

12. Нигматулин Р. И. Динамика многофазных сред.— М.: Наука, 1987.  
 13. Ranz W. E., Wong J. B. Impaction of dust and smoke particles // Industr. and Eng. Chem.— 1952.— № 6.  
 14. Гонор А. Л., Ривкинд В. Я. Динамика капли // Итоги науки и техники. Сер. МЖГ.— М.: ВИНТИ, 1982.— Т. 17.  
 15. Райст П. Аэрозоли.— М.: Мир, 1987.  
 16. Ивандаев А. И. Об оценке характерных времен динамического и теплового взаимодействия фаз в задачах волновой динамики газовзвесей // ПМТФ.— 1982.— № 2.  
 г. Чимкент, г. Тюмень

Поступила 19/VII 1988 г.,  
 в окончательном варианте — 3/IV 1990 г.

УДК 533.6.011

И. Г. Брыкина, В. В. Русаков, В. Г. Щербак

### АНАЛИТИЧЕСКОЕ И ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ПРОСТРАНСТВЕННОГО ВЯЗКОГО УДАРНОГО СЛОЯ НА ЗАТУПЛЕННЫХ ТЕЛАХ

Среди задач гиперзвуковой аэродинамики в последнее время одними из наиболее важных являются пространственные задачи вязкого обтекания, связанные с разработкой аппаратов, движущихся в верхних слоях атмосферы. Применение к решению таких задач численных методов требует больших затрат машинного времени и оперативной памяти ЭВМ, поэтому весьма актуальна разработка приближенных методов, которые, обладая достаточной точностью, могут применяться в инженерной практике. Много приближенных методов разработано для больших чисел Рейнольдса  $Re$ . Они основаны на использовании теории пограничного слоя и требуют знания параметров невязкого течения на поверхности тела. В то же время пока не существует аналогичных методов, пригодных для решения трехмерных задач вязкого обтекания при малых и умеренных числах Рейнольдса ( $Re \leq 10^3$ ), когда вязкость существенна во всей области возмущенного течения и классическая теория пограничного слоя становится неприменимой.

В настоящей работе на основе приближенного решения уравнений трехмерного гиперзвукового вязкого ударного слоя получено аналитическое решение для определения тепловых потоков и напряжения трения на боковой поверхности затупленных тел при малых и умеренных  $Re$  с учетом эффектов скольжения и скачка температуры на поверхности. Для течений с умеренными и большими  $Re$  получена простая формула для распределения по поверхности теплового потока, отнесенного к его значению в точке торможения. Эта формула зависит только от геометрии обтекаемого тела. Данная работа — продолжение [1], где аналогичная задача решалась для окрестности плоскости симметрии.

1. Рассмотрим стационарное трехмерное обтекание гладких затупленных тел гиперзвуковым потоком вязкого газа при малых и умеренных  $Re$ . Течение исследуется в рамках модели тонкого вязкого ударного слоя, аналогичной двухслойной модели, предложенной в [2] для осесимметричного обтекания и обобщенной в [3] на случай пространственных течений.

Пусть поверхность обтекаемого тела задана в декартовой системе координат уравнением  $z = f(x, y)$ , вектор скорости набегающего потока  $V_\infty$  совпадает по направлению с осью  $z$ , начало координат помещено в точку торможения потока, а оси  $x$  и  $y$  расположены в плоскостях главных кривизн поверхности в этой точке. Выберем систему криволинейных неортогональных координат  $\{x^i\}$ , связанную с обтекаемой поверхностью:  $x^3$  — расстояние по нормали к поверхности, а в качестве двух других, выбранных на поверхности, используются декартовы координаты точки пересечения этой нормали с поверхностью:  $x^1 = x$ ,  $x^2 = y$ ,  $z = f(x^1, x^2)$ .

Уравнения трехмерного тонкого вязкого ударного слоя в системе координат  $\{x^i\}$  имеют вид

$$(1.1) \quad \frac{\partial}{\partial x^3} \left( \rho u^\alpha \sqrt{\frac{g}{g(\alpha\alpha)}} \right) + \frac{\partial}{\partial x^3} (\rho u^3 \sqrt{g}) = 0,$$

$$\rho \left( \frac{u^\alpha}{\sqrt{g(\alpha\alpha)}} \frac{\partial u^\gamma}{\partial x^\alpha} + u^3 \frac{\partial u^\gamma}{\partial x^3} \right) + \rho A_{\alpha\beta}^\gamma u^\alpha u^\beta = - \sqrt{g(\gamma\gamma)g^{\beta\gamma}} \frac{\partial p}{\partial x^\beta} + \frac{\partial}{\partial x^3} \left( \frac{\mu}{Re} \frac{\partial u^\gamma}{\partial x^3} \right),$$

$$\gamma = 1, 2,$$

$$\rho A_{\alpha\beta}^3 u^\alpha u^\beta = - \frac{\partial p}{\partial x^3},$$

$$\rho \frac{\partial u^\alpha}{\sqrt{g_{(\alpha\alpha)}}} \frac{\partial H^*}{\partial x^\alpha} + \rho u^3 \frac{\partial H^*}{\partial x^3} = \frac{\partial}{\partial x^3} \left\{ \frac{\mu}{\text{Re Pr}} \left[ \frac{\partial H^*}{\partial x^3} + (\text{Pr} - 1) \frac{\partial}{\partial x^3} \left( \frac{g_{\alpha\beta}}{\sqrt{g_{(\alpha\alpha)}g_{(\beta\beta)}}} u^\alpha u^\beta \right) \right] \right\},$$

$$\frac{p}{\rho} = \varepsilon T, \quad H^* = T + \frac{g_{\infty\infty}}{\sqrt{g_{(\alpha\alpha)}g_{(\beta\beta)}}} u^\alpha u^\beta, \quad \mu = T^\omega,$$

$$\varepsilon = \frac{\gamma - 1}{2\gamma}, \quad \text{Re} = \frac{\rho_\infty v_\infty R}{\mu(T_0)}, \quad T_0 = \frac{v_\infty^2}{2c_p},$$

$$g = g_{11}g_{22} - g_{12}^2, \quad g_{\alpha\alpha} = 1 + f_\alpha^2, \quad g_{12} = f_1' f_2', \quad f_\alpha' = \frac{\partial f}{\partial x^\alpha}.$$

Здесь и далее суммирование по индексам, заключенным в круглые скобки, не производится, греческие индексы принимают значения 1, 2;  $\rho_\infty$  — плотность;  $\rho_\infty v_\infty^2$  — давление;  $\mu(T_0)$  — коэффициент вязкости;  $H^* v_\infty^2/2$  — полная энтальпия;  $T T_0$  — температура;  $u^i v_\infty$  ( $i = 1, 2, 3$ ) — компоненты вектора скорости;  $R$  — характерный размер тела, в качестве которого выбирается один из радиусов главных кривизн в точке торможения;  $\text{Pr}$  — число Прандтля;  $\gamma$  — отношение удельных теплоемкостей; индексом  $\infty$  отмечены значения величин в невозмущенном потоке. Коэффициенты  $A_{\alpha\beta}^3$  — известные функции метрического тензора  $g_{\alpha\beta}$ , приведенные в [4].

На поверхности тела задаются граничные условия, учитывающие скорость скольжения и скачок температуры:

$$(1.2) \quad x^3 = 0: u^\alpha = \frac{2 - \theta}{\theta} \sqrt{\frac{\gamma\pi}{\gamma - 1}} \frac{\mu}{\rho \text{Re} \sqrt{T}} \frac{\partial u^\alpha}{\partial x^3}, \quad u^3 = 0,$$

$$H^* = H_w^* + \frac{2 - \alpha}{\alpha} \frac{2\gamma}{\gamma + 1} \sqrt{\frac{\gamma\pi}{\gamma - 1}} \frac{\mu}{\rho \text{Re Pr} \sqrt{T}} \frac{\partial H^*}{\partial x^3}.$$

На внутренней границе ударной волны используются обобщенные условия Ренкина — Гюгонио

$$(1.3) \quad x^3 = x_s^3: \rho \left( u^3 - \frac{u^\alpha}{\sqrt{g_{(\alpha\alpha)}}} \frac{\partial x_s^3}{\partial x^\alpha} \right) = u_\infty^3,$$

$$u_\infty^3 (u^\alpha - u_\infty^\alpha) = \frac{\mu}{\text{Re}} \frac{\partial u^\alpha}{\partial x^3}, \quad p = (u_\infty^3)^2 + \frac{p_\infty}{\rho_\infty v_\infty^2},$$

$$u_\infty^3 (H^* - H_\infty^*) = \frac{\mu}{\text{Re Pr}} \frac{\partial}{\partial x^3} \left[ H^* + (\text{Pr} - 1) \frac{g_{\alpha\beta} u^\alpha u^\beta}{\sqrt{g_{(\alpha\alpha)}g_{(\beta\beta)}}} \right],$$

где  $\theta$  — коэффициент диффузного отражения;  $\alpha$  — коэффициент аккомодации (в расчетах принималось  $\theta = 1$ ,  $\alpha = 1$ ); индексы  $w$  и  $s$  соответствуют значениям параметров на поверхности тела и на внутренней границе ударной волны.

Компоненты напряжения трения и тепловой поток вычисляются по формулам (штрихами отмечены размерные величины)

$$\tau^{\alpha'} = \mu' \left( \frac{\partial u^{\alpha'}}{\partial x^{3'}} + \frac{g_{\alpha\beta}}{\sqrt{g_{(\alpha\alpha)}g_{(\beta\beta)}}} \frac{\partial u^{\beta'}}{\partial x^{3'}} \right), \quad \alpha \neq \beta,$$

$$q' = \lambda' \frac{\partial T'}{\partial x^{3'}} + \mu' \frac{g_{\alpha\beta}}{2 \sqrt{g_{(\alpha\alpha)}g_{(\beta\beta)}}} \frac{\partial (u^{\alpha'} u^{\beta'})}{\partial x^{3'}}.$$

Число Стантона и коэффициенты трения определяются следующим образом:

$$c_H = q' / [\rho_\infty v_\infty (H_\infty^* - H_w^*)], \quad c_f^\alpha = \tau^{\alpha'} / (\rho_\infty v_\infty^2).$$

2. Система уравнений (1.1) имеет особенность в критической точке. Чтобы разрешить эту особенность, перейдем к новым зависимым переменным  $u^\alpha = u_\infty^\alpha u_*^\alpha$ . В выбранной системе координат  $u_\infty^\alpha = f'_\alpha \sqrt{g_{(\alpha\alpha)}}/g$ .

Далее перейдем к новым независимым переменным типа переменных Дородницына

$$\xi^\alpha = x^\alpha, \quad \zeta = \frac{1}{\Delta} \int_0^{x^3} \rho dx^3, \quad \Delta = \int_0^{x_s^3} \rho dx^3.$$

Уравнения трехмерного вязкого ударного слоя, записанные в новых переменных, будем решать интегральным методом последовательных приближений, впервые предложенным для решения двумерных уравнений пограничного слоя в [5]. Затем в [6] был разработан аналогичный метод применительно к решению двумерных задач гиперзвукового вязкого ударного слоя. Уравнения импульсов и энергии интегрируются 2 раза по поперечной координате с учетом граничных условий (1.2) и (1.3). Для решения получившейся в результате системы интегродифференциальных уравнений строится итерационный процесс, в котором каждое последующее приближение для искомых функций выражается через интегралы от предыдущего приближения. Для того чтобы все приближения удовлетворяли граничным условиям как на теле, так и на ударной волне, на каждом шаге итерационного процесса вводятся дополнительные управляющие функции  $\Delta^\alpha(x^1, x^2)$  и  $\Delta_H(x^1, x^2)$ , для которых получают дифференциальные уравнения в частных производных. Они в общем случае не имеют аналитического решения и поэтому в данной работе решались в локально-автомодельном приближении.

Зададим начальное приближение для компонент вектора скорости  $u_*^\alpha$  и приведенной полной энтальпии  $G = (H^* - H_w^*)/(H_\infty^* - H_w^*)$  в виде линейных функций по поперечной координате  $u_*^\alpha = a(\zeta + b)$ ,  $G = c(\zeta + d)$ , где  $a, b, c, d$  зависят от  $x^1$  и  $x^2$  и определяются из граничных условий на теле и на ударной волне. Тогда в первом приближении этого метода получим аналитическое решение для давления, компонент скорости, коэффициентов трения и числа Стантона:

$$(2.1) \quad p_w = \frac{1 - \text{Pr}_*^t}{g}, \quad \beta_* = \frac{\sigma_*^t}{3r\beta}, \quad t = 1 + 3b + b^2, \quad r = \frac{1}{2} + b;$$

$$(2.2) \quad u_*^\alpha = \sqrt{g} \alpha_0 \eta^\alpha \Delta^\alpha + \alpha_1 \Delta^{\alpha^2} (T^1(\zeta) - F^\alpha(\zeta)), \\ G = \sqrt{g} \alpha_0 \eta \Delta_H + \alpha_1 \text{Pr} \Delta_H^2 T^2(\zeta) + \frac{1 - \text{Pr}}{1 - G_w} \kappa_{\alpha\beta} u_*^\alpha u_*^\beta;$$

$$(2.3) \quad c_f^\alpha = \frac{2}{\sqrt{g}} \eta^\alpha \Delta^\alpha, \quad \eta^\alpha = r - \frac{1}{3} at - R^\alpha;$$

$$(2.4) \quad c_H = \frac{\eta}{\sqrt{g}} \Delta_H, \quad \eta = r - \frac{c}{3} \left[ \frac{3}{2} (b + d) + 3bd + 1 \right];$$

$$\lambda = \frac{f''_{11} f_1'^2 + 2f''_{12} f_1' f_2' + f''_{22} f_2'^2}{g^3}, \quad \kappa_{\alpha\alpha} = (1 + f'_\alpha)^2 \frac{f_\alpha'^2}{g^2}, \quad \kappa_{12} = \left( \frac{f_1' f_2'}{g} \right)^2.$$

Величины  $a, b, c, d, \alpha_0, \alpha_1, \Delta_H, \Delta^\alpha, R^\alpha, T^1, T^2, F^\alpha$  есть известные функции координат и газодинамических параметров задачи и определяются по формулам, приведенным в [1], в которые необходимо внести следующие изменения, связанные с трехмерностью задачи:

$$S^\alpha = - \frac{f_\alpha'^2 f_\beta'^2}{g_{(\alpha\alpha)} g^2} f''(\alpha) + \frac{f'_\alpha f'_\beta f''_{12} (1 + f'_\alpha - f'_\beta)}{g_{(\alpha\alpha)} g^2} + \frac{f_\beta'^2 f''_{\beta\beta}}{g^2} + \\ + \frac{1}{g_{(\alpha\alpha)} g} \left( 2f_\alpha'^2 \left( f''_{(\alpha\alpha)} + \frac{f'_\beta}{f'_\alpha} f''_{12} \right) - 2\lambda g, \quad \alpha \neq \beta, \right.$$

$$\begin{aligned}
h_3^\alpha &= \frac{\varepsilon}{3r\beta} (k_{2\alpha} - gk_{1\alpha}\lambda), \quad h_2^\alpha = h_3^\alpha (b-d), \quad h_1^\alpha = h_3^\alpha (b-d)^2, \\
h_0^\alpha &= \frac{2}{a} k_{1\alpha} - h_3^\alpha t, \\
k_{1\alpha} &= \frac{g\beta\beta}{f'_\alpha} \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \left( \frac{1}{g} \right) - f'_\beta \frac{\partial}{\partial x^\beta} \left( \frac{1}{g} \right), \quad k_{2\alpha} = \frac{g\beta\beta}{f'_\alpha} \frac{\partial \lambda}{\partial x^\alpha} - f'_\beta \frac{\partial \lambda}{\partial x^\beta}, \quad \alpha \neq \beta, \\
b_3 &= 1 - \frac{1 - \text{Pr}}{1 - G_w} \kappa_{\alpha\beta} u_s^\alpha u_s^\beta, \quad q_3 = \left( \frac{1}{g} - 1 \right) a^2, \quad \beta = \frac{2H}{\sqrt{g}}, \\
H &= \frac{i}{2g^{3/2}} [f''_{11} (1 + f_2'^2) + f''_{22} (1 + f_1'^2) - 2f''_{12} f_1' f_2'].
\end{aligned}$$

Здесь  $H$  — средняя кривизна поверхности, равная полусумме главных кривизн в рассматриваемой точке.

Расчеты по приведенным выше формулам, а также численное решение системы уравнений (1.1) показали, что при  $\text{Re} \geq 100$  на решение задачи практически не влияют условия скольжения на теле и на ударной волне. Если воспользоваться обычными условиями Ренкина — Гюгонио и условиями прилипания на теле, то  $a = c = 1$ ,  $b = d = 0$  и приведенные выше формулы значительно упрощаются.

Для числа Стантона, например, получаем выражение

$$(2.5) \quad c_H = \frac{\cos^{3/2} \alpha (2H)^{1/2}}{6 (\text{RePr} \varepsilon)^{1/2} (1 - T_w)^{1/4} (2/27 + (1/7) T_w)^{1/2}},$$

где  $\alpha$  — угол между вектором нормали к поверхности и вектором скорости набегающего потока. В системе координат, используемой в данной работе,  $\cos \alpha = 1/\sqrt{g}$ .

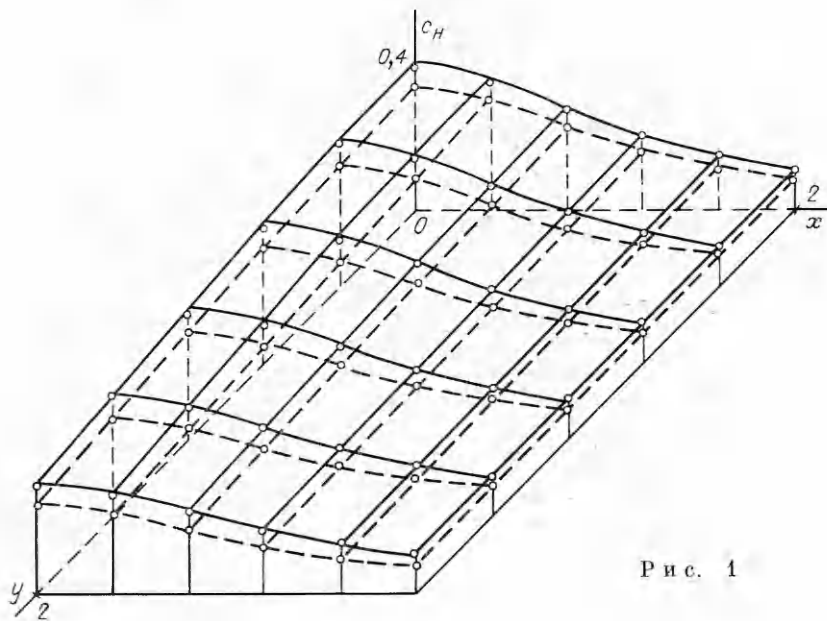
Распределение по поверхности величины теплового потока, отнесенного к его значению в критической точке,  $q/q_0 = c_H/c_{H0}$  (индекс 0 относится к соответствующим величинам в точке торможения) будет находиться по формуле

$$(2.6) \quad q/q_0 = \cos^{3/2} \alpha \sqrt{H/H_0},$$

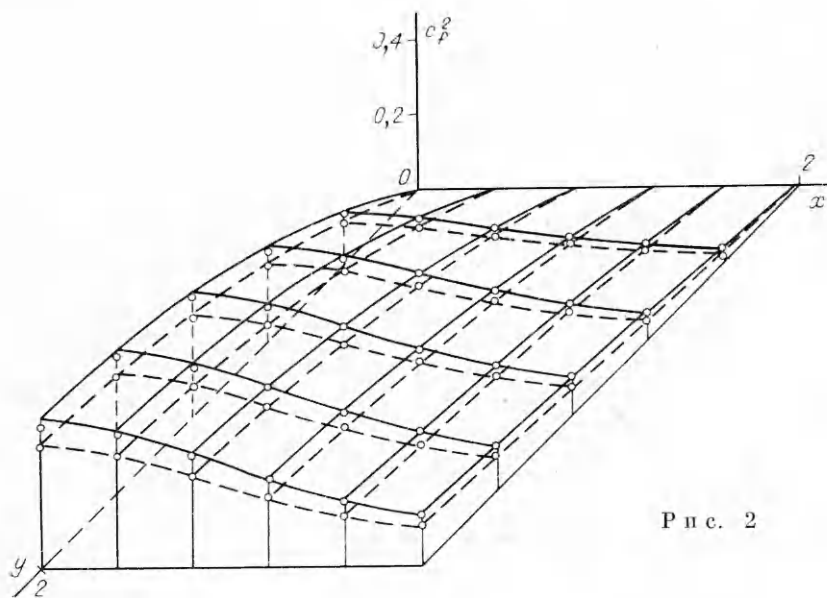
которая является обобщением на случай боковой поверхности соотношения, полученного в [1] для распределения  $q/q_0$  вдоль линии растекания. Из (2.6) следует, что при  $\text{Re} \geq 100$  относительный тепловой поток на боковой поверхности перестает зависеть от  $\text{Re}$  (при небольших  $\text{Re}$  такая зависимость существенна), а также не зависит от  $\gamma$ ,  $\text{Pr}$  и  $T_w$  (для охлаждаемой стенки  $T_w \leq 0,5$ ) и определяется только геометрическими характеристиками обтекаемого тела. Это подтверждается и результатами проведенных численных расчетов.

3. Точность полученных формул оценивалась путем сравнения с численным решением системы уравнений (1.1) с граничными условиями (1.2), (1.3). Использовался метод [7] четвертого порядка точности аппроксимации по поперечной координате и второго — по продольным. При этом продольные составляющие градиента давления задавались по формуле Ньютона. Для согласования численного и аналитического решений последнее было модифицировано, чтобы  $p_2^\sigma$  определялись по формуле Ньютона, и при проведении расчетов по формулам (2.1)—(2.4) полагалось  $k_{2\alpha} = 0$ .

Результаты расчетов, полученные с помощью формул (2.1)—(2.6), сравнивались с точным численным решением для различных эллиптических параболоидов, двуполостных гиперболоидов и трехосных эллипсоидов, обтекаемых под нулевым углом атаки. Сравнение проводилось в широком диапазоне изменения газодинамических параметров задачи:  $\text{Re} = 1 \div 10^4$ ,  $T_w = 0,01 \div 0,5$ ,  $\gamma = 1,1 \div 1,67$ . Сравнение аналитического решения с численным показало, что формулы (2.3)—(2.5) для абсолютных значений коэффициентов трения и теплообмена на поверхности дают хорошую точность при небольших числах Рейнольдса как при



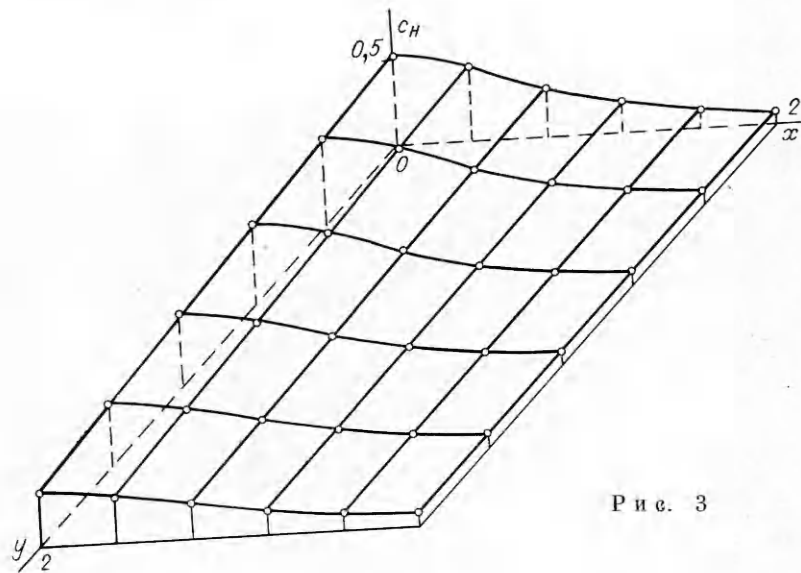
Р и с. 1



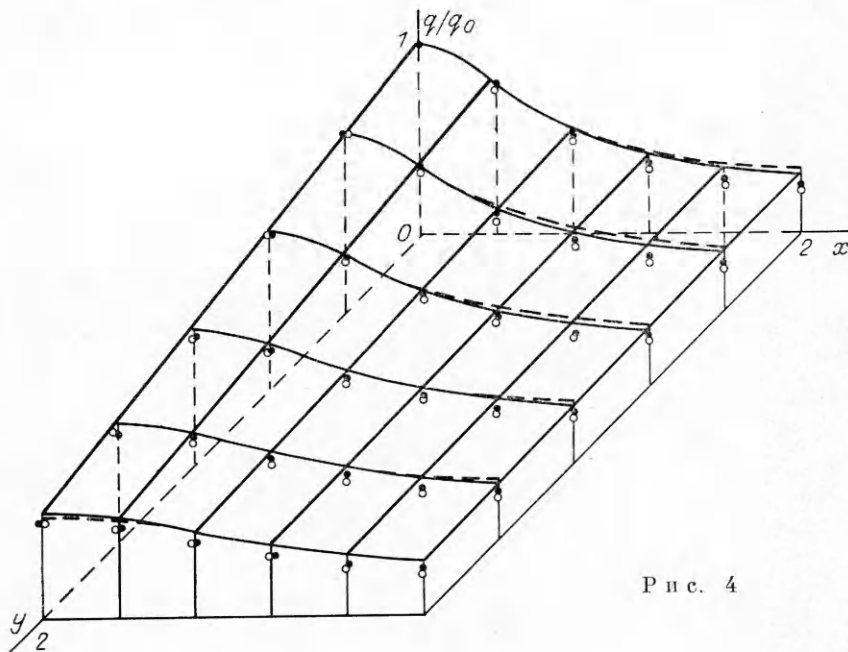
Р и с. 2

наличия эффектов скольжения, так и без их учета. Так, при  $Re \leq 10^2$  ошибка не превосходила 10 %. При увеличении  $Re$  точность формул для абсолютных величин  $c_H$  и  $c_f^\alpha$  уменьшается. Так, при  $Re = 10^3$  ошибка может составлять  $\sim 20$  %, а при  $Re = 10^4$  — до 30 %. Это связано с тем, что в качестве нулевого приближения в методе последовательных приближений задавались линейные профили для компонент скорости и энтальпии, что при больших  $Re$  уже не соответствует характеру этих профилей даже в переменных Дородницина. Однако при таких  $Re$  уже можно пользоваться формулами, предложенными в теории пограничного слоя (например, [8, 9]).

В то же время относительные величины тепловых потоков и напряжения трения определяются по предложенным формулам с вполне удовлетворительной точностью во всем диапазоне значений  $Re$  — от малых до больших.



Р и с. 3



Р и с. 4

На рис. 1, 2 представлены распределения  $c_H$  и коэффициента трения  $c_f^2$  вдоль поверхности эллиптического параболоида с отношением главных кривизн в критической точке  $k = 0,4$  (результаты для  $c_f^1$  аналогичны) для  $Re = 1$ ,  $\gamma = 1,4$ ,  $T_w = 0,1$ ,  $Pr = 0,71$ . Сплошные линии — результаты расчетов системы уравнений (1.1) без учета эффектов скольжения, штриховые — с использованием граничных условий (1.2), кружки — расчет по формулам (2.3), (2.4). На рис. 3 показано распределение  $c_H$  для тех же параметров при  $Re = 10$  с учетом эффектов скольжения, полученное из численного решения (сплошные линии) и аналитического (кружки).

Распределения относительного теплового потока вдоль боковой поверхности различных тел при умеренных и больших  $Re$  показаны на рис. 4–6, где штриховые линии — численное решение системы (1.1) при  $Re = 10^2$ , сплошные — при  $Re = 10^3, 10^4$  (они совпадают), светлые кружки — расчет по формуле (2.4) при  $Re = 10^2$ , темные — по формуле (2.6).

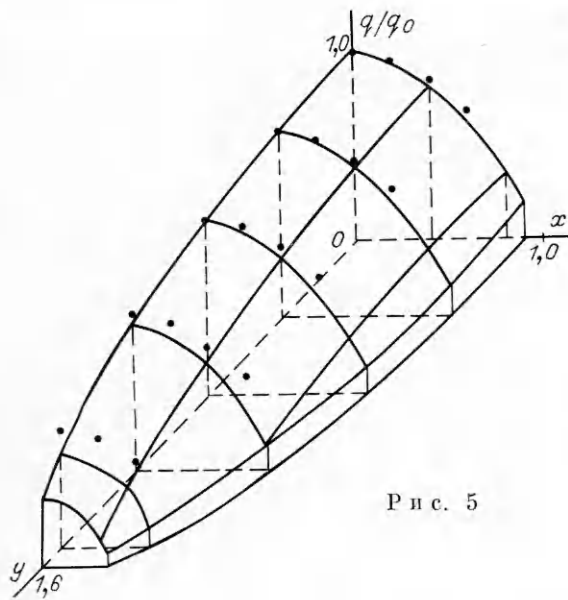


Рис. 5

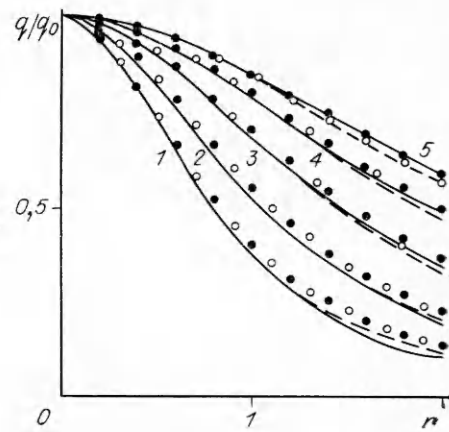


Рис. 6

Рис. 4 и 5 соответствуют обтеканию двуполостного гиперboloида с углом полураствора  $40^\circ$  в плоскости  $y = 0$  и  $k = 0,5$  и трехосного эллипсоида с соотношением между осями  $1 : 1,5 : 2$ . На рис. 6 даны зависимости  $q/q_0$  от  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$  вдоль поверхности эллиптического параболоида с  $k = 0,4$  для различных меридиональных сечений: линии 1—5 отвечают  $\varphi = 0; 45; 63,4; 76; 90^\circ$  ( $\varphi$  — угол между плоскостью данного сечения и плоскостью  $y = 0$ ).

Из представленных результатов следует, что при  $Re \geq 100$  зависимость распределения относительного теплового потока вдоль боковой поверхности от  $Re$  практически исчезает. Расчеты, проведенные для эллиптического параболоида и гиперboloида, показали также, что величина  $q/q_0$  вдоль боковой поверхности этих тел при варьировании параметров  $T_w = 0,01 \div 0,25$ ,  $\gamma = 1,15 \div 1,667$  изменялась не более чем на 5—7%. Тот факт, что относительный тепловой поток слабо зависит от  $\gamma$  и  $T_w$ , отмечался ранее в исследованиях, проводимых в рамках теории пограничного слоя [9].

Таким образом, полученные результаты показывают, что при  $Re \geq 100$  распределения вдоль поверхности относительного теплового потока слабо зависят от газодинамических параметров течения  $Re$ ,  $\gamma$ ,  $T_w$ ,  $Pr$ , определяются в основном геометрическими характеристиками тела и удовлетворительно описываются формулой (2.6).

Авторы выражают благодарность Г. А. Тирскому за внимание к работе.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Брыкина И. Г., Русаков В. В. Аналитическое исследование пространственного вязкого ударного слоя в окрестности плоскости симметрии // ПМТФ. — 1989. — № 4.
2. Cheng H. K. Hypersonic shock-layer theory of the stagnation region at low Reynolds number // Proc. 1964 Heat Transfer Fluid Mech. Institute, Stanford, 1964.
3. Гершбейн Э. А. К теории пространственного обтекания затупленных тел гиперзвуковым потоком вязкого газа при наличии вдува // Некоторые вопросы механики сплошной среды. — М.: Изд-во МГУ, 1978.
4. Шевелев Ю. Д. Трехмерные задачи теории ламинарного пограничного слоя. — М.: Наука, 1977.
5. Тирский Г. А., Ковач Э. А. Применение метода последовательных приближений к интегрированию уравнений пограничного слоя // ДАН СССР. — 1970. — Т. 190, № 1.
6. Брыкина И. Г. Интегрирование уравнений гиперзвукового вязкого ударного слоя методом последовательных приближений // ЖВММФ. — 1978. — Т. 18, № 1.

7. Петухов И. В. Численный расчет двумерных течений в пограничном слое // Численные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений и квадратурные формулы. — М.: Наука, 1964.
8. Основы теплопередачи в авиационной и ракетно-космической технике. — М.: Машиностроение, 1975.
9. Брыкина И. Г., Гершбейн Э. А., Пейгин С. В. Исследование пространственного пограничного слоя на затупленных телах с проницаемой поверхностью // Изв. АН СССР. МЖГ. — 1982. — № 3.

г. Москва

Поступила 30/1 1990 г.

УДК 532.526

А. Н. Кудрявцев, А. С. Соловьев

### УСТОЙЧИВОСТЬ ВЯЗКОГО СЖИМАЕМОГО СЛОЯ СДВИГА С ПЕРЕПАДОМ ТЕМПЕРАТУР

Рассматривается устойчивость к малым возмущениям свободного слоя сдвига, образующегося при смешении двух параллельных потоков вязкого сжимаемого газа. Предполагается, что температуры смешивающихся потоков  $T_1$  и  $T_2$  могут быть неодинаковы. Значительные перепады температур характерны, например, для пограничного слоя струи, истекающей из сопла авиационного или ракетного двигателя. Вопросы устойчивости таких течений представляют интерес в связи с особенностями процессов турбулизации и шумообразования при больших скоростях [1—3].

Данная работа является продолжением [4], где устойчивость сжимаемого слоя сдвига исследовалась для  $\kappa = 1$  ( $\kappa = T_2/T_1$ ). Как и в [4], задача устойчивости решается на основе линеаризованных уравнений Навье — Стокса сжимаемого газа методом ортогонализации [5]. Расчеты проведены в широком диапазоне изменения параметров: числа Рейнольдса ( $0 < Re \leq 10^3$ ), числа Маха ( $0 \leq M \leq 2$ ) и перепада температур ( $0,2 \leq \kappa \leq 5$ ). Обнаружено, что при различных  $M$  и  $\kappa$  могут оказаться неустойчивыми три моды возмущений дискретного спектра, одна из них распространяется с дозвуковой фазовой скоростью, а две «сверхзвуковые». Построены кривые нейтральной устойчивости, определены коэффициенты нарастания. Показано, что возмущения сплошного спектра при конечных  $Re$  и всех изменениях  $\kappa$  затухают. Исключение составляет случай  $Re \rightarrow \infty$ , когда моды сплошного спектра суть незатухающие акустические возмущения.

1. Устойчивость плоскопараллельного течения вязкого сжимаемого газа по отношению к малым двумерным возмущениям вида бегущих волн

$$(1.1) \quad \{\rho(y), u(y), v(y), p(y), \theta(y)\} \exp [i\alpha(x - ct)], \quad c = c_r + ic_i$$

описывается, как известно, системой линейных уравнений Лиза — Липня [6, 7]:

$$(1.2) \quad \begin{aligned} D\rho + \sigma/T - T'v/T^2 &= 0, \\ Du + U'v + i\alpha T p &= T[\mu_0(u'' - \alpha^2 u) + i\alpha\mu_0\sigma/3 + \\ &+ T'(u' + i\alpha v) + (U'\theta)']/Re, \\ Dv + T p' &= T[\mu_0(v'' - \alpha^2 v) + \mu_0\sigma'/3 + 2T'(2v' - i\alpha u)/3 + i\alpha U'\theta]/Re, \\ D\theta + T'v + (\gamma - 1)T\sigma &= \gamma T[\mu_0(\theta'' - \alpha^2\theta) + T''\theta + \\ &+ 2T'\theta']/RePr + \gamma(\gamma - 1)M^2 T[2\mu_0 U'(u' + i\alpha v) + U'^2\theta]/Re, \\ p &= (\theta/T + T\rho)/\gamma M^2, \quad \mu_0 = T, \quad D = i\alpha(U - c), \quad \sigma = i\alpha u + v', \\ M &= U_1/(\gamma R T_1)^{1/2}, \quad Re = \rho_1 U_1 \delta / \mu_1. \end{aligned}$$

Здесь  $x$  и  $y$  — продольная и поперечная координаты;  $U(y)$ ,  $T(y)$  — профили скорости и температуры основного течения;  $\rho$ ,  $u$ ,  $v$ ,  $p$ ,  $\theta$  — амплитуды возмущений плотности, скорости вдоль  $x$  и  $y$ , давления и температуры;  $\alpha$  — вещественное волновое число возмущений;  $c_r$  — фазовая скорость;  $\alpha c_i$  — коэффициент нарастания;  $Pr = 0,72$  — число Прандтля;  $\gamma = 1,4$  — показатель адиабаты;  $R$  — газовая постоянная. Координаты  $x$  и  $y$  меняются в интервале  $(-\infty, \infty)$ , они сделаны безразмерными с помощью характерной толщины слоя сдвига  $\delta$ . Остальные величины отнесены к их невозмущенным значениям в однородном потоке при  $y \rightarrow +\infty$