УДК 517.9

ЗАДАЧИ ИДЕНТИФИКАЦИИ ДЛЯ СТАЦИОНАРНОЙ МОДЕЛИ МАССОПЕРЕНОСА

Г. В. Алексеев, О. В. Соболева, Д. А. Терешко

Институт прикладной математики ДВО РАН, 690041 Владивосток
E-mail: alekseev@iam.dvo.ru

Рассмотрены коэффициентные задачи идентификации для стационарной модели массопереноса в приближении Обербека — Буссинеска. Получены системы оптимальности, описывающие необходимые условия существования экстремума, и на основе анализа их свойств установлены условия, обеспечивающие единственность и устойчивость решения.

Ключевые слова: перенос масс, коэффициентная задача идентификации, единственность, устойчивость.

Введение. В последние годы в связи с необходимостью определения эффективных механизмов управления термогидродинамическими процессами в вязких жидкостях большое внимание уделяется исследованию задач оптимального управления для моделей тепломассопереноса. Теоретическому изучению указанных задач посвящено значительное количество работ (см., например, [1–4]).

Наряду с задачами оптимального управления большое значение имеют задачи идентификации для моделей тепло- и массопереноса — определение (по дополнительной информации о состоянии среды) неизвестных плотностей граничных или распределенных источников либо коэффициентов, входящих в дифференциальные уравнения или граничные условия рассматриваемой модели. Следует отметить, что решение задач идентификации сводится к исследованию соответствующих экстремальных задач при адекватном выборе минимизируемого функционала качества. Это позволяет исследовать задачи управления и задачи идентификации с единых позиций теории экстремальных задач условной оптимизации в гильбертовых пространствах.

Исследованию экстремальных задач восстановления плотностей источников посвящен ряд работ (см., например, [5–7]), коэффициентные задачи идентификации изучены значительно меньше. Отметим лишь работу [8], в которой наряду с задачами идентификации плотностей источников рассмотрена задача восстановления коэффициента граничного условия для модели тепловой конвекции.

1. Постановка основной краевой задачи. Целью настоящей работы является исследование задач идентификации для следующей модели массопереноса:

$$-\nu\Delta\boldsymbol{u} + (\boldsymbol{u}\cdot\operatorname{grad})\boldsymbol{u} + \operatorname{grad} p = \boldsymbol{f} + \beta_C C\boldsymbol{G}, \quad \operatorname{div}\boldsymbol{u} = 0 \text{ в } \Omega, \quad \boldsymbol{u}\big|_\Gamma = \boldsymbol{g}; \tag{1.1}$$

$$-\lambda\Delta C + \boldsymbol{u}\cdot\operatorname{grad} C + kC = f \text{ в } \Omega, \quad C\big|_{\Gamma_D} = \psi, \quad \lambda\Big(\frac{\partial C}{\partial n} + \alpha C\Big)\Big|_{\Gamma_N} = \chi. \tag{1.2}$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 06-01-96020-р-восток-а), Совета по грантам Президента РФ для государственной поддержки ведущих научных школ (грант № НШ-2810.2008.1) и в рамках грантов ДВО РАН (коды проектов 06-I-П22-086, 06-II-СО-03-010).

Здесь Ω — ограниченная область в $\mathbb{R}^d$ $(d = 2, 3)$ с липшицевой границей Γ, состоящей из двух частей Γ_D и Γ_N; $\boldsymbol{u}$, C — скорость и концентрация вещества в жидкости соответственно; $p = P/\rho$; P — давление; $\rho = \mathrm{const}$ — плотность среды; $\nu > 0$, $\lambda > 0$ — кинематическая вязкость и коэффициент диффузии, являющиеся постоянными; $\boldsymbol{f}$, f — объемные плотности источников массовых сил и вещества; $\boldsymbol{G} = -(0, 0, G)$ — вектор ускорения свободного падения; β_C, $\boldsymbol{g}$, k, ψ, α, χ — некоторые функции. Величины, входящие в (1.1), (1.2), являются размерными, причем уравнения модели записаны в системе единиц СИ.

В [6, 7] доказаны глобальная разрешимость и локальная единственность краевой задачи (1.1), (1.2), а также исследованы обратные экстремальные задачи восстановления неизвестных плотностей источников вещества и импульса. Данная работа посвящена исследованию коэффициентных задач идентификации для рассматриваемой модели массопереноса, а именно нахождению неизвестных коэффициентов α, k и плотности χ, а также решения $(\boldsymbol{u}, p, C)$ задачи (1.1), (1.2) по дополнительной информации об искомом решении. Сложность исследования задач идентификации обусловлена тем, что они характеризуются двойной нелинейностью — нелинейностью рассматриваемой модели и нелинейным вхождением в модель (в виде множителей при C) неизвестных функций α и k. Тем не менее структура дифференциальных уравнений рассматриваемой модели массопереноса позволяет получить два условия на исходные данные. Первое условие является классическим и обеспечивает единственность решения краевой задачи (1.1), (1.2). Второе условие аналогично достаточному условию единственности решения коэффициентной задачи идентификации для линейного уравнения конвекции — диффузии. Поскольку условия единственности достаточно громоздки (в силу нелинейности исходной модели), необходимо ввести аналоги чисел Рейнольдса, Рэлея и Прандтля. Тогда эти условия можно записать в достаточно простом и физически наглядном виде.

Как и в [5], будем использовать пространства $H^s(D)$, $s \in \mathbb{R}$ и $L^r(D)$ либо $\boldsymbol{H}^s(D)$ и $\boldsymbol{L}^r(D)$ для вектор-функций, где D представляет собой область Ω (или ее подмножество Q) либо границу Γ (или ее часть Γ_N). Скалярные произведения в $L^2(\Omega)$, $L^2(Q)$ либо $L^2(\Gamma_N)$ обозначим через $(\cdot\,,\cdot)$, $(\cdot\,,\cdot)_Q$, $(\cdot\,,\cdot)_{\Gamma_N}$ соответственно, норму в $L^2(\Omega)$, $L^2(Q)$ либо в $L^2(\Gamma_N)$ — через $\|\cdot\|$, $\|\cdot\|_Q$ либо $\|\cdot\|_{\Gamma_N}$, норму либо полунорму в $H^1(\Omega)$ и $\boldsymbol{H}^1(\Omega)$ — через $\|\cdot\|_1$ либо $|\cdot|_1$, норму в $H^{1/2}(\Gamma_0)$ — через $\|\cdot\|_{1/2,\Gamma_0}$, отношение двойственности для пары X и X^* — через $\langle\cdot\,,\cdot\rangle_{X^*\times X}$ или через $\langle\cdot\,,\cdot\rangle$. Пусть выполняются следующие условия:

1) Ω — ограниченная область в пространстве $\mathbb{R}^d$ с границей $\Gamma \in C^{0,1}$, состоящей из N связных компонент $\Gamma^{(i)}$, $i = 1, 2, \ldots, N$;

2) $\Gamma_D \in C^{0,1}$, $\operatorname{meas}\Gamma_D > 0$, $\Gamma_N \in C^{0,1}$, $\Gamma_D \cap \Gamma_N = \varnothing$, $\Gamma = \overline{\Gamma}_D \cup \overline{\Gamma}_N$.

Положим $\boldsymbol{H}_0^1(\Omega) = \{\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{H}^1(\Omega)\colon \boldsymbol{v}\big|_\Gamma = 0\}$, $\boldsymbol{V} = \{\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{H}_0^1(\Omega)\colon \operatorname{div}\boldsymbol{v} = 0\}$, $\tilde{\boldsymbol{H}}^1(\Omega) = \{\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{H}^1(\Omega)\colon \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n}|_{\Gamma_N} = 0,\ \int\limits_{\Gamma^{(i)}} \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n}\,d\sigma = 0,\ 1 \leqslant i \leqslant N\}$, $\tilde{\boldsymbol{H}}^{1/2}(\Gamma) = \{\boldsymbol{u}|_\Gamma\colon \boldsymbol{u} \in \tilde{\boldsymbol{H}}^1(\Omega)\}$, $Z = H^1(\Omega, \Gamma_D) \equiv \{S \in H^1(\Omega)\colon S|_{\Gamma_D} = 0\}$, $L_0^2(\Omega) = \{p \in L^2(\Omega)\colon (p, 1) = 0\}$, $L_+^2(D) = \{v \in L^2(D)\colon v \geqslant 0 \text{ на } D\}$.

Введем билинейные и трилинейные формы

$$a_0(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = \int\limits_\Omega \nabla\boldsymbol{u}\cdot\nabla\boldsymbol{v}\,d\Omega, \quad b(\boldsymbol{v}, q) = -\int\limits_\Omega q\operatorname{div}\boldsymbol{v}\,d\Omega, \quad c(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) = \int\limits_\Omega (\boldsymbol{u}\cdot\operatorname{grad})\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{w}\,d\Omega,$$

$$a_1(C, S) = \int\limits_\Omega \nabla C\cdot\nabla S\,d\Omega, \quad c_1(\boldsymbol{u}, C, S) = \int\limits_\Omega (\boldsymbol{u}\cdot\operatorname{grad} C)S\,d\Omega, \quad b_1(S, \boldsymbol{v}) = \int\limits_\Omega \boldsymbol{b}S\cdot\boldsymbol{v}\,d\Omega$$

($\boldsymbol{b} = \beta_C \boldsymbol{G}$), которые являются непрерывными и обладают следующими свойствами:

$$c(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) = -c(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w}, \boldsymbol{v}) \quad \forall \boldsymbol{u} \in \boldsymbol{V}, \qquad (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) \in \boldsymbol{H}^1(\Omega) \times \boldsymbol{H}_0^1(\Omega); \tag{1.3}$$

$$c_1(\boldsymbol{u}, C, S) = -c_1(\boldsymbol{u}, S, C) \quad \forall \boldsymbol{u} \in \boldsymbol{V}, \qquad (C, S) \in H^1(\Omega) \times Z; \tag{1.4}$$

$$a_0(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}) \geqslant \delta_0 \|\boldsymbol{v}\|_1^2 \quad \forall \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{H}_0^1(\Omega), \qquad |c(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})| \leqslant \gamma_0 \|\boldsymbol{u}\|_1 \|\boldsymbol{v}\|_1 \|\boldsymbol{w}\|_1; \tag{1.5}$$

$$a_1(S, S) \geqslant \delta_1 \|S\|_1^2 \quad \forall S \in Z, \qquad |c_1(\boldsymbol{u}, C, S)| \leqslant \gamma_1 \|\boldsymbol{u}\|_1 \|C\|_1 \|S\|_1; \tag{1.6}$$

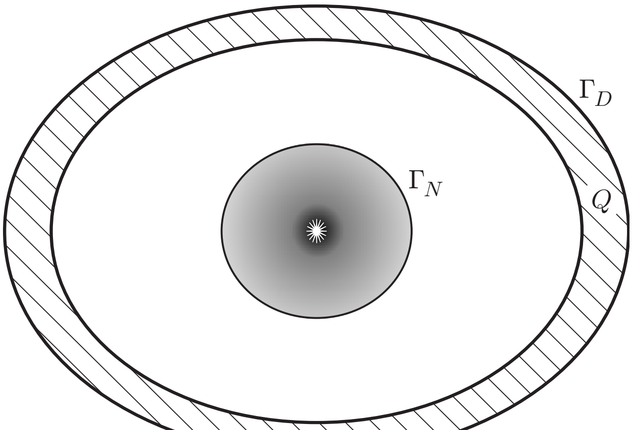
$$|(\chi, S)_{\Gamma_N}| \leqslant \gamma_2 \|\chi\|_{\Gamma_N} \|S\|_1, \quad |b_1(S, \boldsymbol{v})| \leqslant \beta_1 \|\boldsymbol{v}\|_1 \|S\|_1, \quad |(C, S)_Q| \leqslant \gamma_4 \|C\|_Q \|S\|_1; \tag{1.7}$$

$$|(\alpha C, S)_{\Gamma_N}| \leqslant \gamma_3 \|\alpha\|_{\Gamma_N} \|C\|_1 \|S\|_1, \qquad |(kC, h)| \leqslant \gamma_5 \|k\| \|C\|_1 \|h\|_1. \tag{1.8}$$

Здесь δ_0, δ_1, γ_0, γ_1, ..., γ_5, β_1 — константы, зависящие от Ω.

2. Постановка задачи идентификации. Предварительные результаты. Отметим, что краевая задача (1.1), (1.2) содержит параметры ν, β_C, λ, k, α и функции f, ψ, χ, описывающие плотности источников вещества (например, загрязняющего). Для того чтобы найти решение краевой задачи (1.1), (1.2), необходимо задать значения всех параметров, граничных функций и плотностей источников. Однако на практике некоторые из этих параметров или плотностей часто оказываются неизвестными. В частности, могут оказаться неизвестными значения функции k (коэффициента распада вещества за счет химических реакций). В этом случае решение $(\boldsymbol{u}, p, C)$ задачи (1.1), (1.2) следует искать вместе с коэффициентом k, используя определенную информацию о состоянии среды. Также может быть неизвестной информация о функциях α и χ, входящих в граничное условие в (1.2) на участке Γ_N границы Γ. В качестве примера такой ситуации на рисунке показана область течения Ω, имеющая границу Γ, состоящую из внешней компоненты $\Gamma_0 = \Gamma_D$, на которой задано условие Дирихле, и внутренней компоненты $\Gamma_1 = \Gamma_N$, через которую загрязняющее вещество попадает в область Ω. Значения концентрации C на внешней границе Γ_D, а также в некоторой ее окрестности могут быть измерены, однако внутренняя граница Γ_N может оказаться недоступной для измерений, а следовательно, величины α и χ, относящиеся к Γ_N, следует считать неизвестными. В этом случае возникает проблема определения величин α и χ вместе с решением $(\boldsymbol{u}, p, C)$ по измеренному полю концентраций C_d в области Q, прилегающей к границе Γ. Аналогичная проблема возникает в задачах трансграничного переноса загрязняющих веществ.

На основе изложенного выше предположим, что функции χ, α и k, входящие в систему (1.1), (1.2), неизвестны и их требуется определить вместе с решением $(\boldsymbol{u}, p, C)$ из



Геометрия области течения

условия минимума определенного функционала качества $\tilde{J}$. В качестве $\tilde{J}$ выберем функционал $J_1(C) = \|C - C_d\|_Q^2$, где функция $C_d \in L^2(Q)$ моделирует измеренное в некоторой подобласти $Q \subset \Omega$ поле концентраций, или функционал $J_2(C) = \|C - C_d\|_1^2$ при $C_d \in H^1(Q)$.

Множество исходных данных задачи (1.1), (1.2) разобьем на две группы: группу управлений, куда отнесем функции χ, α, k, и группу фиксированных данных, куда отнесем неизменяемые функции $\boldsymbol{f}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{g}$, f, ψ. Будем полагать, что $u = (\chi, \alpha, k)$, $u_0 = (\boldsymbol{f}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{g}, f, \psi)$, $\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{u}, p, C)$, а управление u может изменяться на множестве $K = K_1 \times K_2 \times K_3$. При этом выполняются следующие условия:

3) $\boldsymbol{f} \in \boldsymbol{H}^{-1}(\Omega)$, $\boldsymbol{g} \in \tilde{\boldsymbol{H}}^{1/2}(\Gamma)$, $f \in L^2(\Omega)$;

4) $K_1 \subset L^2(\Gamma_N)$, $K_2 \subset L^2_+(\Gamma_N)$, $K_3 \subset L^2_+(\Omega)$ — непустые замкнутые выпуклые множества.

Полагая $X = \tilde{\boldsymbol{H}}^1(\Omega) \times L^2_0(\Omega) \times H^1(\Omega)$, $Y = \boldsymbol{H}^{-1}(\Omega) \times L^2_0(\Omega) \times \tilde{\boldsymbol{H}}^{1/2}(\Gamma) \times Z^* \times H^{1/2}(\Gamma_D)$, введем оператор $F \equiv (F_1, F_2, F_3, F_4, F_5)$: $X \times K \to Y$, где $\langle F_1(\boldsymbol{x}, u), \boldsymbol{v}\rangle = \nu a_0(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) + c(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) + b(\boldsymbol{v}, p) - b_1(C, \boldsymbol{v}) - \langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{v}\rangle$; $F_2(\boldsymbol{x}, u) = \operatorname{div} \boldsymbol{u}$; $F_3(\boldsymbol{x}, u) = \boldsymbol{u}|_\Gamma - \boldsymbol{g}$; $\langle F_4(\boldsymbol{x}, u), S\rangle = \lambda a_1(C, S) + \lambda(\alpha C, S)_{\Gamma_N} + c_1(\boldsymbol{u}, C, S) + (kC, S) - (f, S) - (\chi, S)_{\Gamma_N}$; $F_5(\boldsymbol{x}, u) = C|_{\Gamma_D} - \psi$. Умножая уравнения в (1.1), (1.2) на тестовые функции и интегрируя их, получаем задачу в слабой формулировке, заключающуюся в нахождении решения $\boldsymbol{x} \equiv (\boldsymbol{u}, p, C) \in X$ операторного уравнения $F(\boldsymbol{x}, u) \equiv F(\boldsymbol{u}, p, C, \chi, \alpha, k) = 0$, эквивалентного соотношениям

$$\begin{gathered}
\nu a_0(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) + c(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) + b(\boldsymbol{v}, p) - b_1(C, \boldsymbol{v}) = \langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{v}\rangle \qquad \forall \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{H}^1_0(\Omega), \\
\lambda a_1(C, S) + \lambda(\alpha C, S)_{\Gamma_N} + c_1(\boldsymbol{u}, C, S) + (kC, S) = (f, S) + (\chi, S)_{\Gamma_N} \qquad \forall S \in Z, \\
\operatorname{div} \boldsymbol{u} = 0, \qquad \boldsymbol{u}\big|_\Gamma = \boldsymbol{g}, \qquad C\big|_{\Gamma_D} = \psi.
\end{gathered} \tag{2.1}$$

Рассмотрим экстремальную задачу

$$\begin{gathered}
J(\boldsymbol{x}, u) \equiv \frac{\mu_0}{2}\tilde{J}(\boldsymbol{x}) + \frac{\mu_1}{2}\|\chi\|^2_{\Gamma_N} + \frac{\mu_2}{2}\|\alpha\|^2_{\Gamma_N} + \frac{\mu_3}{2}\|k\|^2 \to \inf, \\
F(\boldsymbol{x}, u) = 0, \qquad (\boldsymbol{x}, u) \equiv (\boldsymbol{u}, p, C, \chi, \alpha, k) \in X \times K,
\end{gathered} \tag{2.2}$$

где μ_l — неотрицательные размерные параметры. Значения этих параметров позволяют регулировать относительный вклад каждого слагаемого в (2.2), а их размерности позволяют согласовывать размерности величин $\boldsymbol{u}$, p и C основного состояния с размерностями величин сопряженного состояния. Параметры μ_1, μ_2, μ_3 введены также для того, чтобы обеспечить единственность решений задачи (2.2) (см. п. **3**). В соответствии с общей теорией экстремальных задач [9] введем в рассмотрение элемент $\boldsymbol{y}^* = (\xi, \sigma, \zeta, \eta, \tau) \in Y^*$, который будем называть сопряженным состоянием, и лагранжиан $\mathcal{L} : X \times K \times \mathbb{R}^+ \times Y^* \to \mathbb{R}$, где $\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R}\colon x \geqslant 0\}$, по формуле

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(\boldsymbol{x}, u, \lambda_0, \boldsymbol{y}^*) = \lambda_0 J(\boldsymbol{x}, u) + \langle \boldsymbol{y}^*, F(\boldsymbol{x}, u)\rangle \equiv \lambda_0 J(\boldsymbol{x}, u) + \langle F_1(\boldsymbol{x}, u), \xi\rangle + \\
+ (F_2(\boldsymbol{x}, u), \sigma) + \langle \zeta, F_3(\boldsymbol{x}, u)\rangle_\Gamma + \varkappa\langle F_4(\boldsymbol{x}, u), \eta\rangle + \varkappa\langle \tau, F_5(\boldsymbol{x}, u)\rangle_{\Gamma_D}.
\end{aligned}$$

Здесь $\langle \zeta, \cdot\rangle_\Gamma = \langle \zeta, \cdot\rangle_{\tilde{\boldsymbol{H}}^{1/2}(\Gamma)^* \times \tilde{\boldsymbol{H}}^{1/2}(\Gamma)}$; $\langle \tau, \cdot\rangle_{\Gamma_D} \equiv \langle \tau, \cdot\rangle_{H^{1/2}(\Gamma_D)^* \times H^{1/2}(\Gamma_D)}$; $\varkappa$ — параметр с размерностью $[\varkappa] = L_0^8/(T_0^2 M_0^2)$; L_0, T_0, M_0 — характерные величины, имеющие размерности длины, времени и массы соответственно в метрах, секундах и килограммах (в системе СИ). Указанный выбор $[\varkappa]$ обеспечивает совпадение размерностей величин ξ, σ, η сопряженного состояния с размерностями величин $\boldsymbol{u}$, p, C основного состояния, т. е. выполнение равенств $[\xi] = [\boldsymbol{u}] = L_0/T_0$, $[\eta] = [C] = M_0/L_0^3$, $[\sigma] = [p] = L_0^2/T_0^2$. Это позволяет считать ξ, σ и η “сопряженными” скоростью, давлением и концентрацией.

Справедливы следующие теоремы, доказательства которых аналогичны доказательствам соответствующих теорем в [6, 7].

Теорема 1. *Пусть выполняются условия* 1–4. *Тогда для любых* $(\chi, \alpha, k) \in K$ *существует по крайней мере одно решение* $(\boldsymbol{u}, p, C) \in X$ *задачи* (1.1), (1.2) *и справедливы оценки* $\|\boldsymbol{u}\|_1 \leqslant M_{\boldsymbol{u}}(u_0, u)$, $\|p\| \leqslant M_p(u_0, u)$, $\|C\|_1 \leqslant M_C(u_0, u)$. *Здесь* $M_{\boldsymbol{u}}$, M_p, M_C — *неубывающие непрерывные функции норм* $\|\boldsymbol{f}\|_{-1}$, $\|\boldsymbol{b}\|$, $\|\boldsymbol{g}\|_{1/2,\Gamma}$, $\|f\|$, $\|\psi\|_{1/2,\Gamma_D}$, $\|\chi\|_{\Gamma_N}$, $\|\alpha\|_{\Gamma_N}$, $\|k\|$, *стремящиеся к нулю при одновременном стремлении к нулю норм* $\|\boldsymbol{f}\|_{-1}$, $\|\boldsymbol{g}\|_{1/2,\Gamma}$, $\|f\|$, $\|\psi\|_{1/2,\Gamma_D}$, $\|\chi\|_{\Gamma_N}$. *Если величины* $\boldsymbol{f}$, $\boldsymbol{g}$, f, ψ, χ, α, k *"малы"* (*либо вязкость* ν *"велика"*), *так что выполняется условие*

$$\frac{\gamma_0}{\delta_0 \nu} M_{\boldsymbol{u}}(u_0, u) + \frac{1}{\delta_0 \nu} \frac{\beta_1 \gamma_1}{\delta_1 \lambda} M_C(u_0, u) < 1 \tag{2.3}$$

(*константы* δ_i, γ_i, β_1 *введены в* (1.5)–(1.8)), *то решение единственно.*

Теорема 2. *Пусть при выполнении условий* 1–4 $\mu_0 > 0$, $\mu_l > 0$ *либо* $\mu_0 > 0$, $\mu_l \geqslant 0$ *и* K_l $(l = 1, 2, 3)$ — *ограниченные множества. Тогда при* $\tilde{J} = J_k$, $k = 1, 2$ *существует решение задачи* (2.2).

Теорема 3. *Пусть при выполнении условий* 1–4 *элемент* $(\hat{\boldsymbol{x}}, \hat{u}) \equiv (\hat{\boldsymbol{u}}, \hat{p}, \hat{C}, \hat{\chi}, \hat{\alpha}, \hat{k}) \in X \times K$ *является точкой локального минимума в задаче* (2.2), *причем функционал* J *является непрерывно дифференцируемым по* $\boldsymbol{x}$ *в точке* $\hat{\boldsymbol{x}}$ *для любого элемента* $u \in K$ *и выпуклым по* u *для каждой точки* $\boldsymbol{x} \in X$. *Тогда существует ненулевой множитель Лагранжа* $(\lambda_0, \boldsymbol{y}^*) \in \mathbb{R}^+ \times Y^*$, *такой что справедливо уравнение Эйлера — Лагранжа*

$$F'_{\boldsymbol{x}}(\hat{\boldsymbol{x}}, \hat{u})^* \boldsymbol{y}^* + \lambda_0 J'_{\boldsymbol{x}}(\hat{\boldsymbol{x}}, \hat{u}) = 0$$

и выполняется принцип минимума

$$\mathcal{L}(\hat{\boldsymbol{x}}, \hat{u}, \lambda_0, \boldsymbol{y}^*) \leqslant \mathcal{L}(\hat{\boldsymbol{x}}, u, \lambda_0, \boldsymbol{y}^*) \qquad \forall u \in K. \tag{2.4}$$

Теорема 4. *Пусть для всех* $u \in K$ *выполняются условия теоремы* 3 *и неравенство* (2.3). *Тогда* $\lambda_0 \neq 0$ *и множитель Лагранжа можно выбрать равным* $(1, \boldsymbol{y}^*)$.

Отметим, что уравнение Эйлера — Лагранжа эквивалентно тождествам

$$\begin{gathered}
\nu a_0(\boldsymbol{w}, \xi) + c(\hat{\boldsymbol{u}}, \boldsymbol{w}, \xi) + c(\boldsymbol{w}, \hat{\boldsymbol{u}}, \xi) + \varkappa c_1(\boldsymbol{w}, \hat{C}, \eta) + b(\boldsymbol{w}, \sigma) + \\
+ \langle \zeta, \boldsymbol{w} \rangle_\Gamma + \lambda_0 \langle J'_{\boldsymbol{u}}(\hat{\boldsymbol{x}}, \hat{u}), \boldsymbol{w} \rangle = 0 \qquad \forall \boldsymbol{w} \in \tilde{\boldsymbol{H}}^1(\Omega), \\
b(\xi, r) + \lambda_0 (J'_p(\hat{\boldsymbol{x}}, \hat{u}), r) = 0 \qquad \forall r \in L^2_0(\Omega), \\
\varkappa[\lambda a_1(\varphi, \eta) + \lambda(\hat{\alpha}\varphi, \eta)_{\Gamma_N} + (\hat{k}\varphi, \eta) + c_1(\hat{\boldsymbol{u}}, \varphi, \eta) + \langle \tau, \varphi \rangle_{\Gamma_D}] - \\
- b_1(\varphi, \xi) + \lambda_0 \langle J'_C(\hat{\boldsymbol{x}}, \hat{u}), \varphi \rangle = 0 \qquad \forall \varphi \in H^1(\Omega),
\end{gathered} \tag{2.5}$$

которые вместе с соотношением (2.1) и принципом минимума (2.4) образуют систему оптимальности, описывающую необходимые условия экстремума для задачи (2.2).

Теоремы 1–4 устанавливают достаточные условия глобальной разрешимости и локальной единственности исходной краевой задачи (1.1), (1.2), разрешимости экстремальной задачи (2.2), справедливости принципа Лагранжа и регулярности множителя Лагранжа. Однако даже при выполнении условия (2.3), обеспечивающего единственность решения задачи (1.1), (1.2) и регулярность множителя Лагранжа, из этих условий не следует единственность решения экстремальной задачи (2.2). Для доказательства единственности и устойчивости решения экстремальной задачи (2.2) относительно возмущений функции C_d потребуется ввести более жесткие ограничения на исходные данные.

3. Локальная единственность и устойчивость решения задачи идентификации. Полагая $\hat{M}_{\boldsymbol{u}} = \sup_{u \in K} M_{\boldsymbol{u}}(u_0, u)$, $\hat{M}_C = \sup_{u \in K} M_C(u_0, u)$, введем параметры

$$\mathrm{Re} = \frac{\gamma_0 \hat{M}_{\boldsymbol{u}}}{\delta_0 \nu}, \quad \mathrm{R} = \frac{1}{\delta_0 \nu} \frac{\beta_1 \gamma_1}{\delta_1 \lambda} \hat{M}_C, \quad \mathrm{Pr} = \frac{\delta_0 \nu}{\delta_1 \lambda}, \tag{3.1}$$

которые являются аналогами используемых в гидромеханике безразмерных чисел Рейнольдса Re, Рэлея R и Прандтля Pr соответственно. Будем полагать, что

$$\mathrm{Re}+\mathrm{R} \equiv \frac{\gamma_0}{\delta_0\nu}\,\hat{M}_{\boldsymbol{u}} + \frac{1}{\delta_0\nu}\,\frac{\beta_1\gamma_1}{\delta_1\lambda}\,\hat{M}_C < \frac{1}{2}. \tag{3.2}$$

Отметим, что введенные в (3.1) параметры безразмерны, если основные нормы $\|v\|$, $|v|_1$, $\|v\|_1$ (v — произвольная скалярная величина) определяются формулами

$$\|v\|^2 = \int\limits_\Omega v^2\,d\Omega, \quad |v|_1^2 = \int\limits_\Omega |\nabla v|^2\,d\Omega, \quad \|v\|_1^2 = l^{-2}\|v\|^2 + |v|_1^2.$$

Здесь $l = 1$ — множитель с размерностью $[l] = L_0$. Действительно, анализ, аналогичный анализу, проведенному в [8], показывает, что в этом случае размерности констант, входящих в (3.1), определяются соотношениями $[\delta_i] = 1$, $[\gamma_i] = L_0^{1/2}$, $[\beta_1] = L_0^6/(T_0^2 M_0)$, $[\hat{M}_{\boldsymbol{u}}] = L_0^{3/2}/T_0$, $[\hat{M}_C] = M_0/L_0^{5/2}$. Отсюда и из условий $[\nu] = [\lambda] = L_0^2/T_0$ вытекает безразмерность величин Re, R и Pr, введенных в (3.1).

Для исследования единственности и устойчивости решения задачи (2.2) при $\tilde{J} = J_1$ введем две “близкие” функции $C_d^{(1)}$, $C_d^{(2)} \in L^2(Q)$ и обозначим через $(\boldsymbol{x}_i, u_i, \boldsymbol{y}_i^*) \equiv (\boldsymbol{u}_i, p_i, C_i, \chi_i, \alpha_i, k_i, \xi_i, \sigma_i, \eta_i, \zeta_i, \tau_i)$ соответствующее $C_d^{(i)}$ решение системы (2.1), (2.4), (2.5), где следует положить $\hat{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{x}_i$, $\hat{u} = u_i$, $\boldsymbol{y}^* = \boldsymbol{y}_i^*$,

$$\lambda_0 = 1, \qquad \langle J_C'(\hat{\boldsymbol{x}}, \hat{u}), \varphi\rangle = \mu_0(C_i - C_d^{(i)}, \varphi)_Q, \qquad J_{\boldsymbol{u}}' = 0, \qquad J_p' = 0. \tag{3.3}$$

В силу теоремы 1, примененной к $(\boldsymbol{u}_i, p_i, C_i)$, и соотношения (3.2) справедливы оценки

$$\|\boldsymbol{u}_i\|_1 \leqslant \hat{M}_{\boldsymbol{u}}, \qquad \|C_i\|_1 \leqslant \hat{M}_C, \qquad i = 1, 2; \tag{3.4}$$

$$\frac{\delta_0\nu}{2} < \delta_0\nu - \gamma_0\hat{M}_{\boldsymbol{u}} - \frac{\beta_1\gamma_1}{\delta_1\lambda}\,\hat{M}_C \leqslant \delta_0\nu - \gamma_0\hat{M}_{\boldsymbol{u}} \leqslant \delta_0\nu, \tag{3.5}$$

а в силу условия $J_p' = 0$ имеем $\operatorname{div}\xi_i = 0$, так что $\xi_i \in \boldsymbol{V}$. Положим $C_d = C_d^{(1)} - C_d^{(2)}$, $\chi = \chi_1 - \chi_2$, $\alpha = \alpha_1 - \alpha_2$, $k = k_1 - k_2$, $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2$ ($\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{u}_2$, $p = p_1 - p_2$, $C = C_1 - C_2$), $\xi = \xi_1 - \xi_2$, $\sigma = \sigma_1 - \sigma_2$, $\zeta = \zeta_1 - \zeta_2$, $\eta = \eta_1 - \eta_2$, $\tau = \tau_1 - \tau_2$. С учетом теоремы 4 принцип минимума (см. теорему 3) для трех параметров $(\boldsymbol{x}_i, u_i, \boldsymbol{y}_i^*)$ запишем в виде $\mathcal{L}(\boldsymbol{x}_i, u_i, 1, \boldsymbol{y}_i^*) \leqslant \mathcal{L}(\boldsymbol{x}_i, u, 1, \boldsymbol{y}_i^*)$ при всех $u \in K$. Отметим, что лагранжиан $\mathcal{L}$ является непрерывно дифференцируемой функцией управлений χ, α, k. Поскольку K_1, K_2, K_3 — выпуклые множества, в точке минимума $u_i = (\chi_i, \alpha_i, k_i)$ выполняются условия [10. С. 126]

$$\langle \mathcal{L}_\chi'(\boldsymbol{x}_i, u_i, 1, \boldsymbol{y}_i^*), \tilde{\chi} - \chi_i\rangle \equiv \mu_1(\chi_i, \tilde{\chi} - \chi_i)_{\Gamma_N} - \varkappa(\tilde{\chi} - \chi_i, \eta_i)_{\Gamma_N} \geqslant 0 \quad \forall \tilde{\chi} \in K_1; \tag{3.6}$$

$$\langle \mathcal{L}_\alpha'(\boldsymbol{x}_i, u_i, 1, \boldsymbol{y}_i^*), \tilde{\alpha} - \alpha_i\rangle \equiv \mu_2(\alpha_i, \tilde{\alpha} - \alpha_i)_{\Gamma_N} + \lambda\varkappa((\tilde{\alpha} - \alpha_i)C_i, \eta_i)_{\Gamma_N} \geqslant 0 \quad \forall \tilde{\alpha} \in K_2; \tag{3.7}$$

$$\langle \mathcal{L}_k'(\boldsymbol{x}_i, u_i, 1, \boldsymbol{y}_i^*), \tilde{k} - k_i\rangle \equiv \mu_3(k_i, \tilde{k} - k_i) + \varkappa((\tilde{k} - k_i)C_i, \eta_i) \geqslant 0 \quad \forall \tilde{k} \in K_3. \tag{3.8}$$

Здесь, например, $\mathcal{L}_\alpha'(\boldsymbol{x}_i, u_i, 1, \boldsymbol{y}_i^*)$ — производная Гато по α в точке $(\boldsymbol{x}_i, u_i, 1, \boldsymbol{y}_i^*)$.

В неравенстве (3.8) положим $\tilde{k} = k_1$ при $i = 2$ и $\tilde{k} = k_2$ при $i = 1$. Получаем

$$\mu_3(k_2, k) + \varkappa(kC_2, \eta_2) \geqslant 0, \qquad -\mu_3(k_1, k) - \varkappa(kC_1, k_1) \geqslant 0.$$

Складывая эти неравенства, имеем

$$\mu_3\|k\|^2 \leqslant \varkappa[(kC_2, \eta_2) - (kC_1, \eta_1)] = -\varkappa[(kC_2, \eta) + (kC, \eta_1)]. \tag{3.9}$$

Аналогично из (3.6), (3.7) получаем

$$\mu_1\|\chi\|_{\Gamma_N}^2 \leqslant \varkappa(\chi, \eta)_{\Gamma_N}, \qquad \mu_2\|\alpha\|_{\Gamma_N}^2 \leqslant -\lambda\varkappa[(\alpha C_2, \eta)_{\Gamma_N} + (\alpha C, \eta_1)_{\Gamma_N}]. \tag{3.10}$$

Складывая соотношения (3.9), (3.10), с учетом (1.7), (1.8) и (3.4) имеем

$$\mu_1\|\chi\|^2_{\Gamma_N} + \mu_2\|\alpha\|^2_{\Gamma_N} + \mu_3\|k\|^2 \leqslant$$
$$\leqslant -\varkappa[\lambda(\alpha C_2,\eta)_{\Gamma_N} + \lambda(\alpha C,\eta_1)_{\Gamma_N} + (kC_2,\eta) + (kC,\eta_1) - (\chi,\eta)_{\Gamma_N}] \leqslant$$
$$\leqslant \varkappa[\|\eta\|_1(\gamma_2\|\chi\|_{\Gamma_N} + \gamma_3\lambda\hat{M}_C\|\alpha\|_{\Gamma_N} + \gamma_5\hat{M}_C\|k\|) + \|C\|_1\|\eta_1\|_1(\gamma_3\lambda\|\alpha\|_{\Gamma_N} + \gamma_5\|k\|)]. \quad (3.11)$$

Для краткости введем обозначения

$$\|u\| \equiv \gamma_2\|\chi\|_{\Gamma_N} + \gamma_3\lambda\hat{M}_C\|\alpha\|_{\Gamma_N} + \gamma_5\hat{M}_C\|k\|; \quad (3.12)$$

$$\|z\| \equiv \gamma_1\|\eta_2\|_1\|\boldsymbol{u}\|_1 + \gamma_3\lambda\|\eta_2\|_1\|\alpha\|_{\Gamma_N} + \gamma_5\|\eta_2\|_1\|k\| + \mu_0\varkappa^{-1}\gamma_4^2\|C\|_1. \quad (3.13)$$

Учитывая, что в силу (3.12) $\gamma_3\lambda\|\alpha\|_{\Gamma_N} + \gamma_5\|k\| \leqslant \|u\|/\hat{M}_C$, из (3.11) имеем

$$\mu_1\|\chi\|^2_{\Gamma_N} + \mu_2\|\alpha\|^2_{\Gamma_N} + \mu_3\|k\|^2 \leqslant \varkappa(\|\eta\|_1 + \|C\|_1\|\eta_1\|_1/\hat{M}_C)\|u\|. \quad (3.14)$$

Каждое решение $(\boldsymbol{u}_i, p_i, C_i, u_i)$ удовлетворяет соотношениям (2.1). Вычитая уравнения (2.1), записанные для $\boldsymbol{u}_2, p_2, C_2, u_2$, из соответствующих уравнений для $\boldsymbol{u}_1, p_1, C_1, u_1$, получаем

$$\begin{gathered}\nu a_0(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) + [c(\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) + c(\boldsymbol{u},\boldsymbol{u}_2,\boldsymbol{v})] + b(\boldsymbol{v},p) - b_1(C,\boldsymbol{v}) = 0 \quad \forall\boldsymbol{v}\in\boldsymbol{H}^1_0(\Omega),\\ \lambda a_1(C,S) + \lambda(\alpha_1 C,S)_{\Gamma_N} + c_1(\boldsymbol{u}_1,C,S) + (k_1C,S) =\\ = -c_1(\boldsymbol{u},C_2,S) - \lambda(\alpha C_2,S)_{\Gamma_N} - (kC_2,S) + (\chi,S)_{\Gamma_N} \quad \forall S\in Z,\\ \operatorname{div}\boldsymbol{u} = 0, \qquad \boldsymbol{u}\big|_\Gamma = 0, \qquad C|_{\Gamma_D} = 0.\end{gathered} \quad (3.15)$$

Полагая в (3.15) $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{u}\in V$, $S = C\in Z$, с учетом (1.3), (1.4) получаем

$$\nu a_0(\boldsymbol{u},\boldsymbol{u}) = -c(\boldsymbol{u},\boldsymbol{u}_2,\boldsymbol{u}) - b_1(C,\boldsymbol{u}); \quad (3.16)$$

$$\lambda a_1(C,C)+\lambda(\alpha_1C,C)_{\Gamma_N}+(k_1C,C) = -c_1(\boldsymbol{u},C_2,C)-\lambda(\alpha C_2,C)_{\Gamma_N}-(kC_2,C)+(\chi,C)_{\Gamma_N}. \quad (3.17)$$

Используя (1.5), (1.7), (3.4), имеем

$$|c(\boldsymbol{u},\boldsymbol{u}_2,\boldsymbol{u})| \leqslant \gamma_0\|\boldsymbol{u}_2\|_1\|\boldsymbol{u}\|^2_1 \leqslant \gamma_0\hat{M}_{\boldsymbol{u}}\|\boldsymbol{u}\|^2_1, \qquad |b_1(C,\boldsymbol{u})| \leqslant \beta_1\|\boldsymbol{u}\|_1\|C\|_1.$$

С учетом последних неравенств и (1.5) из (3.16) получаем

$$\delta_0\nu\|\boldsymbol{u}\|^2_1 \leqslant \nu a_0(\boldsymbol{u},\boldsymbol{u}) \leqslant \gamma_0\hat{M}_{\boldsymbol{u}}\|\boldsymbol{u}\|^2_1 + \beta_1\|C\|_1\|\boldsymbol{u}\|_1. \quad (3.18)$$

Из (3.18), (3.15) следует

$$(\delta_0\nu/2)\|\boldsymbol{u}\|^2_1 \leqslant (\delta_0\nu - \gamma_0\hat{M}_{\boldsymbol{u}})\|\boldsymbol{u}\|^2_1 \leqslant \beta_1\|C\|_1\|\boldsymbol{u}\|_1.$$

Отсюда получаем $\|\boldsymbol{u}\|_1 \leqslant (2\beta_1/(\delta_0\nu))\|C\|_1$. Используя эту оценку, с учетом (1.6)–(1.8), (3.4), (3.12) и условий $\alpha_1 \geqslant 0$, $k_1 \geqslant 0$ из (3.17) выводим

$$\delta_1\lambda\|C\|^2_1 \leqslant \lambda a_1(C,C) + \lambda(\alpha_1C,C)_{\Gamma_N} + (k_1C,C) \leqslant$$
$$\leqslant (\gamma_1\hat{M}_C\|\boldsymbol{u}\|_1 + \gamma_2\|\chi\|_{\Gamma_N} + \gamma_3\lambda\hat{M}_C\|\alpha\|_{\Gamma_N} + \gamma_5\hat{M}_C\|k\|)\|C\|_1 \leqslant$$
$$\leqslant 2(\beta_1\gamma_1/(\delta_0\nu))\hat{M}_C\|C\|^2_1 + \|u\|\|C\|_1. \quad (3.19)$$

С учетом (3.1), (3.12) из (3.19) получаем $\delta_1\lambda(1-2\,\mathrm{R})\|C\|_1 \leqslant \|u\|\|C\|_1$. Отсюда и из (3.1) следуют оценки для $\|C\|_1$ и $\|\boldsymbol{u}\|_1$:

$$\|C\|_1 \leqslant \frac{\|u\|}{\delta_1\lambda(1-2\,\mathrm{R})}, \qquad \|\boldsymbol{u}\|_1 \leqslant \frac{2\beta_1}{\delta_0\nu}\frac{\|u\|}{\delta_1\lambda(1-2\,\mathrm{R})} = \frac{2\,\mathrm{R}\,\|u\|}{\gamma_1(1-2\,\mathrm{R})\hat{M}_C}. \quad (3.20)$$

Для лагранжевых множителей ξ_i, σ_i, ζ_i, η_i, τ_i при $\hat{u} = u_i$, $\hat{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{x}_i$, $\lambda_0 = 1$, $\tilde{J} = J_1$, $i = 1, 2$ в тождествах (2.5) положим $\boldsymbol{w} = \xi_i$, $\varphi = \eta_i$, $r = \sigma_i$. Тогда с учетом (1.3), (1.4) и (3.3) получаем

$$\nu a_0(\xi_i,\xi_i) = -c(\xi_i,\boldsymbol{u}_i,\xi_i) - \varkappa c_1(\xi_i,C_i,\eta_i); \quad (3.21)$$

$$\varkappa[\lambda a_1(\eta_i,\eta_i) + \lambda(\alpha_i\eta_i,\eta_i)_{\Gamma_N} + (k_i\eta_i,\eta_i)] = b_1(\eta_i,\xi_i) - \mu_0(C_i - C_d^{(i)},\eta_i)_Q. \quad (3.22)$$

Используя (1.6)–(1.8) и (3.4), из (3.22) имеем

$$\delta_1\lambda\varkappa\|\eta_i\|_1^2 \leqslant \beta_1\|\xi_i\|_1\|\eta_i\|_1 + \mu_0(\|C_i\|_Q + \|C_d^{(i)}\|_Q)\|\eta_i\|_Q \leqslant$$
$$\leqslant [\beta_1\|\xi_i\|_1 + \mu_0\gamma_4(\gamma_4\|C_i\|_1 + \|C_d^{(i)}\|_Q)]\|\eta_i\|_1 \leqslant$$
$$\leqslant [\beta_1\|\xi_i\|_1 + \mu_0\gamma_4(\gamma_4\hat{M}_C + \|C_d^{(i)}\|_Q)]\|\eta_i\|_1.$$

Отсюда выводим следующую оценку для η_i:

$$\|\eta_i\|_1 \leqslant \frac{\beta_1}{\delta_1\lambda\varkappa}\|\xi_i\|_1 + \frac{\mu_0\tilde{M}_C}{\delta_1\lambda\varkappa}, \qquad \tilde{M}_C = \gamma_4^2\hat{M}_C + \gamma_4\max(\|C_d^{(1)}\|_Q, \|C_d^{(2)}\|_Q). \tag{3.23}$$

С учетом (1.5), (1.6), (3.4) и (3.23) имеем

$$|c(\xi_i, \boldsymbol{u}_i, \xi_i)| \leqslant \gamma_0\hat{M}_{\boldsymbol{u}}\|\xi_i\|_1^2,$$
$$\varkappa|c_1(\xi_i, C_i, \eta_i)| \leqslant \gamma_1\varkappa\|\xi_i\|_1\|C_i\|_1\|\eta_i\|_1 \leqslant (\beta_1\gamma_1/(\delta_1\lambda))\hat{M}_C\|\xi_i\|_1^2 + (\gamma_1\hat{M}_C/(\delta_1\lambda))\mu_0\tilde{M}_C\|\xi_i\|_1,$$
$$a_0(\xi_i, \xi_i) \geqslant \delta_0\|\xi_i\|_1^2.$$

Используя эти неравенства и (3.5), из (3.21) выводим

$$\frac{\delta_0\nu}{2}\|\xi_i\|_1^2 \leqslant \Big(\delta_0\nu - \gamma_0\hat{M}_{\boldsymbol{u}} - \frac{\beta_1\gamma_1}{\delta_1\lambda}\hat{M}_C\Big)\|\xi_i\|_1^2 \leqslant \frac{\gamma_1\hat{M}_C\mu_0\tilde{M}_C}{\delta_1\lambda}\|\xi_i\|_1. \tag{3.24}$$

Из (3.24), (3.1) и (3.23) получаем следующие оценки для ξ_i и η_i:

$$\|\xi_i\|_1 \leqslant \frac{2}{\delta_0\nu}\frac{\gamma_1\hat{M}_C\mu_0\tilde{M}_C}{\delta_1\lambda} = \frac{2\mu_0\tilde{M}_C\,\mathrm{R}}{\beta_1}, \qquad \|\eta_i\|_1 \leqslant \frac{\mu_0\tilde{M}_C(2\,\mathrm{R}+1)}{\delta_1\lambda\varkappa}. \tag{3.25}$$

Далее вычтем друг из друга уравнения (2.5) при $\lambda_0 = 1$, $\tilde{J} = J_1$, записанные для $(\boldsymbol{x}_1, u_1, \boldsymbol{y}_1^*)$ и $(\boldsymbol{x}_2, u_2, \boldsymbol{y}_2^*)$. С учетом (3.3) имеем

$$\begin{gathered}\nu a_0(\boldsymbol{w}, \xi) + c(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{w}, \xi) + c(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w}, \xi_2) + c(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{u}_1, \xi) + c(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{u}, \xi_2) + \varkappa c_1(\boldsymbol{w}, C_1, \eta) + \\ + \varkappa c_1(\boldsymbol{w}, C, \eta_2) + b(\boldsymbol{w}, \sigma) + \langle\zeta, \boldsymbol{w}\rangle_\Gamma = 0 \quad \forall \boldsymbol{w} \in \tilde{\boldsymbol{H}}^1(\Omega), \\ b(\xi, r) = 0 \qquad \forall r \in L_0^2(\Omega), \\ \varkappa[\lambda a_1(\varphi, \eta) + \lambda(\alpha_1\tau, \eta)_{\Gamma_N} + \lambda(\alpha\tau, \eta_2)_{\Gamma_N} + (k_1\varphi, \eta) + (k\varphi, \eta_2) + c_1(\boldsymbol{u}_1, \varphi, \eta) + \\ + c_1(\boldsymbol{u}, \varphi, \eta_2) + \langle\tau, \varphi\rangle_{\Gamma_D}] + b_1(\varphi, \xi) + \mu_0(C - C_d, \varphi)_Q = 0 \quad \forall \varphi \in H^1(\Omega).\end{gathered} \tag{3.26}$$

Полагая в (3.26) $\boldsymbol{w} = \xi \in \boldsymbol{V}$, $\varphi = \eta \in Z$ и $r = \sigma \in L_0^2(\Omega)$, с учетом (1.3), (1.4) и условий $\xi|_\Gamma = 0$, $\eta|_{\Gamma_D} = 0$ получаем

$$\nu a_0(\xi, \xi) + c(\xi, \boldsymbol{u}_1, \xi) = -c(\boldsymbol{u}, \xi, \xi_2) - c(\xi, \boldsymbol{u}, \xi_2) - \varkappa c_1(\xi, C, \eta_2) - \varkappa c_1(\xi, C_1, \eta); \tag{3.27}$$

$$\lambda a_1(\eta, \eta) + \lambda(\alpha_1\eta, \eta)_{\Gamma_N} + (k_1\eta, \eta) =$$
$$= -c_1(\boldsymbol{u}, \eta, \eta_2) - \lambda(\alpha\eta, \eta_2)_{\Gamma_N} - (k\eta, \eta_2) - \varkappa^{-1}\mu_0(C - C_d, \eta)_Q - \varkappa^{-1}b_1(\eta, \xi). \tag{3.28}$$

С учетом условий $\eta \in Z$, $\alpha_1 \geqslant 0$, $k_1 \geqslant 0$ и (3.13) из (3.28) выводим

$$\delta_1\lambda\|\eta\|_1^2 \leqslant (\gamma_1\|\eta_2\|_1\|\boldsymbol{u}\|_1 + \gamma_3\lambda\|\eta_2\|_1\|\alpha\|_{\Gamma_N} + \gamma_5\|\eta_2\|_1\|k\| + \mu_0\varkappa^{-1}\gamma_4^2\|C\|_1 +$$
$$+ \mu_0\varkappa^{-1}\gamma_4\|C_d\|_Q + \beta_1\varkappa^{-1}\|\xi\|_1)\|\eta\|_1 \equiv (\|z\| + \beta_1\varkappa^{-1}\|\xi\|_1 + \mu_0\varkappa^{-1}\gamma_4\|C_d\|_Q)\|\eta\|_1.$$

Отсюда следует оценка

$$\|\eta\|_1 \leqslant \frac{\|z\|}{\delta_1\lambda} + \frac{\beta_1}{\delta_1\lambda\varkappa}\|\xi\|_1 + \frac{\mu_0\gamma_4}{\delta_1\lambda\varkappa}\|C_d\|_Q. \tag{3.29}$$

Рассуждая как при выводе (3.24), с учетом (3.29) из (3.27) получаем

$$(\delta_0\nu - \gamma_0\hat{M}_{\boldsymbol{u}})\|\xi\|_1^2 \leqslant 2\gamma_0\|\boldsymbol{u}\|_1\|\xi_2\|_1\|\xi\|_1 + \gamma_1\varkappa\|C\|_1\|\eta_2\|_1\|\xi\|_1 + \\ + \frac{\gamma_1\varkappa\hat{M}_C}{\delta_1\lambda}\,\|z\|\|\xi\|_1 + \frac{\beta_1\gamma_1\hat{M}_C}{\delta_1\lambda}\,\|\xi\|_1^2 + \frac{\mu_0\gamma_1\gamma_4\hat{M}_C}{\delta_1\lambda}\,\|C_d\|_Q\|\xi\|_1.$$

После деления на $\|\xi\|_1$ из этого соотношения и соотношения (3.5) следует

$$\frac{\delta_0\nu}{2}\|\xi\|_1 \leqslant \Big(\delta_0\nu - \gamma_0\hat{M}_{\boldsymbol{u}} - \frac{\beta_1\gamma_1}{\delta_1\lambda}\,\hat{M}_C\Big)\|\xi\|_1 \leqslant \\ \leqslant 2\gamma_0\|\boldsymbol{u}\|_1\|\xi_2\|_1 + \gamma_1\varkappa\|C\|_1\|\eta_2\|_1 + \frac{\gamma_1\varkappa\hat{M}_C}{\delta_1\lambda}\,\|z\| + \frac{\mu_0\gamma_1\gamma_4\hat{M}_C}{\delta_1\lambda}\,\|C_d\|_Q. \qquad (3.30)$$

Используя оценки (3.25) для $\|\xi_2\|_1$, $\|\eta_2\|_1$, (3.20) для $\|C\|_1$, $\|\boldsymbol{u}\|_1$, а также соотношение $(\delta_1\lambda)^{-2} = \mathrm{Pr}\,/(\delta_0\nu\delta_1\lambda)$, вытекающее из (3.1), имеем

$$2\gamma_0\|\boldsymbol{u}\|_1\|\xi_2\|_1 + \gamma_1\varkappa\|C\|_1\|\eta_2\|_1 \leqslant \gamma_0\,\frac{8\mu_0\tilde{M}_C\,\mathrm{R}^2}{\beta_1\gamma_1(1-2\,\mathrm{R})\hat{M}_C}\,\|u\| + \frac{\gamma_1\mu_0\tilde{M}_C(2\,\mathrm{R}+1)}{\delta_1\lambda\delta_1\lambda(1-2\,\mathrm{R})}\,\|u\| \leqslant \\ \leqslant \frac{\mu_0\,\mathrm{R}\,\tilde{M}_C}{\beta_1(1-2\,\mathrm{R})\hat{M}_C}\Big(\frac{8\gamma_0\,\mathrm{R}}{\gamma_1} + \mathrm{Pr}(2\,\mathrm{R}+1)\Big)\|u\|. \qquad (3.31)$$

Аналогично с учетом (3.13) и условия $\gamma_4^2\hat{M}_C \leqslant \tilde{M}_C$ получаем

$$\frac{\gamma_1\varkappa\hat{M}_C}{\delta_1\lambda}\,\|z\| \leqslant \frac{\gamma_1\hat{M}_C\gamma_1\mu_0\tilde{M}_C(2\,\mathrm{R}+1)2\,\mathrm{R}}{\delta_1\lambda\delta_1\lambda\gamma_1(1-2\,\mathrm{R})\hat{M}_C}\,\|u\| + \\ + \frac{\gamma_1\hat{M}_C}{\delta_1\lambda}\,\frac{\mu_0\gamma_4^2}{\delta_1\lambda(1-2\,\mathrm{R})}\,\|u\| + \frac{\gamma_1\hat{M}_C}{\delta_1\lambda}\,\frac{\mu_0\tilde{M}_C(2\,\mathrm{R}+1)\gamma_3\lambda}{\delta_1\lambda}\,\|\alpha\|_{\Gamma_N} \leqslant \\ \leqslant \frac{\mu_0\tilde{M}_C\,\mathrm{Pr}\,\mathrm{R}}{\beta_1\hat{M}_C}\Big(\frac{2\,\mathrm{R}(2\,\mathrm{R}+1)}{1-2\,\mathrm{R}} + (2\,\mathrm{R}+1) + \frac{1}{1-2\,\mathrm{R}}\Big)\|u\| \leqslant \\ \leqslant \frac{\mu_0\,\mathrm{Pr}\,\mathrm{R}(2\,\mathrm{R}+2)\tilde{M}_C}{\beta_1(1-2\,\mathrm{R})\hat{M}_C}\,\|u\|. \qquad (3.32)$$

Учитывая (3.31), (3.32), из (3.30) имеем

$$\frac{\delta_0\nu}{2}\,\|\xi\|_1 \leqslant \frac{\mu_0\,\mathrm{R}\,\tilde{M}_C}{\beta_1(1-2\,\mathrm{R})\hat{M}_C}\Big(\frac{8\gamma_0\,\mathrm{R}}{\gamma_1} + \mathrm{Pr}(2\,\mathrm{R}+1) + \mathrm{Pr}(2\,\mathrm{R}+2)\Big)\|u\| + \\ + \frac{\mu_0\gamma_1\gamma_4}{\delta_1\lambda}\,\hat{M}_C\|C_d\|_Q = \frac{\mu_0 M_1\tilde{M}_C}{\beta_1(1-2\,\mathrm{R})\hat{M}_C}\,\|u\| + \frac{\mu_0\gamma_1\gamma_4}{\delta_1\lambda}\,\hat{M}_C\|C_d\|_Q.$$

Здесь $M_1 = M_1(\mathrm{R},\mathrm{Pr}) = 8(\gamma_0/\gamma_1)\,\mathrm{R}^2 + \mathrm{Pr}\,\mathrm{R}(4\,\mathrm{R}+3)$ — безразмерная константа, зависящая от чисел Рэлея и Прандтля. Отсюда следует

$$|\xi\|_1 \leqslant \frac{2\mu_0 M_1\tilde{M}_C}{\delta_0\nu\beta_1(1-2\,\mathrm{R})\hat{M}_C}\,\|u\| + \frac{2\mu_0\gamma_4\,\mathrm{R}}{\beta_1}\,\|C_d\|_Q. \qquad (3.33)$$

Используя (3.33), (3.29) запишем в виде

$$\|\eta\|_1 \leqslant \frac{1}{\delta_1\lambda}\,\|z\| + \frac{1}{\delta_1\lambda\varkappa}\,\frac{2\mu_0 M_1\tilde{M}_C}{\delta_0\nu(1-2\,\mathrm{R})\hat{M}_C}\,\|u\| + \frac{\mu_0\gamma_4}{\delta_1\lambda\varkappa}(2\,\mathrm{R}+1)\|C_d\|_Q. \qquad (3.34)$$

Из (3.32) следует

$$\frac{1}{\delta_1\lambda}\,\|z\| \leqslant \frac{\mu_0\,\mathrm{Pr}\,\mathrm{R}(2\,\mathrm{R}+2)\tilde{M}_C}{\beta_1\gamma_1(1-2\,\mathrm{R})\varkappa\hat{M}_C^2}\,\|u\|. \tag{3.35}$$

Из (3.34), (3.35) через $\|u\|$ и $\|C_d\|_Q$ выводим следующую оценку для $\|\eta\|_1$:

$$\|\eta\|_1 \leqslant \frac{1}{\varkappa}\Big(\frac{\mu_0\,\mathrm{Pr}\,\mathrm{R}(2\,\mathrm{R}+2)\tilde{M}_C}{\beta_1\gamma_1(1-2\,\mathrm{R})\hat{M}_C^2} + \frac{\beta_1}{\delta_1\lambda}\,\frac{2\mu_0 M_1\tilde{M}_C}{\delta_0\nu\beta_1(1-2\,\mathrm{R})\hat{M}_C}\Big)\|u\| + \frac{\mu_0\gamma_4(2\,\mathrm{R}+1)}{\delta_1\lambda\varkappa}\,\|C_d\|_Q =$$
$$= \frac{\mu_0}{\varkappa}\,\frac{M_2\tilde{M}_C}{\beta_1\gamma_1(1-2\,\mathrm{R})\hat{M}_C^2}\,\|u\| + \frac{\mu_0\gamma_4(2\,\mathrm{R}+1)}{\delta_1\lambda\varkappa}\,\|C_d\|_Q \tag{3.36}$$

($M_2 = 2\,\mathrm{Pr}\,\mathrm{R}(\mathrm{R}+1) + 2\,\mathrm{R}\,M_1$).

Используя (3.20), (3.25), (3.36), оценим правую часть неравенства (3.14). В результате получаем

$$\varkappa\Big(\|\eta\|_1 + \frac{\|C\|_1\|\eta_1\|_1}{\hat{M}_C}\Big) \leqslant \Big(\frac{\mu_0 M_2\tilde{M}_C}{\beta_1\gamma_1(1-2\,\mathrm{R})\hat{M}_C^2} + \frac{\mu_0\tilde{M}_C(2\,\mathrm{R}+1)}{(\delta_1\lambda)^2(1-2\,\mathrm{R})\hat{M}_C}\Big)\|u\| +$$
$$+ \frac{\mu_0\gamma_4(2\,\mathrm{R}+1)}{\delta_1\lambda}\,\|C_d\|_Q = \frac{\mu_0 M_3\tilde{M}_C}{\beta_1\gamma_1\hat{M}_C^2}\,\|u\| + \frac{\mu_0\gamma_4(2\,\mathrm{R}+1)}{\delta_1\lambda}\,\|C_d\|_Q. \tag{3.37}$$

Здесь $M_3 = M_3(\mathrm{R},\mathrm{Pr})$ — константа, определяемая формулой

$$M_3 = M/(1-2\,\mathrm{R}), \qquad M = \mathrm{R}(16\gamma_0\,\mathrm{R}^2/\gamma_1 + 8\,\mathrm{Pr}\,\mathrm{R}^2 + 10\,\mathrm{Pr}\,\mathrm{R} + 3\,\mathrm{Pr}). \tag{3.38}$$

Используя (3.37) и алгебраическое неравенство $(a+b+c)^2 \leqslant 3(a^2+b^2+c^2)$ $\forall a\in\mathbb{R}^+$, $b\in\mathbb{R}^+$, $c\in\mathbb{R}^+$, из (3.14) имеем

$$\mu_1\|\chi\|^2_{\Gamma_N} + \mu_2\|\alpha\|^2_{\Gamma_N} + \mu_3\|k\|^2 \leqslant \frac{\mu_0 M_3\tilde{M}_C}{\beta_1\gamma_1\hat{M}_C^2}\,\|u\|^2 + \frac{\mu_0\gamma_4(2\,\mathrm{R}+1)\|C_d\|_Q}{\delta_1\lambda}\,\|u\| \leqslant$$
$$\leqslant \frac{3\mu_0 M_3\tilde{M}_C}{\beta_1\gamma_1\hat{M}_C^2}\,(\gamma_2^2\|\chi\|^2_{\Gamma_N} + \gamma_3^2\lambda^2\hat{M}_C^2\|\alpha\|^2_{\Gamma_N} + \gamma_5^2\hat{M}_C^2\|k\|^2) + \frac{\mu_0\gamma_4(2\,\mathrm{R}+1)\|C_d\|_Q}{\delta_1\lambda}\,\|u\|.$$

Полученное неравенство запишем в виде

$$\Big(\mu_1 - \frac{3\mu_0\gamma_2^2 M_3\tilde{M}_C}{\beta_1\gamma_1\hat{M}_C^2}\Big)\|\chi\|^2_{\Gamma_N} + \Big(\mu_2 - \frac{3\mu_0\gamma_3^2\lambda^2 M_3\tilde{M}_C}{\beta_1\gamma_1}\Big)\|\alpha\|^2_{\Gamma_N} +$$
$$+ \Big(\mu_3 - \frac{3\mu_0\gamma_5^2 M_3\tilde{M}_C}{\beta_1\gamma_1}\Big)\|k\|^2 \leqslant \frac{\mu_0\gamma_4(2\,\mathrm{R}+1)\|C_d\|_Q\|u\|}{\delta_1\lambda}. \tag{3.39}$$

Предположим, что параметры μ_l, входящие в (2.2), таковы, что

$$\mu_1 \geqslant \mu_0\,\frac{3\gamma_2^2 M_3\tilde{M}_C}{\beta_1\gamma_1\hat{M}_C^2} + 3\varepsilon\gamma_2^2, \qquad \mu_2 \geqslant \mu_0\,\frac{3\gamma_3^2\lambda^2 M_3\tilde{M}_C}{\beta_1\gamma_1} + 3\varepsilon\gamma_3^2\lambda^2\hat{M}_C^2,$$
$$\mu_3 \geqslant \mu_0\,\frac{3\gamma_5^2 M_3\tilde{M}_C}{\beta_1\gamma_1} + 3\varepsilon\gamma_5^2\hat{M}_C^2, \qquad \varepsilon = \mathrm{const} > 0. \tag{3.40}$$

Тогда с учетом (3.40) из (3.39) имеем

$$\|u\|^2 \leqslant 3(\gamma_2^2\|\chi\|^2_{\Gamma_N} + \gamma_3^2\lambda^2\hat{M}_C^2\|\alpha\|^2_{\Gamma_N} + \gamma_5^2\hat{M}_C^2\|k\|^2) \leqslant \frac{\mu_0\gamma_4(2\,\mathrm{R}+1)\|C_d\|_Q}{\delta_1\lambda\varepsilon}\,\|u\|.$$

Отсюда и из соотношений (3.20) получаем

$$\begin{gathered}\|u\| = \|u_1 - u_2\| \leqslant \frac{\mu_0\gamma_4(2\,\mathrm{R}+1)}{\varepsilon\delta_1\lambda}\,\|C_d^{(1)} - C_d^{(2)}\|_Q,\\ \|C_1 - C_2\|_1 \leqslant \frac{\mu_0\gamma_4(1+2\,\mathrm{R})}{\varepsilon(\delta_1\lambda)^2(1-2\,\mathrm{R})}\,\|C_d^{(1)} - C_d^{(2)}\|_Q,\\ \|\boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{u}_2\| \leqslant \frac{2\mu_0\gamma_4\beta_1(1+2\,\mathrm{R})}{\varepsilon\delta_0\nu(\delta_1\lambda)^2(1-2\,\mathrm{R})}\,\|C_d^{(1)} - C_d^{(2)}\|_Q.\end{gathered} \tag{3.41}$$

Из (3.41) следуют единственность и устойчивость решения задачи идентификации (2.2) относительно малых возмущений заданной функции C_d в норме $L^2(Q)$. Полученный результат сформулируем в виде теоремы.

Теорема 5. *Пусть в дополнение к условиям* 1–4 *заданы функции* $C_d^{(i)} \in L^2(Q)$ ($i = 1,2$) *и выполняются условия* (3.2), (3.40), *где* $\tilde M_C = \gamma_4^2 \hat M_C + \gamma_4 \max(\|C_d^{(1)}\|_Q, \|C_d^{(2)}\|_Q)$, *а константа* M_3 *определена в* (3.38). *Обозначим через* $((\boldsymbol{u}_i, p_i, C_i), u_i) \in X \times K$ *решение задачи* (2.2), *соответствующее* $C_d^{(i)}$. *Тогда справедливы оценки устойчивости* (3.41).

Таким образом, в настоящей работе для стационарной модели массопереноса сформулирована и исследована задача идентификации (2.2). На основе анализа системы оптимальности для задачи (2.2) при $\tilde J = J_1$ получены два условия на исходные данные. Эти условия обеспечивают единственность и устойчивость решения задачи (2.2), причем первое условие имеет вид стандартного условия (3.2), обеспечивающего единственность решения исходной краевой задачи, второе условие имеет вид оценок (3.40) параметров μ_0, μ_1, μ_2, μ_3, входящих в экстремальную задачу (2.2). Аналогичные условия могут быть получены при $\tilde J = J$.

С одной стороны, условия (3.40) аналогичны условиям единственности и устойчивости решения коэффициентной задачи идентификации для линейного уравнения переноса — конвекции — реакции (см., например, [11]). С другой стороны, в этих условиях содержится сжатая информация об исходной нелинейной модели массопереноса в виде безразмерной константы M, определенной в (3.38). Анализ рассмотренного выражения для M показывает, что, в случае если при исследовании задачи (2.2) безразмерные параметры Re, R, Pr, введенные в (3.1), не используются, выражение для M имеет громоздкий вид. В то же время из (3.38) следует, что M зависит только от R и Pr, причем при $\mathrm{R} \to 0$ $\ M \to 0$. Следовательно, при фиксированных значениях параметров μ_l соотношения (3.40) представляют собой дополнительное ограничение на число Рэлея R, вместе с (3.2) обеспечивающее единственность и устойчивость решения задачи (2.2). Отметим, что константа M в (3.38) совпадает с константой, входящей в аналогичное условие единственности однопараметрической задачи идентификации для модели тепловой конвекции, рассмотренной в [8]. Следовательно, при исследовании единственности решений задач идентификации для стационарных моделей тепломассопереноса константа M играет ключевую роль. Отметим также, что при фиксированных значениях R и Pr неравенства (3.40) означают, что для обеспечения единственности и устойчивости решения задачи (2.2) значения параметров μ_1, μ_2, μ_3 должны быть положительными и превышать константы в правых частях неравенств (3.40).

ЛИТЕРАТУРА

1. **Gunzburger M. D., Hou L., Svobodny T. P.** The approximation of boundary control problems for fluid flows with an application to control by heating and cooling // Comput. Fluids. 1993. V. 22. P. 239–251.

2. **Capatina A., Stavre R.** A control problem in bioconvective flow // J. Math. Kyoto Univ. 1998. V. 37, N 4. P. 585–595.
3. **Lee H.-C., Imanuvilov O. Yu.** Analysis of optimal control problems for the 2-D stationary Boussinesq equations // J. Math. Anal. Appl. 2000. V. 242, N 2. P. 191–211.
4. **Алексеев Г. В.** Разрешимость стационарных задач граничного управления для уравнений тепловой конвекции // Сиб. мат. журн. 1998. Т. 39, № 5. С. 982–998.
5. **Алексеев Г. В.** Разрешимость обратных экстремальных задач для стационарных уравнений тепломассопереноса // Сиб. мат. журн. 2001. Т. 42, № 5. С. 971–991.
6. **Alekseev G. V., Adomavichus E. A.** Theoretical analysis of inverse extremal problems of admixture diffusion in viscous fluids // J. Inv. Ill-Posed Probl. 2001. V. 9, N 5. P. 435–468.
7. **Алексеев Г. В.** Обратные экстремальные задачи для стационарных уравнений теории массопереноса // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2002. Т. 42, № 3. С. 380–394.
8. **Алексеев Г. В.** Обратные экстремальные задачи для стационарных уравнений тепловой конвекции // Вестн. НГУ. Сер. Математика, механика, информатика. 2006. Т. 6. С. 7–33.
9. **Иоффе А. Д.** Теория экстремальных задач / А. Д. Иоффе, В. М. Тихомиров. М.: Наука, 1974.
10. **Сеа Ж.** Оптимизация. Теория и алгоритмы. М.: Мир, 1973.
11. **Алексеев Г. В., Калинина Е. А.** Идентификация младшего коэффициента для стационарного уравнения конвекции — диффузии — реакции // Сиб. журн. индустр. математики. 2007. Т. 10, № 1. С. 3–16.

Поступила в редакцию 27/II 2007 г.,
в окончательном варианте — 23/VIII 2007 г.