

УДК 532.529:536.24

МОМЕНТ СОПРОТИВЛЕНИЯ ДИСКА, ВРАЩАЮЩЕГОСЯ В ЗАКРЫТОЙ ОСЕСИММЕТРИЧНОЙ КАВЕРНЕ

К. Н. Волков

Университет Суррея, GU2 7XH, Гилфорд, Великобритания
E-mail: dsci@mail.ru

Рассматривается турбулентное течение в закрытой осесимметричной каверне с вращающимся диском. Момент сопротивления вращению диска рассчитывается в зависимости от относительной величины зазора между неподвижным корпусом и вращающимся диском и от значения числа Рейнольдса. Проводится сравнение результатов расчетов, полученных на основе различных моделей турбулентности, с данными физического эксперимента и имеющимися корреляционными зависимостями.

Ключевые слова: турбулентность, вращение, момент, внутренние течения.

Введение. При создании современных газотурбинных двигателей практически невозможно обойтись без использования численных методов расчета внутренних турбулентных течений и теплообмена вязкого сжимаемого газа в областях сложной геометрической конфигурации. Правомочность использования тех или иных моделей турбулентности и численных методов исследуется, как правило, применительно к более простым задачам, имеющим упрощенную геометрию, но сохраняющим ключевые моменты исходной постановки, например закрутку потока или вращение одной или нескольких граничных поверхностей.

К одной из таких задач относится течение в закрытой осесимметричной полости с вращающимся диском. Простота геометрии и в то же время достаточная сложность течения, обусловленная, в частности, образованием экмановских слоев на вращающемся диске и теплообменом, объясняют тот факт, что данной задаче уделяется довольно большое внимание в литературе [1–10].

В зависимости от относительной величины зазора $G = s/b$ (рис. 1) между корпусом (статор) и диском (ротор) и значений числа Рейнольдса $Re = \omega b^2/\nu$, вычисленных по угловой скорости вращения ω и радиусу диска b , выделяется четыре режима течения [1–3] (рис. 2).

Режим I соответствует достаточно малым зазорам, когда толщины ламинарных пограничных слоев на статоре и роторе составляют около полуширины продольного размера каверны (пограничные слои на статоре и роторе сливаются), а действие вязких сил распространяется на всю расчетную область. В режиме II ламинарные пограничные слои на статоре и роторе разделяются слоем жидкости, в котором влияние вязкости достаточно мало. В отличие от режима I тангенциальная составляющая скорости в ядре потока не зависит от осевой координаты, а радиальная составляющая скорости практически равняется нулю.

Режимы III и IV эквивалентны режимам I и II за исключением того, что пограничные слои на статоре и роторе являются турбулентными.

В режимах II и IV основной вклад в изменение скорости движения жидкости вносят слои Экмана, образующиеся на стенках, ортогональных оси вращения [4].

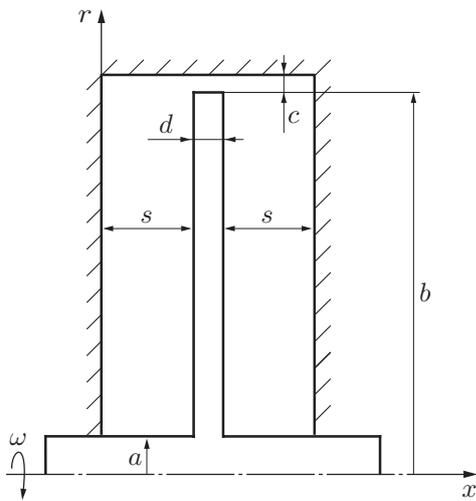


Рис. 1

Рис. 1. Геометрия расчетной области

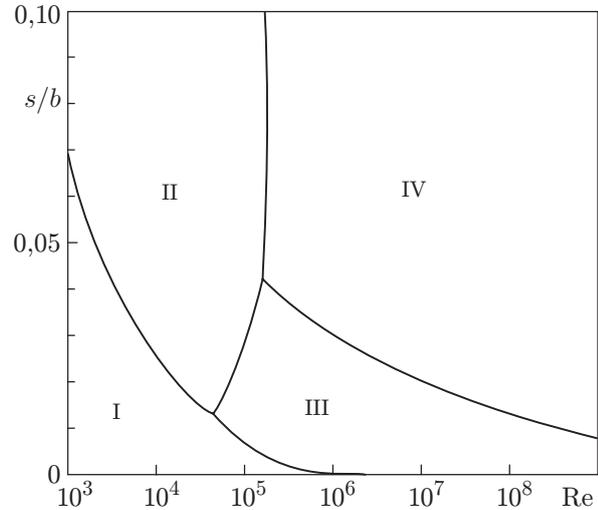


Рис. 2

Рис. 2. Режимы течения в каверне с вращающимся диском

В некоторых случаях для нахождения интегральных характеристик потока достаточно использовать приближение свободного вращающегося диска. Однако для рабочих колес турбомашин, вращающихся в узких кожухах, ширина которых мала по сравнению с радиусом диска, приближение свободного диска неприменимо и приводит к большим ошибкам [4].

В режиме I (при $Re < 10^4$) имеет место теоретическая оценка коэффициента момента, а в режимах II (при $Re < 10^5$) и III — приближенные оценки [4]. Оценки для режимов II и III не зависят от ширины кожуха и дают значения коэффициента момента на 16 % меньше полученных при измерениях.

Для оценки коэффициента момента при $Re < 10^7$ имеются следующие корреляционные зависимости (для двух сторон диска) [1, 5]:

$$C_M = \begin{cases} 1,850 G^{1/10} Re^{-1/2} & \text{в режиме II,} \\ 0,040 G^{-1/6} Re^{-1/4} & \text{в режиме III,} \\ 0,051 G^{1/10} Re^{-1/5} & \text{в режиме IV.} \end{cases}$$

Скорректированные зависимости [2] отличаются от приведенных только постоянными множителями (0,036 в режиме III и 0,0545 в режиме IV).

В режиме III коэффициент момента сравнительно сильно зависит от расстояния между статором и ротором. В режиме IV при больших значениях G коэффициент момента стремится к предельному значению для свободного диска [3]. Минимальное значение момента соответствует точке перехода от режима III к режиму IV (при $G_* = 0,211 Re^{-3/16}$). Критическая величина зазора зависит от температуры [6].

Одна из проблем, которая появляется при численном моделировании турбулентных течений при больших числах Рейнольдса, состоит в выборе подходящей модели турбулентности. Примеры использования некоторых моделей турбулентности можно найти в работах [7–10].

Применение стандартной модели $k-\varepsilon$ и модели $k-\omega$ приводит к достаточно большим погрешностям в распределениях скорости в центральной части каверны и завышенным

толщинам пограничных слоев на статоре и роторе [7]. Низкорейнольдсовая версия модели $k-\varepsilon$ обнаруживает нереалистичные тенденции к ламинаризации течения в каверне [8]. Модификация Лаундера — Шармы модели $k-\varepsilon$ также не всегда дает приемлемые результаты [9]. Для увеличения точности расчетов используются эмпирические поправки в уравнении для скорости диссипации кинетической энергии турбулентности [9], двухслойная модель турбулентности [7], а также модель переноса напряжений Рейнольдса [10].

Цель данной работы заключается в численном моделировании течения в закрытой осесимметричной каверне с вращающимся диском на основе различных моделей турбулентности и сравнении коэффициентов момента, рассчитанных в рамках различных моделей, с данными физического эксперимента и имеющимися корреляционными зависимостями.

Основные уравнения. В цилиндрической системе координат (x, r, θ) нестационарное течение вязкого сжимаемого газа, индуцированное вращением диска радиуса b с постоянной угловой скоростью ω вокруг оси, перпендикулярной плоскости диска (рис. 1), описывается уравнением

$$\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t} + \frac{\partial (\mathbf{F}_x + \mathbf{G}_x)}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial r (\mathbf{F}_r + \mathbf{G}_r)}{\partial r} = \mathbf{H},$$

которое дополняется уравнением состояния совершенного газа

$$p = (\gamma - 1)\rho[E - (v_x^2 + v_r^2 + v_\theta^2 - \omega^2 r^2)/2].$$

Вектор консервативных переменных \mathbf{Q} , вектор невязких потоков \mathbf{F} , вектор вязких потоков \mathbf{G} и источниковый член \mathbf{H} имеют следующий вид:

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho v_x \\ \rho v_r \\ \rho v_\theta \\ \rho E \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F}_x = \begin{pmatrix} \rho v_x \\ \rho v_x v_x + p \\ \rho v_x v_r \\ \rho v_x v_\theta \\ (\rho E + p)v_x \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F}_r = \begin{pmatrix} \rho v_r \\ \rho v_r v_x \\ \rho v_r v_r + p \\ \rho v_r v_\theta \\ (\rho E + p)v_r \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{G}_x = - \begin{pmatrix} 0 \\ \tau_{xx} \\ \tau_{xr} \\ \tau_{x\theta} \\ v_x \tau_{xx} + v_\theta \tau_{x\theta} + v_r \tau_{xr} - q_x \end{pmatrix}, \quad \mathbf{G}_r = - \begin{pmatrix} 0 \\ \tau_{rx} \\ \tau_{rr} \\ \tau_{r\theta} \\ v_x \tau_{rx} + v_\theta \tau_{r\theta} + v_r \tau_{rr} - q_r \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{H} = \frac{1}{r} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ p - \tau_{\theta\theta} + \rho(v_\theta - r\omega)^2 \\ \tau_{r\theta} - \rho v_r(v_\theta - 2r\omega) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Помимо слагаемых, связанных с осесимметричной постановкой задачи, источниковый член \mathbf{H} учитывает действие сил инерции (силы Кориолиса и центробежной силы). Компоненты тензора вязких напряжений находятся из соотношений

$$\tau_{xx} = 2\mu_e \frac{\partial v_x}{\partial x} - \frac{2}{3} \mu_e \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial r v_r}{\partial r} \right), \quad \tau_{x\theta} = \tau_{\theta x} = \mu_e \frac{\partial v_\theta}{\partial x},$$

$$\tau_{rr} = 2\mu_e \frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{2}{3} \mu_e \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial r v_r}{\partial r} \right), \quad \tau_{xr} = \tau_{rx} = \mu_e \left(\frac{\partial v_r}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial r} \right),$$

$$\tau_{\theta\theta} = 2\mu_e \frac{v_r}{r} - \frac{2}{3}\mu_e \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial r v_r}{\partial r} \right), \quad \tau_{r\theta} = \tau_{\theta r} = \mu_e \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r} \right).$$

Составляющие вектора потока тепла имеют вид

$$q_x = -\lambda_e \frac{\partial T}{\partial x}, \quad q_r = -\frac{\lambda_e}{r} \frac{\partial r T}{\partial r}.$$

В приведенных выше уравнениях t — время; ρ — плотность газа; v_x, v_r, v_θ — составляющие скорости в координатных направлениях x, r, θ соответственно; p — давление; E — полная энергия единицы массы; T — температура; γ — отношение удельных теплоемкостей.

Эффективная вязкость и теплопроводность являются суммой молекулярных и турбулентных коэффициентов переноса

$$\mu_e = \mu + \mu_t, \quad \lambda_e = c_p(\mu/\text{Pr} + \mu_t/\text{Pr}_t),$$

где c_p — теплоемкость при постоянном давлении. Турбулентному числу Прандтля присваивается постоянное значение (для воздуха $\text{Pr}_t = 0,9$).

Молекулярная вязкость и температура связаны законом Сазерленда

$$\frac{\mu}{\mu_*} = \left(\frac{T}{T_*} \right)^{3/2} \frac{T_* + S_0}{T + S_0},$$

где $\mu_* = 1,68 \cdot 10^{-5}$ кг/(м·с); $T_* = 273$ К и $S_0 = 110,5$ К для воздуха. Молекулярная теплопроводность связывается с числом Прандтля (для воздуха $\text{Pr} = 0,72$).

Модели турбулентности. Для расчета турбулентной вязкости (или величин, с ней связанных) используются следующие модели турбулентности.

1. Стандартная модель турбулентности $k-\varepsilon$ в формулировке Лаундера — Сполдинга [11] с поправкой Като — Лаундера для члена, связанного с порождением турбулентности [12]. Для учета кривизны линий тока и вращения в формулу расчета турбулентной вязкости вводится демпфирующая функция [13], зависящая от турбулентного числа Ричардсона. При постановке граничных условий на стенке для характеристик турбулентности используется метод пристеночных функций [11].

2. Двухслойная модель турбулентности $k-\varepsilon/k-l$ [14]. Пристеночная область разделяется на две подобласти, положение границы между которыми зависит от локального числа Рейнольдса $\text{Re}_y = \rho k^{1/2} y / \mu$. При $\text{Re}_y > \text{Re}_{y*}$ используется стандартная модель $k-\varepsilon$, а при $\text{Re}_y < \text{Re}_{y*}$ — однопараметрическая модель турбулентности $k-l$. Принимается, что $\text{Re}_{y*} = 180$, а в качестве граничного условия на стенке — $\partial k / \partial n = 0$.

3. Модель турбулентности $k-\omega$ [15]. На твердой стенке используются граничные условия, соответствующие низкорейнольдсовой формулировке.

4. Модель турбулентной вязкости Спаларта — Аллмареса (SA1) [16]. Для расчета источникового члена, связанного с порождением турбулентной вязкости, используется величина завихренности. Применяется также модифицированная форма записи источникового члена (SA2) [17]. При постановке граничных условий на стенке для рабочей переменной используется метод пристеночных функций [18].

5. Модель переноса рейнольдсовых напряжений (RSM) [19], которая учитывает эффекты кривизны линий тока и вращения без введения дополнительных эмпирических поправок.

Начальные и граничные условия. Принимается, что в начальный момент времени газ покоится ($v_x = v_r = v_\theta = 0$, $p = 1,013 \cdot 10^5$ Па, $T = 288$ К).

На поверхностях статора и ротора ставятся граничные условия непротекания и прилипания для нормальной и тангенциальной составляющих скорости, а давление определяется

из уравнения изменения количества движения в проекции на нормаль к стенке. Считается, что статор и ротор имеют постоянную температуру.

Численный метод. Дискретизация уравнений Навье — Стокса и уравнений модели турбулентности проводится при помощи метода контрольного объема на неравномерной сетке.

Для дискретизации производных по времени используется схема Адамса — Бэшворта второго порядка точности. Вектор потока расщепляется на невязкую и вязкую составляющие. Дискретизация конвективных потоков проводится на основе схемы MUSCL третьего порядка (используется ограничитель потока minmod). Для дискретизации диффузионных потоков применяются центрированные конечно-разностные формулы второго порядка. Системы разностных уравнений решаются многосеточным методом на основе схемы полной аппроксимации (используется четыре уровня сетки и V-цикл).

Расчетная сетка содержит 120 узлов по осевой координате и 2200 узлов по радиальной координате (при изменении ширины каверны число узлов по координатам x и r изменяется таким образом, чтобы сохранить приемлемое отношение сторон ячеек сетки). Сгущение узлов сетки производится вблизи как поверхности диска, так и поверхности корпуса. По радиальной координате узлы сетки распределяются равномерно. В области $y^+ < 15$ размещается около 10 расчетных ячеек. При использовании двухслойной модели турбулентности сетка строится таким образом, чтобы $y^+ \sim 1$.

Результаты расчетов. Для сравнения результатов расчетов с данными физического эксперимента [1] параметрам потока присваивались следующие значения: $G = 0,0637$, $b = 0,5$ м, $\omega = 257$ 1/с, $T_1 = 300$ К, $T_2 = 300 \div 450$ К. В качестве рабочей среды использовался воздух при $\rho_0 = 1,225$ кг/м³, $\mu_0 = 1,7894 \cdot 10^{-5}$ кг/(м·с). При этих условиях $Re = 4,4 \cdot 10^6$. Индексы 1 и 2 относятся к статору и ротору соответственно.

На рис. 3 приведены профили радиальной и тангенциальной составляющих скорости, полученные на основе различных моделей турбулентности, в сравнении с эксперименталь-

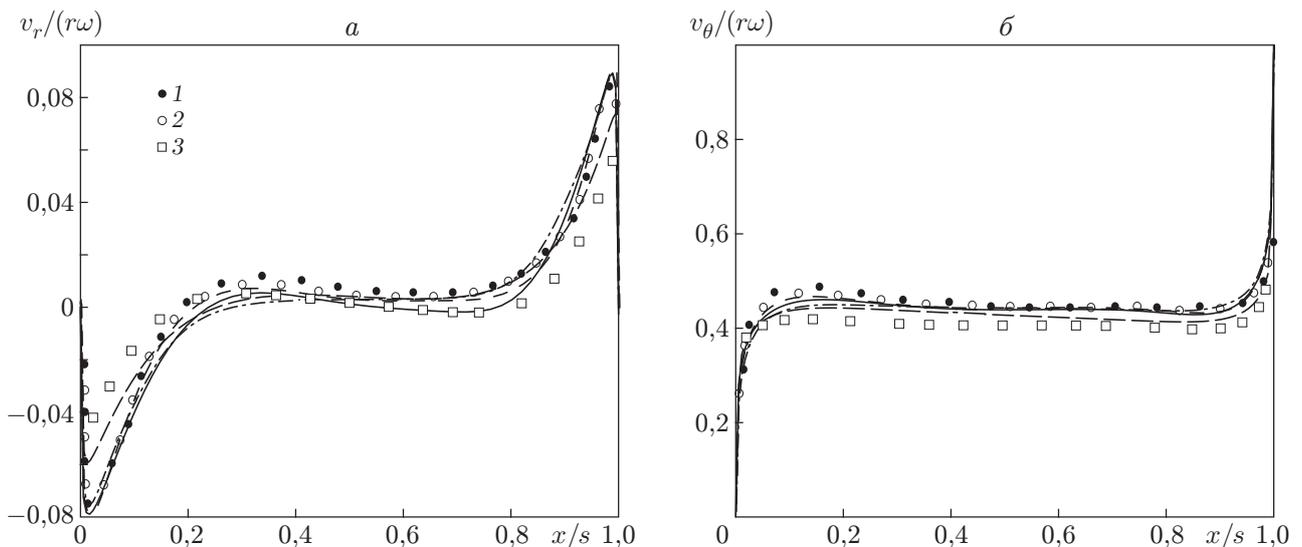


Рис. 3. Распределения радиальной (а) и тангенциальной (б) составляющих скорости в зазоре между статором и ротором при $r/b = 0,765$:

1 — эксперимент [1]; расчеты по моделям: $k-\epsilon$ — сплошная линия, Спаларта — Аллмареса — длинная штриховая, $k-\omega$ — штрихпунктирная, по реинольдсовым напряжениям — короткая штриховая; 2 — по двухслойной модели; 3 — по модифицированной модели Спаларта — Аллмареса

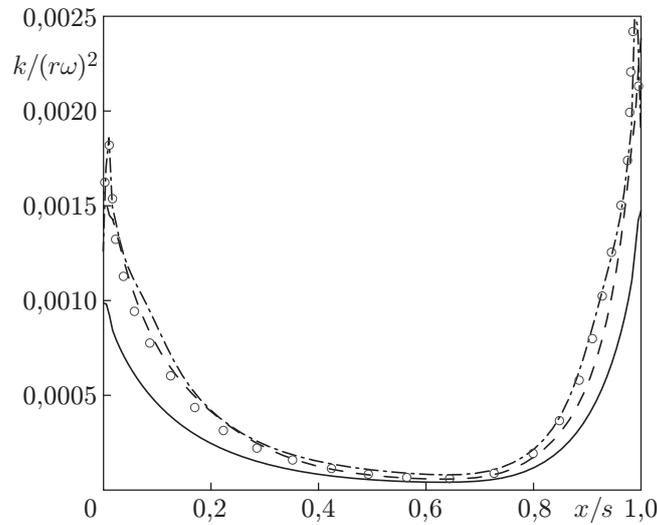


Рис. 4. Распределения кинетической энергии турбулентности в зазоре между статором и ротором при $r/b = 0,765$ (обозначения те же, что на рис. 3)

ными данными [1] (точки 1). Полученные распределения достаточно хорошо согласуются с экспериментальными данными, за исключением ядра потока, где радиальная скорость согласно [1] отлична от нуля. Данный эффект противоречит теории и является скорее следствием неточности измерений, чем реальным физическим эффектом.

Вращение оказывает существенное влияние на характеристики турбулентности. Как показывают данные, полученные на основе модели $k-\omega$ и двухслойной модели турбулентности $k-\varepsilon/k-l$, распределение кинетической энергии турбулентности имеет два максимума около поверхностей статора и ротора (рис. 4), что согласуется с данными [7]. В пограничном слое статора максимум генерации кинетической энергии турбулентности находится на расстоянии $y^+ \sim 22$ от поверхности, а в пограничном слое ротора — на расстоянии $y^+ \sim 6$. В ядре потока, где градиенты средней скорости течения отсутствуют, генерации турбулентности практически не происходит. Максимальное значение кинетической энергии турбулентности в пограничном слое ротора примерно в два раза превышает соответствующее значение в пограничном слое статора.

Момент трения находится интегрированием касательных напряжений по поверхности диска

$$M = -2\pi \int_a^b r^2 \tau_{x\theta} dr,$$

где $\tau_{x\theta}$ — окружная составляющая касательного трения на стенке. Коэффициент момента сопротивления ротора, смачиваемого жидкостью с двух сторон, вычисляется по формуле

$$C_M = \frac{4M}{\rho\omega^2 b^5} = 4\pi \int_{a/b}^1 \left(\frac{r}{b}\right)^2 \frac{\tau_{x\theta}}{\rho\omega^2 b^2} d\left(\frac{r}{b}\right).$$

Зависимость коэффициента момента от относительной ширины каверны имеет минимум (рис. 5). Критическая величина зазора зависит от температуры ($G_* = 0,0132$ при $T_2 = 300$ К и $G_* = 0,0145$ при $T_2 = 400$ К).

Для свободного диска момент больше, чем для диска в кожухе. Причина меньшей величины момента диска, помещенного в кожух, объясняется тем, что жидкость между пограничными слоями с каждой стороны диска вращается с угловой скоростью в два раза

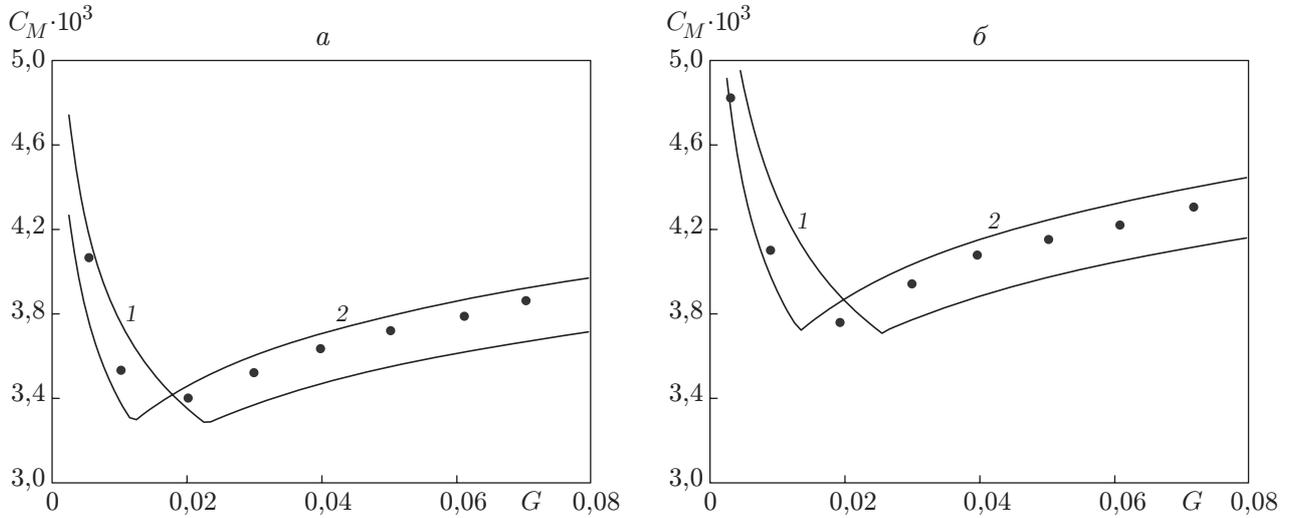


Рис. 5. Зависимость коэффициента момента от относительной величины зазора между статором и ротором при $Re = 4,4 \cdot 10^6$, $T_2 = 300$ К (а) и $Re = 2,5 \cdot 10^6$, $T_2 = 400$ К (б): кривые 1 и 2 соответствуют корреляционным зависимостям [1], [2], точки — результатам численного моделирования

Момент и коэффициент момента, рассчитанные на основе различных моделей турбулентности при $T_2 = 450$ К

Модель	M , Н · м	$C_M \cdot 10^3$	δ , %
$k-\varepsilon$	2,3026	3,5115	8,79
$k-\varepsilon/k-l$	2,4138	3,7125	4,39
$k-\omega$	2,2350	3,4376	11,47
SA1	2,1972	3,3795	12,96
SA2	2,2325	3,6637	5,64
RSM	2,3729	3,6496	6,01
[1]	2,3624	3,6335	6,4
[2]	2,5245	3,8828	—

меньшей, чем угловая скорость диска. Из-за этого градиенты окружной скорости оказываются в два раза меньшими, чем в случае свободного диска, и поэтому силы трения для диска в кожухе меньше, чем для свободного диска.

Результаты расчетов по различным моделям турбулентности приведены в таблице. В третьем столбце таблицы приведена погрешность расчета C_M по различным моделям турбулентности относительно зависимости [2]. Наилучшее согласование с данными физического эксперимента дают двухслойная модель турбулентности и модель переноса реинольдсовых напряжений. Однако модель переноса реинольдсовых напряжений по сравнению с двухпараметрическими моделями турбулентности приводит к увеличению времени счета примерно на 40 %.

Заключение. Проведено моделирование турбулентного течения и теплообмена в закрытой осесимметричной каверне с вращающимся диском. Структура течения и характеристики трения исследованы в зависимости от относительной величины зазора между неподвижным корпусом и вращающимся диском и от значения числа Рейнольдса. Сравнение результатов расчетов с данными физического эксперимента и имеющимися корреляционными зависимостями показывает, что наилучшее согласование дает двухслойная модель турбулентности $k-\varepsilon/k-l$. Введение поправок для члена, связанного с порождением турбулентности и кривизной линий тока, улучшает свойства стандартной модели $k-\varepsilon$.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Daily J. W., Nece R.** Chamber dimension effects on induced flow and frictional resistance of enclosed rotating discs // Trans. ASME. J. Basic Engng. 1960. V. 82. P. 217–232.
2. **Kreith F.** Convection heat transfer in rotating systems // Adv. Heat Transfer. 1968. V. 5. P. 129–251.
3. **Owen J. M., Rogers R. H.** Flow and heat transfer in rotating-disc systems. Rotating cavities. Taunton: Research Studies Press, 1995.
4. **Шлихтинг Г.** Теория пограничного слоя. М.: Наука, 1974.
5. **Jacques R., Le Quere P., Daube O.** Axisymmetric numerical simulations of turbulent flow in rotor stator enclosures // Intern. J. Heat Fluid Flow. 2002. V. 23. P. 381–397.
6. **Beretta G. P., Malfa E.** Flow and heat transfer in cavities between rotor and stator disks // Intern. J. Heat Mass Transfer. 2003. V. 46. P. 2715–2726.
7. **Iacovides H., Toumpanakis P.** Turbulence modeling of flow in axisymmetric rotor-stator systems // Proc. of the 5th Intern. symp. on refined flow modelling and turbulence measurements, Paris (France), 7–10 Sept., 1993. Paris: Presses de l'Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, 1993. P. 383–390.
8. **Morse A. P.** Numerical prediction of turbulent flow in rotating cavities // Trans. ASME. J. Turbomach. 1988. V. 110. P. 202–212.
9. **Djaoui M., Dymont A., Debuchy R.** Heat transfer in a rotor-stator system with a radial inflow // Europ. J. Mech. B. Fluids. 2001. V. 20. P. 371–398.
10. **Elena L., Schiestel R.** Turbulence modeling of rotating confined flows // Intern. J. Heat Fluid Flow. 1996. V. 17. P. 283–289.
11. **Launder B. E., Spalding D. B.** The numerical computation of turbulent flows // Comput. Methods Appl. Mech. Engng. 1974. V. 3. P. 269–289.
12. **Kato M., Launder B. E.** The modelling of turbulent flow around stationary and vibrating square cylinders // Proc. of the 9th symp. on turbulent shear flows, Kyoto (Japan), 16–18 August, 1993. S. n., 1993. V. 9. P. 10.4.1–10.4.6.
13. **Leschziner M. A., Rodi W.** Calculation of annular and twin parallel jets using various discretization schemes and turbulent-model variations // Trans. ASME. J. Fluids Engng. 1981. V. 103. P. 353–360.
14. **Rodi W.** Experience with two-layer models combining the $k-\varepsilon$ model with one-equation model near wall. 1991. (Paper / AIAA; N 91-0216).
15. **Wilcox D. C.** A two-equation turbulence model for wall-bounded and free-shear flows. 1993. (Paper / AIAA; N 93-2905).
16. **Spalart P. R., Allmaras S. R.** A one equation turbulence model for aerodynamic flows. 1992. (Paper / AIAA; N 92-0439).
17. **Dacles-Mariani J., Zilliac G. G., Chow J. S., Bradshaw P.** Numerical/experimental study of a wingtip vortex in the near field // AIAA J. 1995. V. 33, N 9. P. 1561–1568.
18. **Deck S., Duveau P., d'Espiney P., Guillen P.** Development and application of Spalart — Allmaras one-equation turbulence model to three-dimensional supersonic complex configurations // Aerospace Sci. and Technology. 2002. V. 6. P. 171–183.
19. **Jones W. P., Musonge P.** Closure of the Reynolds stress and scalar flux equations // Phys. Fluids. 1988. V. 31, N 12. P. 3589–3604.