

УДК: 533.6.011.32:51

ИССЛЕДОВАНИЕ ПОЛЯ СКОРОСТЕЙ ГАЗОВОГО ПОТОКА, ДВИЖУЩЕГОСЯ ЗА ПОРШНЕМ В ПРЯМОУГОЛЬНОМ ПАТРУБКЕ

О.Г. КУДЕЛИН

Новосибирская государственная академия водного транспорта

Решается двумерная краевая задача течения нестационарного несжимаемого вязкого газа, движущегося за поршнем в «длинном» прямоугольном патрубке. Для двух компонент скорости с уточняющим полиномом конструируется аналитическое решение, которое после подстановки в определяющую систему уравнений сводится к системе нелинейных алгебраических уравнений. В силу единственности решения исследуемой краевой задачи, по полученным значениям констант уточняющего полинома для каждой точки внутриватрубкового пространства находится единственное решение для компонент скорости в аналитическом виде.

Снижение уровня загрязненности внутренних поверхностей цилиндра основного двигателя внутреннего сгорания (ДВС) и выхлопной трубы (в результате оседания капель воды и кристаллов солей) остается до сих пор весьма актуальной задачей. С этой целью предлагается увеличить продольную компоненту скорости газа в пристеночной области выхлопного канала. Для этого в нем можно использовать поршень, который приводится в движение вспомогательным двигателем. В настоящей работе исследуется динамика газа, движущегося за поршнем в «длинном» прямоугольном патрубке, имитирующем выхлопной канал.

Из научной литературы [1, 2] известно, что вязкость газа, а также геометрические параметры патрубка в отсутствие поперечной компоненты скорости в потоке на ее продольную компоненту существенного влияния не оказывают. Поэтому остается возможность повлиять на исследуемый процесс, например, создав поперечную компоненту скорости, и изучить ее влияние на перестройку продольной компоненты в потоке газа. Допустим, что существует возможность создать физические условия для возникновения необходимого профиля поперечной компоненты скорости в патрубке.

В настоящей работе предпринимается попытка исследования влияния профиля поперечной компоненты на возможность увеличения продольной компоненты скорости в пристеночной области. Поскольку в целом эта задача чрезвычайно сложна, и решить ее в общем виде весьма проблематично, то для качественного анализа упростим поставленную задачу.

Решается двумерная краевая задача движения нестационарного несжимаемого вязкого газа за поршнем в течение одного такта в «длинном» прямоугольном патрубке. При этом характерное время движения поршня в патрубке предполагается во много раз превосходящим длительность рабочего такта основного ДВС.

На рис. 1 представлена схема задачи. Внутри прямоугольного патрубка (1) равномерно движется поршень (2) с плоской поверхностью. В начальный момент

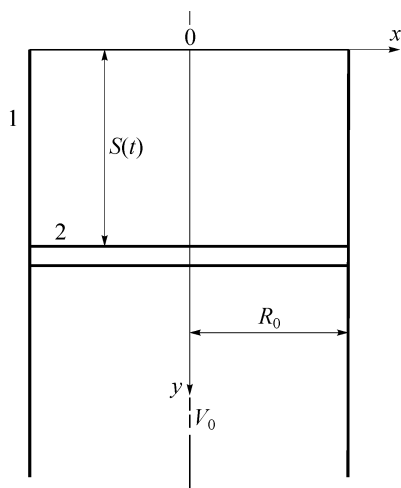


Рис. 1. Система координат с определяющими параметрами патрубка.
Патрубок (1), поршень (2).

времени поршень находится у верхней кромки патрубка, затем с постоянной скоростью V_0 он начинает двигаться вниз, увлекая за собой поток газа с вязкостью ν . Требуется проследить за динамикой поля скоростей этого потока.

Будем полагать, что средние параметры (значение давления среды — P_0 , ее плотность — ρ_0 и температура — T_0) и другие физические свойства газа нам известны.

Далее допустим, что $(L_x, L_y) \ll L_z$, где L_x, L_y, L_z — размеры патрубка по осям x, y и z соответственно. При введенном допущении исследуемую задачу можно рассматривать как двумерную. В этой связи будем полагать, что в любой точке патрубкового пространства воздушный поток имеет только две компоненты скорости $V_x(x, y)$ и $V_y(x, y)$, а $V_z(x, y) = 0$. Дополнительно примем следующие упрощения: поток газа ламинарный, и сила тяжести пренебрежимо мала.

При сделанных упрощениях исследуемый процесс описывается следующими уравнениями Навье–Стокса [1]:

– уравнением движения в проекции на ось OX

$$\begin{aligned} \partial V_x(x, y)/\partial t + V_x(x, y)\partial V_x(x, y)/\partial x + V_y(x, y)\partial V_x(x, y)/\partial y = \\ = \nu[\partial^2 V_x(x, y)/\partial x^2 + \partial^2 V_x(x, y)/\partial y^2] + \\ + \nu[\partial^2 V_x(x, y)/\partial x^2 + \partial^2 V_y(x, y)/\partial y\partial x]/3 - (1/\rho_0)\partial P(x, y)/\partial x; \end{aligned} \quad (1)$$

– уравнением движения в проекции на ось OY

$$\begin{aligned} \partial V_y(x, y)/\partial t + V_x(x, y)\partial V_y(x, y)/\partial x + V_y(x, y)\partial V_y(x, y)/\partial y = \\ = \nu[\partial^2 V_y(x, y)/\partial x^2 + \partial^2 V_y(x, y)/\partial y^2] + \\ + \nu[\partial^2 V_y(x, y)/\partial y^2 + \partial^2 V_x(x, y)/\partial y\partial x]/3 - (1/\rho_0)\partial P(x, y)/\partial y; \end{aligned} \quad (2)$$

– уравнением неразрывности

$$\partial V_x(x, y)/\partial x + \partial V_y(x, y)/\partial y = 0, \quad (3)$$

где ν — кинематическая вязкость.

Члены $\nu[\partial^2 V_x(x, y)/\partial x^2 + \partial^2 V_y(x, y)/\partial y\partial x]/3$ и $\nu[\partial^2 V_y(x, y)/\partial y^2 + \partial^2 V_x(x, y)/\partial y\partial x]/3$ в уравнениях (1), (2) согласно (3) тождественно равны 0. Поэтому их можно опустить.

Теперь сформулируем граничные условия для введенных компонент скоростей $V_x(x, y)$ и $V_y(x, y)$ в прямоугольной системе координат, показанной на рис. 1.

На стенках патрубка полагаем выполненными условия прилипания для обеих компонент скоростей:

$$V_x(R_0, y) = V_x(-R_0, y) = 0 \text{ и } V_y(R_0, y) = V_y(-R_0, y) = 0,$$

где R_0 — расстояние от центра канала до стенки патрубку.

На поверхности поршня для $V_x(x, y)$ -компоненты зададим условие прилипания $V_x(x, S(t)) = 0$, а величину $V_y(x, y)$ -компоненты положим равной скорости поршня — $V_y(x, S(t)) = V_0$.

Из условия перпендикулярности входа газового потока у верхней кромки патрубку полагаем $V_y(x, 0) = V_0$, а $V_x(x, 0) = 0$. Также будем полагать, что

$$V_x(0, y) = 0, \quad \partial V_y(0, y)/\partial x = 0.$$

Как известно, решение поставленной задачи в аналитическом виде до сих пор не найдено. В настоящей статье делается попытка отыскания аналитического решения для системы уравнений (1)–(3) с соответствующими краевыми условиями.

Введем в рассмотрение безразмерные комплексы:

$$x_1 = x/R_0, \quad y_1 = y/S(t), \quad W_x = V_x/V_0, \quad W_y = V_y/V_0, \quad t_1 = t/t_0, \quad P_1 = P/P_m, \quad (4)$$

и получим следующую модельную систему уравнений:

$$\begin{aligned} & \partial W_x(x_1, y_1)/\partial t_1 + \alpha(t_0)W_x(x_1, y_1)\partial W_x(x_1, y_1)/\partial x_1 + \\ & + \delta(t_1) [W_y(x_1, y_1)\zeta(t_1) - y_1]\partial W_x(x_1, y_1)/\partial y_1 - \\ & - \beta(t_1) [\partial^2 W_x(x_1, y_1)/\partial x_1^2 + \gamma(t_1)\partial^2 W_x(x_1, y_1)/\partial y_1^2] = \\ & = \eta \partial P_1(x_1, y_1)/\partial x_1, \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} & \partial W_y(x_1, y_1)/\partial t_1 + \alpha(t_0)W_x(x_1, y_1)\partial W_y(x_1, y_1)/\partial x_1 + \\ & + \delta(t_1)[W_y(x_1, y_1)\zeta(t_1) - y_1]\partial W_y(x_1, y_1)/\partial y_1 - \\ & - \beta(t_1)[\partial^2 W_y(x_1, y_1)/\partial x_1^2 + \gamma(t_1)\partial^2 W_y(x_1, y_1)/\partial y_1^2] = \eta \partial P_1(x_1, y_1)/\partial y_1, \\ & \alpha(t_1)\partial W_x(x_1, y_1)/\partial x_1 + \partial W_y(x_1, y_1)/\partial y_1 = 0, \end{aligned}$$

с принятыми обозначениями:

$$\begin{aligned} \alpha(t_1) &= S(t_1)/R_0, \quad \gamma(t_1) = (R_0/S(t_1))^2, \quad \beta(t_1) = vt_0/R_0^2, \quad \eta = P_m/(\rho_0 V_0^2), \\ S(t_1) &= V_0 t_1, \quad \delta(t_1) = (dS(t_1)/dt_1)t_0/S(t_1), \quad \zeta(t_1) = V_0/(dS(t_1)/dt_1), \end{aligned}$$

где $S(t_1)$ — ход поршня, P_m — максимальное давление.

При этом граничные условия будут иметь вид:

$$\begin{aligned} & \partial W_y(0, y_1)/\partial x_1 = 0, \quad W_y(1, y_1) = W_y(-1, y_1) = W_y(x_1, 0) = W_y(x_1, 1) = 1, \\ & W_x(0, y_1) = 0, \quad W_x(1, y_1) = W_x(-1, y_1) = 0, \quad W_x(x_1, 0) = W_x(x_1, 1) = 0, \end{aligned} \quad (6)$$

$$L = \{x_1 \in [-1, 1], y_1 \in [0, 1]\},$$

где L — область внутриватрубкового пространства.

Если предположить симметричность потока относительно оси OY , то тогда достаточно решить краевую задачу только для области

$$L1 = \{x_1 \in [0, 1], y_1 \in [0, 1]\}, \quad L1 \subset L.$$

Итак, система дифференциальных уравнений (5) совместно с краевыми условиями (6) является замкнутой как для области L , так и для области $L1$, следовательно, для каждой точки $(x_1, y_1) \in L1$ она имеет единственное решение [3, 4].

Предлагается следующий способ построения решения.

Используя безразмерные комплексы (4), решение системы уравнений (5) для компонент скоростей запишем в следующем виде:

$$\begin{aligned} W_x(x_1, y_1) &= A(x_1) T_x(t_1) \{G_x(y_1) H_x(x_1)\}, \\ W_y(x_1, y_1) &= -\alpha(t_1) A(x_1) T_y(t_1) \{G_y(y_1) H_y(x_1)\}, \end{aligned} \quad (7)$$

$$A(x_1) = \sum_{k=0}^N [C_k (x_k)^k], \quad (8)$$

где $A(x_1)$ — полином с набором неизвестных констант C_k , $G_x(y_1)$, $H_x(x_1)$, $G_y(y_1)$, $H_y(x_1)$, $T_x(t_1)$, $T_y(t_1)$ — экспериментальные непрерывные функции, удовлетворяющие граничным условиям исследуемой задачи.

Будем полагать, что перепад давлений в направлении движения поршня изменяется по линейному закону, хотя может быть использована любая другая аналитическая зависимость. В соответствии с этим предположением давление в любой точке патрубкового пространства с учетом приведения переменных к безразмерному виду может быть представлено в форме

$$P_1(x_1, y_1) = Q_1(x_1, y_1) + 1,$$

где

$$\begin{aligned} Q_1(x_1, y_1) &= [1 - y_1], \text{ при } 0 < y_1 < 1, \\ Q_1(x_1, y_1) &= 0, \text{ при } y_1 \leq 0 \text{ и } y_1 \geq 1. \end{aligned} \quad (9)$$

Такой подход к построению решения уже апробирован в работе [5], в которой получено удовлетворительное совпадение с экспериментальными данными. Поэтому есть определенные основания надеяться и на экспериментальное подтверждение результатов данного исследования.

Предлагаемое решение (7) обладает интересным свойством. Компонента скорости $W_x(x_1, 1/2) = 0$, $\forall x_1 \in [0, 1]$. Поэтому система уравнений (5) в сечении $y_1 = 1/2$ сводится к единственному уравнению вида

$$\beta \partial^2 W_y(x_1, 1/2) / \partial x_1^2 = \eta,$$

которое имеет аналитическое решение при условии удовлетворения граничным условиям (6) в следующей форме:

$$W_y(x_1, 1/2) = -(x_1^2 - 1)\eta / (2\beta). \quad (10)$$

Благодаря закону сохранения массы воздушного потока, имеем очевидное соотношение

$$\int_0^1 W_y(t, 0) dt = \int_0^1 W_y\left(t, \frac{1}{2}\right) dt,$$

поскольку при $y_1 = 1/2$ и $y_1 = 0$ $W_x(x_1, y_1) \equiv 0$.

Из выражения (9) сразу следует условие

$$\eta = 3\beta, \quad (11)$$

которое далее будет использовано при выполнении вычислительных процедур.

Потребуем, чтобы предполагаемое решение (7) с учетом (8), (9) для компонент скоростей $W_x(x_1, y_1)$, $W_y(x_1, y_1)$ удовлетворяло всем граничным условиям (6), а также уравнениям неразрывности и движения (5) как в любой фиксированной точке $s \in L1$, так и на границах патрубка. Тогда для каждого момента времени в точке $s(x_1, y_1) \in L1$ можно полагать ее координаты постоянными, а коэффициенты C_k в полиноме (8) неизвестными. В силу принятых предположений для выбранной точки система дифференциальных уравнений (5), (6) сведется к нелинейной алгебраической системе уравнений, в которой уже в роли переменных выступят не прежние переменные (x_1, y_1) , а введенные константы C_k .

Полученная таким образом алгебраическая система уравнений будет иметь, по крайней мере, одно вещественное решение в силу единственности решения краевой задачи (5), (6).

Далее, по найденным значениям констант определяются компоненты скоростей $W_x(x_1, y_1)$, $W_y(x_1, y_1)$ в выбранной точке. Проводя по указанной методике соответствующие расчеты для других точек, можно получить качественную картину поля скоростей газового потока.

Такой подход к решению поставленной задачи имеет преимущество перед традиционными численными методами конечных разностей [6], так как, в отличие от них, удачный выбор формы аналитического решения (7), предложенного автором, достигается непосредственно в самой точке.

На рис. 2. в качестве примера приведены результаты расчета для компонент скоростей $V_x(x_1, y_1)$, $V_y(x_1, y_1)$ при следующих условиях: $V_0 = 7$ м/с, $T_0 = 300$ К, $R_0 = 0,01$ м, $v = 10^{-6}$ м²/с, $t_0 = 1$ с, поршень за это время прошел путь $S(t_0) = 7$ м. Величину P_m/ρ_0 , согласно (11), примем, равной $1,47$ с²/м².

На всех представленных рисунках эпюры скоростей представляют собой непрерывные функциональные зависимости.

Из рис. 2, *a* видно, что в сечении $y_1 = 0,1$ эпюра скоростей $V_y(x_1, y_1)$ претерпевает незначительные изменения по сравнению с сечением $y_1 = 0$. Компонента $V_x(x_1, y_1)$ всюду по сечению отрицательна, т. е. направлена к оси патрубка.

При $0,1 < y_1 \leq 0,45$ (рис. 2, *b, c*) в потоке происходит перестройка продольной и поперечной компонент скоростей. Поперечная компонента скорости $V_x(x_1, y_1)$, сохраняя свой профиль и направление, сначала увеличивается, а затем уменьшается. При этом продольная компонента скорости $V_y(x_1, y_1)$ изменяет свой профиль: заметно увеличивается в пристеночной области и менее значительно изменяется в оставшейся части патрубка.

В диапазоне сечений $0,45 < y_1 \leq 0,5$ (рис. 2, *d, e*) продольная компонента скорости $V_y(x_1, y_1)$ уменьшается в пристеночной области и возрастает в центре патрубка.

Далее, при $0,5 < y_1 \leq 0,75$ (рис. 2, *f, h*) в потоке снова происходит перестройка продольной и поперечной компонент скоростей. Компонента $V_x(x_1, y_1)$ всюду по сечению положительна, т. е. направлена к стенке патрубка. При этом продольная компонента скорости $V_y(x_1, y_1)$ существенно увеличивается в пристеночной области.

Наконец, при $0,75 < y_1 \leq 1$ (рис. 2, *i*) поперечная компонента скорости $V_x(x_1, y_1)$, продолжая сохранять свой профиль и направление, уменьшается до нуля по всему сечению $y_1 = 1$, а эпюра продольной компоненты скорости $V_y(x_1, y_1)$ возвращается к первоначальному виду (как в сечении $y_1 = 0$).

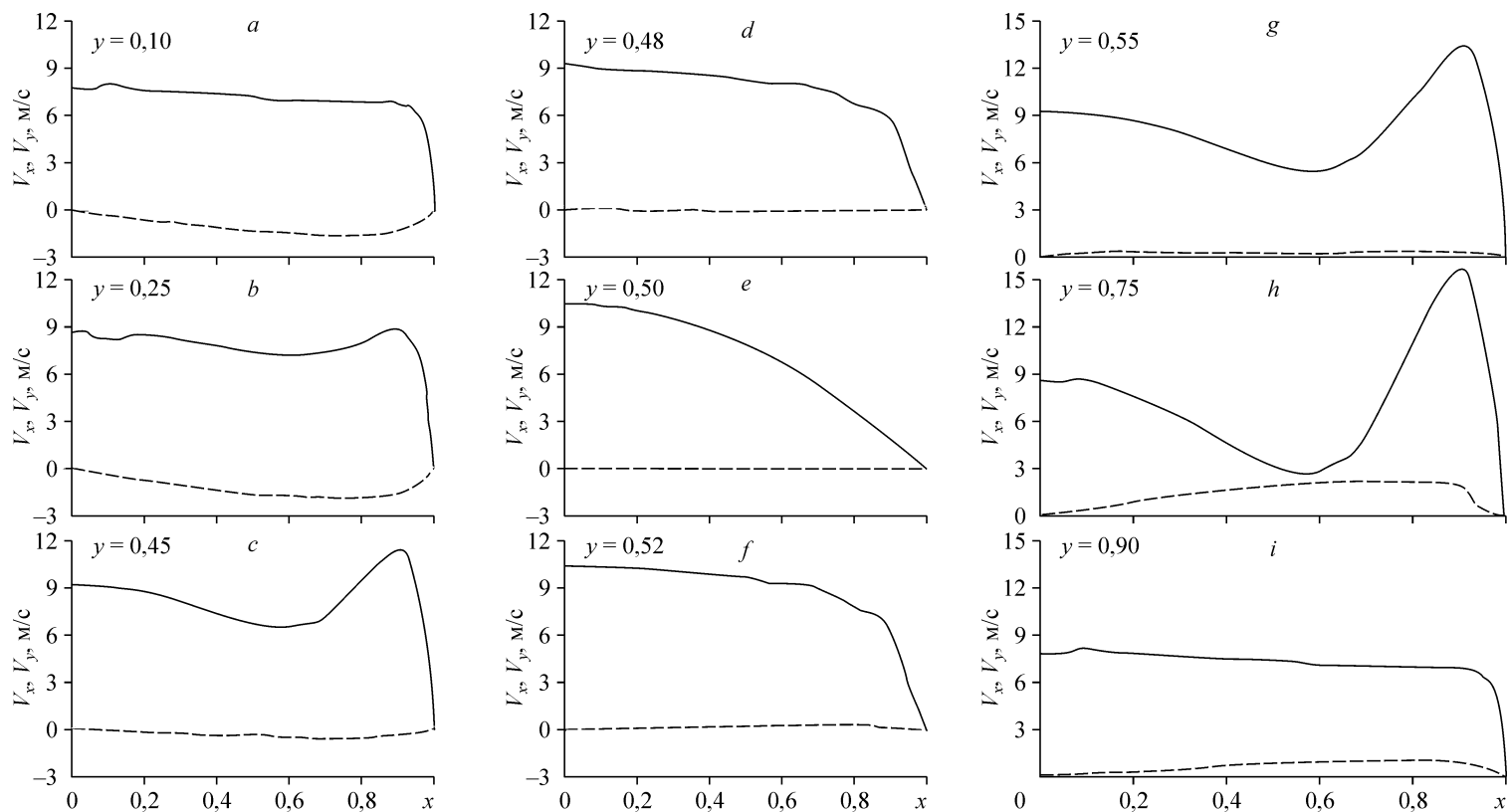


Рис. 2. Эпюры компонент скоростей в различных сечениях по оси OY .

$a-i$ — $y_1 = 0,1, 0,25, 0,45, 0,48, 0,5, 0,52, 0,55, 0,75, 0,9$. V_x — пунктирная линия, V_y — сплошная линия.

Качественный анализ полученных результатов показал, что продольный компонент скорости газа возрастает в пристеночной области патрубка всегда, когда появляется поперечный компонент, независимо от его направления.

В предлагаемой работе найдено аналитическое решение уравнений Навье–Стокса для ламинарного потока газа, движущегося за поршнем в прямоугольном патрубке. С помощью полученного решения показано, что задание в газовом потоке поперечный компонент скорости определенного профиля приводит к появлению хорошо заметного продольного пристеночного течения, в полтора–два раза превосходящего по скорости основной поток газа.

Это явление в принципе может быть использовано для уменьшения загрязнения стенок цилиндра внутреннего сгорания и выхлопного канала при условии его экспериментального подтверждения в реальных условиях.

Найденное аналитическое решение краевой задачи может быть использовано для исследования физических систем, более близких к реальным, а также для оптимизации профиля поперечного компонента скорости газа в этих системах с целью усиления обнаруженного эффекта.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. — М.: Наука, 1973. — 847 с.
2. Кочин Н.Е., Кибель И.А., Розе Н.В. Теоретическая гидродинамика. Ч. 2. — Гос. изд-во физ.-мат. литературы, 1963. — 727 с.
3. Павленко В.Г. Основы механики жидкости. — Л.: Изд-во "Судостроение", 1988. — 232 с.
4. Гольдштик М.А. Вихревые потоки. — М.: Наука, 1981. — 366 с.
5. Куделин О.Г., Лебедев О.Н. Решение уравнения вихревого движения вязкого газа в цилиндре ДВС в аналитическом виде // Теплофизика и аэромеханика. — 2005. — Т. 12, № 3. — С. 609–614.
6. Самарский А.А. Введение в численные методы. — М.: Наука, 1982. — 277 с.

Статья поступила в редакцию 15 декабря 2005 г.