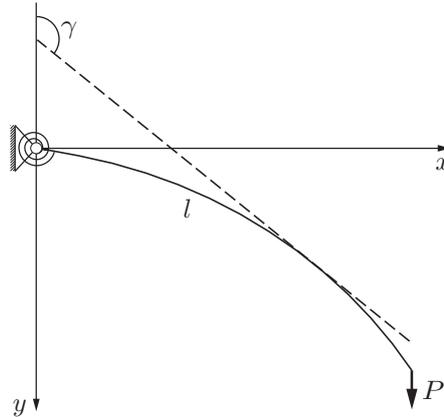


Рис. 1. Система координат

оси x , упруго закреплён на левом конце в начале координат и свободен на правом конце (рис. 1).

Стержень изгибается поперечной силой P , сосредоточенной на правом конце стержня, направление действия которой не меняется. Обозначим через l длину дуги стержня от левого конца до текущей точки, через $\gamma(l)$ — угол между касательной в текущей точке к линии стержня и отрицательным направлением оси y . Тогда согласно [6] уравнение равновесия стержня записывается в виде

$$\frac{d^2\gamma}{dt^2} + q^2 \sin \gamma = 0, \quad (1)$$

где $t = l/L$ — безразмерная длина, изменяющаяся от 0 до 1; $q^2 = PL^2/(EI)$ — собственное число; P — модуль сосредоточенной силы.

На упруго закреплённом конце стержня имеем граничное условие третьего рода

$$\gamma(0) - h \frac{d\gamma(0)}{dt} = \frac{\pi}{2}, \quad (2)$$

где $h = EI/(cL)$ — коэффициент упругого закрепления, определяемый свойствами заделки и стержня; c — модуль кручения, определяемый упругими свойствами заделки [3, 8]. Введённый таким образом коэффициент h позволяет получить известное граничное условие для защемленного конца [6] в случае, если модуль кручения c велик ($h \rightarrow 0$). В случае, если модуль кручения c мал ($h \rightarrow \infty$), с помощью предельного перехода можно получить граничное условие для шарнирно закреплённого конца.

На свободном конце стержня изгибающий момент отсутствует:

$$\frac{d\gamma(1)}{dt} = 0. \quad (3)$$

Согласно [6] решение уравнения (1) записывается в виде

$$\gamma = 2 \arcsin [k \operatorname{sn}(qt + F_1)], \quad (4)$$

где sn — эллиптический синус Якоби; связь с силой P модуля эллиптических функций k и параметра F_1 (констант интегрирования) определяется из граничных условий.

Введем обозначение для аргумента эллиптических функций

$$u = qt + F_1. \quad (5)$$

Используя граничное условие (2), получим трансцендентное уравнение для нахождения константы интегрирования F_1 :

$$2 \arcsin (k \operatorname{sn} F_1) - 2hkq \operatorname{cn} F_1 = \pi/2. \quad (6)$$

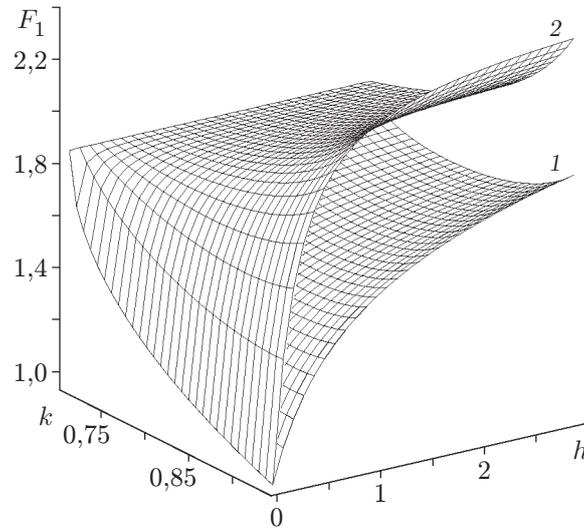


Рис. 2. Зависимость константы интегрирования F_1 от эллиптического модуля k и коэффициента упругого закрепления h для первой и второй мод:
1 — $n = 1$; 2 — $n = 2$

Из условия (3) следует, что $\operatorname{sn}(q + F_1) = 0$, откуда

$$q = (2n - 1)K(k) - F_1 \quad (7)$$

($n = 1, 2, 3, \dots$ — номер моды решения; $K(k)$ — полный эллиптический интеграл первого рода). Из системы уравнений (6), (7) находится спектр собственных значений $q_n(k)$, который, в свою очередь, определяет выражение для приведенных нагрузок в соответствии с номером моды n :

$$P/P_c \equiv (2/\pi)^2 q^2 = (2/\pi)^2 [(2n - 1)K(k) - F_1]^2. \quad (8)$$

Здесь $P_c = (\pi/2)^2 EI/L^2$ — эйлерова критическая сила. Выражение (8) имеет такую же структуру, что и выражение для приведенных нагрузок стержня с защемленным концом при нагружении силой постоянного направления [6]. В случае поперечного нагружения параметр k изменяется в диапазоне $1/2 \leq k^2 \leq 1$. Параметр F_1 находится при численном решении системы уравнений (6), (8), когда заданы значения эллиптического модуля k и коэффициента h . Для различных диапазонов нагрузки P/P_c , находящихся между последовательными порогами, которые могут быть определены из линейного приближения, получаем серию поверхностей, “склеенных” по двум линиям: 1) при пороговом значении модуля $k^2 = 1/2$; 2) при $h = 0$. На рис. 2 представлены поверхности для мод $n = 1, 2$.

В случае жесткого защемления, которому соответствует линия $h = 0$ на рис. 2, значение параметра F_1 определяется выражением [6] $F_1 = F[\arcsin(\sqrt{2}/2k), k]$. При $k^2 = 1/2$, что соответствует пороговым нагрузкам, и любом коэффициенте упругого закрепления h (линия $k = \sqrt{2}/2$ на рис. 2) $F_1 = K(\sqrt{2}/2)$. Тогда из (8) следует выражение для пороговых нагрузок, определяемых номером моды n [6]:

$$P_n/P_c = (n - 1)^2 [(4/\pi)K(\sqrt{2}/2)]^2 \approx 5,6(n - 1)^2. \quad (9)$$

На рис. 3 представлена зависимость приведенной нагрузки (8) от эллиптического модуля k при различных значениях h для первой и второй мод. С увеличением значений коэффициента h для первой и второй мод поверхности располагаются ниже, чем при $h = 0$. Это означает, что в случае упругого закрепления прогибы одной и той же величины достигаются при нагрузках, меньших, чем в случае защемленного стержня.

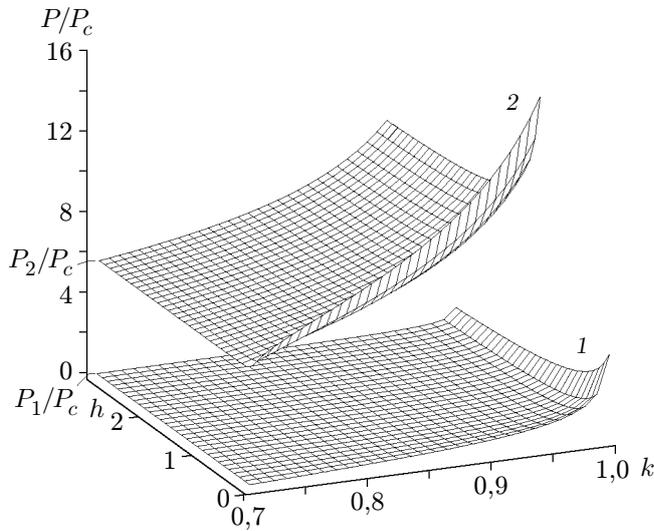


Рис. 3

Рис. 3. Спектр собственных значений уравнения равновесия упруго закрепленного стержня при поперечном нагружении для первой и второй мод:

1 — $n = 1$; 2 — $n = 2$

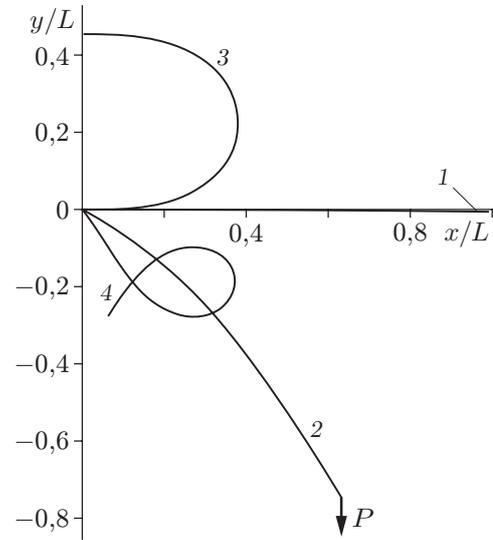


Рис. 4

Рис. 4. Формы прогиба консоли при $h = 0,4$ и различных значениях нагрузки P/P_c :

1, 2 — первая мода (1 — $P/P_c = 0,004$; 2 — $P/P_c = 0,79$); 3, 4 — вторая мода (3 — $P/P_c = 5,58$; 4 — $P/P_c = 15,48$)

Интегрируя с учетом (5) соотношения $dx/dl = \sin \gamma$, $dy/dl = \cos \gamma$, получим выражения для координат произвольной точки стержня:

$$\frac{x}{L} = \frac{2k}{(2n-1)K(k) - F_1} (\operatorname{cn} F_1 - \operatorname{cn} u),$$

$$\frac{y}{L} = t - \frac{2}{(2n-1)K(k) - F_1} (E(\operatorname{am} u, k) - E_1(k)),$$
(10)

где $E(\operatorname{am} u, k)$, $E_1(k) = E(\operatorname{am} F_1, k)$ — неполные эллиптические интегралы второго рода от эллиптической амплитуды; t — приведенная длина стержня. Выражения (10) задают в параметрическом виде форму профиля изогнутого стержня.

На рис. 4 показаны формы прогиба упруго закрепленного стержня для ряда значений приложенной силы при $h = 0,4$ для первой и второй мод.

1.1. *Координаты точек перегиба.* Точки, в которых обращается в нуль вторая производная d^2y/dx^2 , являются точками перегиба линии стержня. Обозначим через t_1 искомую криволинейную координату такой точки. Вычислим с учетом (4) вторую производную функции, описывающей линию изгиба стержня, заданной параметрическими уравнениями (9) вида $x = x(t)$, $y = y(t)$:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{x'y'' - y'x''}{x'^3} = \frac{1}{\sin^3 \gamma} \frac{d\gamma}{dt} = \frac{2kq \operatorname{cn} u}{\sin^3 \gamma}.$$

Учитывая свойства нулей эллиптического косинуса Якоби $\operatorname{sn} [(2m+1)K(k)] = 0$ и выражение (7) для собственного числа q , из последнего выражения получим

$$[(2n-1)K(k) - F_1]t_1 + F_1 = (2m+1)K(k),$$

где $n = 1, 2, 3, \dots$; m — номер нуля эллиптического косинуса, совпадающий с порядковым номером точки перегиба. В результате имеем

$$t_1^{nm} = \frac{(2m+1)K(k) - F_1}{(2n-1)K(k) - F_1}$$

(F_1 находится из уравнения (6)).

Число точек перегиба на моде равно номеру моды. Номер точки перегиба m зависит от номера моды решения и изменяется в диапазоне $0 \div n - 1$. На первой моде имеется одна точка перегиба на конце стержня: $t_1^{10} = 1$, на второй моде появляется вторая точка перегиба, которая перемещается вдоль стержня при $1/2 \leq k^2 \leq 1$, на третьей моде имеется три точки перегиба.

В работе [5] указаны координаты перемещающихся точек перегиба для жестко зашеченной консоли: при $n = 2$ в интервалах $0 \leq t_1^{20} \leq 1/3$, $t_1^{21} = 1$, при $n = 3$ в интервалах $0 \leq t_1^{30} \leq 1/5$, $1/2 \leq t_1^{31} \leq 3/5$, $t_1^{32} = 1$. Эти интервалы соответствуют случаю изгиба упруго закрепленной консоли при $h = 0$.

1.2. *Координаты точек сжатия.* Точками сжатия будем называть точки, в которых совпадают угол наклона касательной и угол наклона сжимающей силы к оси x . Искомую криволинейную координату такой точки обозначим через t_0 . Положив $\gamma(t_0) = 0$ в выражении для угла наклона касательной (4), найдем

$$0 = 2 \arcsin [k \operatorname{sn} (qt_0 + F_1)].$$

Тогда, учитывая свойства нулей эллиптического синуса $\operatorname{sn} [2mK(k)] = 0$ и выражение (7) для собственного числа q , получим

$$[(2n-1)K(k) - F_1]t_0 + F_1 = 2mK(k),$$

где $n = 1, 2, 3, \dots$; m — номер нуля эллиптического синуса, совпадающий с порядковым номером точки сжатия. В результате имеем

$$t_0^{nm} = \frac{2mK(k) - F_1}{(2n-1)K(k) - F_1}, \quad (11)$$

(F_1 находится из уравнения (6)).

Число точек сжатия на моде равно $n - 1$. Номер точки сжатия принимает значения $m = 1, \dots, n - 1$. На первой моде точки сжатия отсутствуют. При $n = 2$ имеется одна точка сжатия, которая при $1/2 \leq k^2 \leq 1$ лежит в интервале $1/2 \leq t_0^{21} \leq 2/3$; при $n = 3$ — две точки сжатия, лежащие в интервалах $1/4 \leq t_0^{31} \leq 2/5$, $3/4 \leq t_0^{32} \leq 4/5$.

На рис. 5 приведены зависимости координат точек перегиба и сжатия от силы P/P_c . Вертикальные линии на рис. 5 соответствуют пороговым значениям нагрузок (8). Горизонтальные линии соответствуют нижним границам интервалов изменения координат точек сжатия и перегиба. (Для всех этих линий $k^2 = 1/2$.) С увеличением значения h верхние границы интервалов изменения точек перегиба и сжатия уменьшаются и при $h \rightarrow \infty$ совпадают с нижними границами. Иными словами, координаты точек перегиба и сжатия при $h \rightarrow \infty$ не зависят от величины действующей силы и принимают значения $t_1^{nm} = m/(n-1)$, $t_0^{nm} = m/(2(n-1))$, соответствующие положению точек на оси консоли при пороговых нагрузках P_n/P_c . При любых значениях коэффициента h , действующей силы P/P_c и номера моды n у изогнутой консоли имеется точка перегиба, расположенная на свободном конце.

1.3. *Стрела прогиба.* Точное выражение для стрелы прогиба (прогиба конца стержня) имеет вид

$$f(k) \equiv \frac{y(1)}{L} = 1 - 2 \frac{E(k) - E_1(k)}{K(k) - F_1}, \quad (12)$$

где $E(k)$ — полный эллиптический интеграл второго рода.

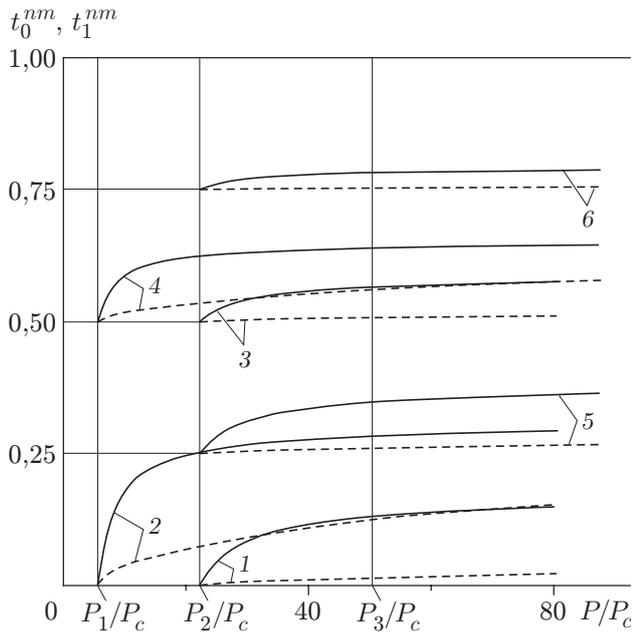


Рис. 5

Рис. 5. Зависимости координат точек перегиба t_1^{nm} и сжатия t_0^{nm} от поперечной нагрузки при различных значениях h :

сплошные линии — $h = 0$, штриховые линии — $h = 1, 2$; 1 — t_1^{30} ; 2 — t_1^{20} ; 3 — t_1^{31} ; 4 — t_0^{21} ; 5 — t_0^{31} ; 6 — t_0^{32}

Рис. 6. Зависимость стрелы прогиба от P/P_c при различных значениях h :

1 — $h = 0$; 2, 2' — $h = 0, 2$ (2' — приближение по формуле (31)); 3 — $h = 1, 2$; 4 — $h = 4, 5$; 5 — $h = 7$

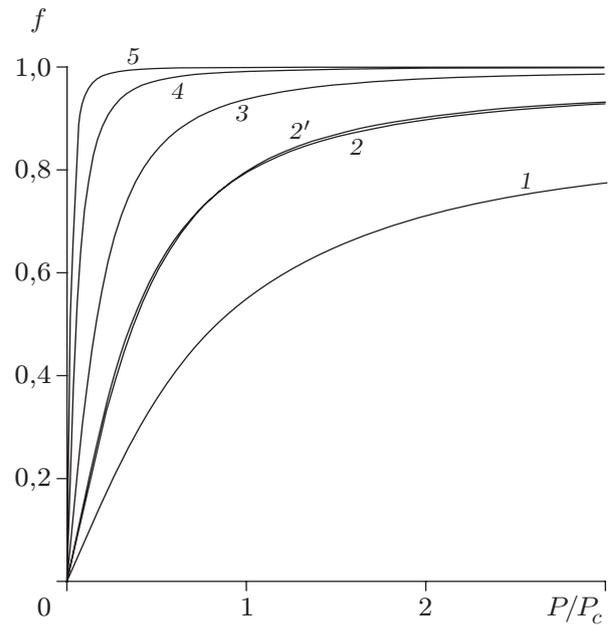


Рис. 6

На рис. 6 приведена зависимость стрелы прогиба от нагрузки при различных значениях коэффициента h . Видно, что при одних и тех же значениях нагрузки значение стрелы прогиба для упруго закрепленного стержня увеличивается с ростом h .

2. Приближенные зависимости для стрелы прогиба. Получим приближенные выражения для эллиптических интегралов, входящих в выражения для стрелы прогиба (12), для двух предельных значений коэффициента h . Рассмотрим выражение (6), определяющее параметр F_1 в случае первой моды.

2.1. *Случай малых значений коэффициента h ($h \rightarrow 0$).*

Положим в (6) $h = 0$, тогда $F_1 = F_0$, $F_0 = F(\arcsin[\sqrt{2}/(2k)])$. При малом положительном изменении коэффициента h в окрестности нуля F_1 можно представить в виде $F_1 = F_0 \pm \Delta F$, где ΔF — малая добавка. Разлагая члены выражения (6) в ряд Тейлора по малому параметру ΔF , имеем

$$\arcsin[k \operatorname{sn}(F_0 \pm \Delta F)] \approx \pi/4 \pm (4k^2 - 2)^{1/2} \Delta F/2,$$

$$\operatorname{cn}(F_0 \pm \Delta F) \approx (4k^2 - 2)^{1/2}/(2k) \mp (1/(2k)) \Delta F.$$

Подставляя эти разложения в (6) и учитывая, что $\Delta F \rightarrow 0$ при $h \rightarrow 0$, получаем приближенное выражение

$$F_1 \approx F_0 + (K(k) - F_0)h. \quad (13)$$

Учитывая, что $E_1 = E(\operatorname{am} F_1, k)$, и разлагая в ряд по малому параметру ΔF , получаем

$$E_1 \approx E_0 + (K(k) - F_0)h/2, \quad (14)$$

где $E_0 = E(\arcsin[\sqrt{2}/(2k)])$. Из выражений (12)–(14) получим приближенное выражение для стрелы прогиба упруго закрепленного стержня под действием поперечной нагрузки в случае малых значений коэффициента h :

$$f(k) \approx 1 - 2 \frac{(E(k) - E_0) - (K(k) - F_0)h/2}{(K(k) - F_0)(1 - h)}. \quad (15)$$

При $h \rightarrow 0$ соотношение (15) представляет собой выражение для стрелы прогиба жестко заземленного стержня при поперечном нагружении [9].

Используя результаты работы [9] для разложений разностей эллиптических интегралов $E(k) - E_0$, $K(k) - F_0$ в ряд по малому параметру $\xi = (k - \sqrt{2}/2)$ с учетом трех первых членов, получим приближенное выражение для стрелы прогиба:

$$f(k) \approx 1 - \frac{240 - 260\sqrt{2}\xi + 17\xi^2}{(240 + 60\sqrt{2}\xi + 497\xi^2 + \dots)(1 - h)} + \frac{h}{1 - h}. \quad (16)$$

Аналогично линеаризуем выражение (8) для приведенной нагрузки P/P_c . Учитывая приближенное выражение (13) для F_1 и вводя обозначение для приведенной нагрузки $\lambda \equiv P/P_c$, имеем

$$\lambda = (2/\pi)^2(1 - h)^2[K(k) - F_0]^2.$$

Используя результаты работы [9] для разложения $K(k) - F_0$ в ряд по малому параметру ξ до второго члена включительно, представим полученный результат в виде кубического уравнения

$$(\sqrt{\xi})^3 + 2^{3/2}\sqrt{\xi} - \pi\sqrt{\lambda}/(2^{3/4}(1 - h)) = 0. \quad (17)$$

Решая уравнение (17) с учетом $1/2 \leq k^2 \leq 1$ относительно $\sqrt{\xi}$ по формуле Ферро — Кардано и разлагая его в ряд по малому параметру λ , получаем приближенную зависимость параметра ξ от приведенной нагрузки λ :

$$\xi \approx \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \frac{\sqrt{2}}{(1 - h)^2} \left(\frac{\lambda}{8} - \frac{\lambda^2}{64(1 - h)^2} + \dots\right). \quad (18)$$

Подставляя (18) в (16), разлагая в ряд по малому параметру λ и учитывая два члена в разложении, получим приближенное выражение для стрелы прогиба в зависимости от приведенной нагрузки:

$$f(\lambda) \approx \frac{\pi^2}{12(1 - h)^3} \lambda + \frac{\pi^2(\pi^2 - 4)}{384(1 - h)^5} \lambda^2 + \dots \quad (19)$$

Линейный член в (19) в предельном случае абсолютно жесткой заделки переходит в известное в теории сопротивления материалов приближенное выражение для стрелы прогиба стержня под действием поперечной нагрузки. При малых значениях коэффициента h формула (19) может быть использована для определения величины прогибов, не превышающей 20 % длины стержня.

2.2. *Случай больших значений коэффициента h ($h \rightarrow \infty$).* Положим в (6) $h \rightarrow \infty$, тогда $F_1 = K(k)$. Следовательно, при бесконечно больших положительных значениях коэффициента h F_1 можно представить в виде $F_1 = K(k) \pm \Delta F$, где ΔF — малая добавка. Разлагая члены выражения (6) в ряд Тейлора по малому параметру ΔF , получаем

$$\begin{aligned} \arcsin [k \operatorname{sn}(K(k) \pm \Delta F)] &\approx \arcsin k - (1/2)k(1 - k^2)^{1/2}\Delta F, \\ \operatorname{cn}(K(k) \pm \Delta F) &\approx \mp(1 - k^2)^{1/2}\Delta F. \end{aligned}$$

Подставляя эти разложения в (6), имеем

$$\Delta F = \pm R/h^{1/2},$$

где $R = \sqrt{(\arcsin k - \pi/4)/(k\sqrt{1-k^2})}$.

Учитывая, что $F_1 = K(k) \pm \Delta F$, $E_1 = E(\operatorname{am} F_1, k)$, получаем приближенные выражения

$$F_1 = K(k) \pm R/h^{1/2}, \quad E_1 = E(k) \pm (1-k^2)R/h^{1/2}. \quad (20)$$

С учетом выражений (12), (20) приближенное выражение для стрелы прогиба упруго закрепленного стержня под действием поперечной нагрузки имеет вид

$$f(k) \approx 1 - 2(1-k^2). \quad (21)$$

Разложив выражение (21) в ряд по малому параметру ξ , получим

$$f(k) \approx 2\sqrt{2}\xi + 2\xi^2 + \dots \quad (22)$$

Из выражения (22) следует, что при $k^2 \rightarrow 1/2$ ($P \rightarrow 0$) параметр ξ и стрела прогиба стремятся к нулю, при $k^2 \rightarrow 1$ ($P \rightarrow \infty$) стрела прогиба согласно (21) равна единице.

Подставляя (20) в (8), находим

$$\lambda \approx 4R^2/(\pi^2 h). \quad (23)$$

Разлагая в ряд по малому параметру ξ до второго порядка, запишем выражение (23) в виде квадратного уравнения

$$\xi^2 + \sqrt{2}\xi - \pi^2 \lambda h/8 = 0. \quad (24)$$

Решая уравнение (24) относительно ξ и учитывая $1/2 \leq k^2 \leq 1$, получим выражение для ξ в зависимости от приведенной нагрузки:

$$\xi \approx (\sqrt{2}/2)(\sqrt{1 + \pi^2 \lambda h/4} - 1). \quad (25)$$

Подставив (25) в (22), найдем зависимость стрелы прогиба от приложенной силы при больших значениях коэффициента h и малых значениях нагрузки λ . Такой подход к линеаризации в данном случае позволяет получить только линейный член в разложении по λ :

$$f(\lambda) = (\pi^2 h/4)\lambda + \dots \quad (26)$$

2.3. *Случай малых значений нагрузок λ ($\lambda \rightarrow 0$).* Случай $\lambda \rightarrow 0$ эквивалентен предельным переходам $k^2 \rightarrow 1/2$ или $\xi \rightarrow 0$. Линеаризуем точное выражение (6) с учетом (7), выполнив разложение в ряд по малому параметру λ . Для этого в выражении (6) заменим q и F_1 , учитывая, что $\lambda = (2/\pi)^2 q^2$, $F_1 = K(k) - (\pi/2)\sqrt{\lambda}$ при $n = 1$. Получаем

$$2 \arcsin [k \operatorname{sn}(K - (\pi/2)\sqrt{\lambda})] - 2hk(\pi/2)\sqrt{\lambda} \operatorname{cn}(K - (\pi/2)\sqrt{\lambda}) = \pi/2. \quad (27)$$

Разложив выражение (27) в ряд по малым значениям λ и ограничившись в разложении линейным членом, получим приближенное выражение для приведенной нагрузки

$$\lambda \approx \frac{8(k - \sqrt{2}/2)}{\pi^2 k \sqrt{1-k^2} (\sqrt{2}h + \sqrt{1-k^2})}. \quad (28)$$

Выполнив разложение (28) в ряд в окрестности ξ до второго порядка малости, запишем полученный результат в виде квадратного уравнения относительно ξ :

$$\xi^2 + \frac{2h+1}{\sqrt{2}}\xi - \frac{\pi^2(2h+1)^2\lambda}{32} = 0. \quad (29)$$

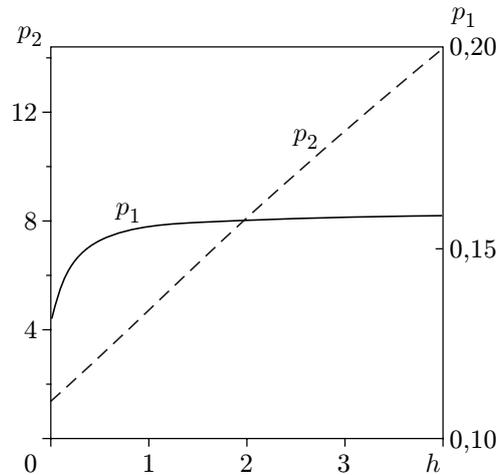


Рис. 7. Зависимости коэффициентов p_1, p_2 от h

Решая уравнение (29) относительно ξ и учитывая $1/2 \leq k^2 \leq 1$, получим выражение для ξ в зависимости от приведенной нагрузки:

$$\xi \approx \sqrt{2}(2h + 1)(\sqrt{1 + \pi^2\lambda/4} - 1)/4. \tag{30}$$

С учетом (7), (12) имеем зависимость стрелы прогиба от модуля k и приведенной нагрузки λ :

$$f(\lambda) = 1 - 4(E(k) - E(\text{am}[K(k) - (\pi/2)\sqrt{\lambda}]))/(\pi\sqrt{\lambda}). \tag{31}$$

Разлагая выражение (31) в ряд по малым параметрам ξ и λ и пренебрегая членами выше второго порядка малости, получим

$$f(\lambda) \approx -\frac{\pi^2\lambda}{24} + \left(-\frac{\pi^4\sqrt{2}\lambda^2}{240} + 2\sqrt{2}\right)\xi + \left(\frac{\pi^2\lambda}{3} + 2 - \frac{\pi^4\lambda^2}{240}\right)\xi^2 + \dots \tag{32}$$

С учетом (30), (32) находим приближенное выражение для стрелы прогиба в случае малых нагрузок λ и любых значений коэффициента h :

$$f(\lambda) \approx \frac{\pi^2(3h + 1)}{12} \lambda + \frac{\pi^4(64h^2 - 1)}{256} \lambda^2 + \dots \tag{33}$$

Выражение (33) является обобщением приближенных результатов (19) и (26) на случай произвольных h . Зависимость (19) более точно, чем (33), описывает стрелу прогиба при малых значениях коэффициента h .

На основе асимптотических приближений [9] предложим аппроксимационную зависимость стрелы прогиба от нагрузки, коэффициенты которой определены методом нелинейной регрессии для конкретных значений коэффициента h :

$$f(\lambda) = p_1(\exp(2(1 - 1/(p_2\lambda + 1))^2) - 1). \tag{34}$$

Зависимость коэффициентов p_1, p_2 от h в (34) показана на рис. 7 (средняя квадратичная ошибка не превышает 0,0004 для каждого случая). При определении по формуле (34) зависимости стрелы прогиба от нагрузки (при значениях нагрузок более трех критических) относительная ошибка составляет менее 3 %.

Заключение. С использованием подхода работы [6] получены точные аналитические выражения (10) для форм изгиба упруго закрепленного гибкого стержня при нагружении поперечной нагрузкой постоянного направления. Отличие от работ [5, 6] состоит в том,

что при упругом закреплении стержня решения для прогибов зависят не только от эллиптического модуля k , определяемого величиной внешней нагрузки, углом наклона силы и модой решения, но и от коэффициента упругого закрепления h . Получены приближенные выражения для стрелы прогиба упруго закрепленного стержня для предельных случаев.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Попов Е. П.** Теория и расчет гибких упругих стержней. М.: Наука, 1986.
2. **Попов Е. П.** Нелинейные задачи статики тонких стержней. Л.; М.: ОГИЗ, 1948.
3. **Тимошенко С. П., Янг Д. Х., Уивер У.** Колебания в инженерном деле. М.: Машиностроение, 1985.
4. **Вольмир А. С.** Устойчивость деформируемых систем. М.: Наука, 1967.
5. **Захаров Ю. В., Захаренко А. А.** Динамическая потеря устойчивости в нелинейной задаче о консоли // Вычисл. технологии. 1999. Т. 4, № 1. С. 48–54.
6. **Захаров Ю. В., Охоткин К. Г.** Нелинейный изгиб тонких упругих стержней // ПМТФ. 2002. Т. 43, № 5. С. 124–131.
7. **Захаров Ю. В., Охоткин К. Г., Скоробогатов А. Д.** Изгиб стержней под действием следящей нагрузки // ПМТФ. 2004. Т. 45, № 5. С. 167–175.
8. **Сейранян А. П.** Задача Лагранжа о наивыгоднейшем очертании колонны // Успехи механики. 2003. № 2. С. 45–96.
9. **Захаров Ю. В., Охоткин К. Г., Власов А. Ю.** Приближенные формулы для стрелы прогиба упругого стержня при поперечном нагружении // ПМТФ. 2002. Т. 43, № 5. С. 132–134.

*Поступила в редакцию 19/XII 2005 г.,
в окончательном варианте — 14/II 2006 г.*
