УДК 517.95

МОДЕЛИРОВАНИЕ СТАЦИОНАРНЫХ ТЕЧЕНИЙ В КАНАЛЕ ВАРИАЦИОННЫМИ НЕРАВЕНСТВАМИ НАВЬЕ — СТОКСА

А. Ю. Чеботарев

Институт прикладной математики ДВО РАН, 690041 Владивосток

Исследуется математическая модель стационарного течения вязкой несжимаемой жидкости в канале с условиями на выходе, отличными от условий Дирихле. Для сформулированной субдифференциальной краевой задачи выводится вариационное неравенство и исследуется структура множества его решений. Для двумерных течений доказана разрешимость задачи без предположения о малости числа Рейнольдса. В трехмерном случае выделен класс ограничений на касательную компоненту скорости на выходе, гарантирующий разрешимость вариационного неравенства.

Ключевые слова: уравнения Навье — Стокса, краевые условия, стационарные течения, вариационные неравенства.

Введение. Рассматривается движение однородной несжимаемой вязкой жидкости в ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $d = 2, 3$, описываемое системой уравнений Навье — Стокса для вектор-функции скорости течения $\boldsymbol{u}(x)$ и скалярной функции давления $p(x)$:

$$\nu\Delta\boldsymbol{u} + (\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{u} = -\nabla p + \boldsymbol{f}, \qquad \operatorname{div}\boldsymbol{u} = 0, \qquad x \in \Omega. \tag{1}$$

Здесь $\nu > 0$ — кинематическая вязкость; $\boldsymbol{f}$ — вектор плотности внешних массовых сил; плотность жидкости считается равной единице.

Пусть Γ_1 — часть границы Γ области Ω, через которую жидкость втекает, Γ_0 — твердая стенка, Γ_2 — часть границы, через которую жидкость может покидать область Ω. Типичным примером Ω является канал с участком втекания Γ_1 и участком вытекания Γ_2.

Естественно задавать на участках Γ_0 и Γ_1 вектор скорости

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{g} \quad \text{на } \Gamma_1, \qquad \boldsymbol{u} = 0 \quad \text{на } \Gamma_0. \tag{2}$$

Здесь $\boldsymbol{g} = \boldsymbol{g}(x)$, $x \in \Gamma_1$ — заданная функция; $g_n = \boldsymbol{g}\cdot\boldsymbol{n} < 0$; $\boldsymbol{n}$ — единичный вектор внешней нормали к границе. Поведение жидкости на участке Γ_2 зависит от структуры течения, которая заранее неизвестна, поэтому возникает вопрос о постановке краевых условий на Γ_2.

В данной работе на участке Γ_2 задаются следующие краевые условия:

$$\boldsymbol{n}\times\operatorname{rot}\boldsymbol{u} \in \partial\Psi(\boldsymbol{u}_\tau), \qquad \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n} = q \qquad \text{на } \Gamma_2. \tag{3}$$

Здесь $\boldsymbol{u}_\tau = \boldsymbol{u} - (\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n})\boldsymbol{n}$; Ψ: $\mathbb{R}^d \to \overline{\mathbb{R}} = (-\infty, +\infty]$ — заданная функция, обладающая свойством выпуклости и слабой полунепрерывности снизу ($\Psi \not\equiv +\infty$). Множество $\partial\Psi(\boldsymbol{a})$ является субдифференциалом функции Ψ в точке $\boldsymbol{a}$:

$$\partial\Psi(\boldsymbol{a}) = \{\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^d\colon \quad \Psi(\boldsymbol{h}) - \Psi(\boldsymbol{a}) \geqslant \boldsymbol{b}\cdot(\boldsymbol{h} - \boldsymbol{a}) \quad \forall\boldsymbol{h} \in \mathbb{R}^d\}.$$

Исследование постановки задачи (1)–(3) основано на изучении вариационного неравенства типа неравенства Навье — Стокса, полученного в п. **1**. На основе результатов работ [1, 2] выводятся условия разрешимости неравенства и описывается структура множества решений в случае неединственности. Задача (1)–(3) содержит как частный случай постановки задачи с заданными на Γ_2 значениями $\boldsymbol{u}_\tau$ или $\boldsymbol{n} \times \operatorname{rot} \boldsymbol{u}$. Ранее разрешимость таких задач с ненулевыми значениями касательных компонент вектора скорости была доказана лишь при малых числах Рейнольдса [3]. Отметим также, что различные краевые условия на выходе канала, приводящие к вариационным неравенствам, изучались в работах [4–7].

Субдифференциальное краевое условие на участке вытекания в виде (3) вызвано постановкой задачи протекания, в которой касательные компоненты вектора скорости не задаются в явном виде. Вместо этого формулируется вариационный принцип, определяющий "недостающее" краевое условие. В данном случае указанный вариационный принцип имеет вид

$$E(\boldsymbol{v}) = \{\Psi(\boldsymbol{v}) + (\operatorname{rot} \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{n})\boldsymbol{v}\} \mapsto \inf \quad \forall \boldsymbol{v}, \quad \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n} = 0; \qquad (4)$$
$$E(\boldsymbol{u}_\tau) = \inf E(\boldsymbol{v}).$$

Соотношение (4) при различном выборе функции Ψ позволяет моделировать различные зависимости между завихренностью течения на границе $\operatorname{rot} \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{n}$ и касательными составляющими скорости, учитывающие перенос энергии на участке Γ_2.

Рассмотрим несколько примеров.

1. Пусть

$$\Psi(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{l} \cdot \boldsymbol{v},$$

где $\boldsymbol{l} = \boldsymbol{l}(x)$, $x \in \Gamma_2$ — заданная на Γ_2 вектор-функция; $\boldsymbol{l} \cdot \boldsymbol{n} = 0$. В этом случае получаем краевое условие

$$\boldsymbol{n} \times \operatorname{rot} \boldsymbol{u} = \boldsymbol{l}, \qquad x \in \Gamma_2. \qquad (5)$$

2. Пусть

$$\Psi(\boldsymbol{v}) = \lambda \boldsymbol{v}^2/2,$$

где $\lambda = \lambda(x) \geqslant 0$, $x \in \Gamma_2$ — заданная на Γ_2 скалярная функция. Тогда имеем краевое условие

$$\boldsymbol{n} \times \operatorname{rot} \boldsymbol{u} = \lambda \boldsymbol{u}_\tau, \qquad x \in \Gamma_2. \qquad (6)$$

3. Пусть

$$\Psi(\boldsymbol{v}) = \begin{cases} 0, & \boldsymbol{v} = \boldsymbol{l}, \\ +\infty, & \boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{l}, \end{cases}$$

где $\boldsymbol{l} = \boldsymbol{l}(x)$, $x \in \Gamma_2$ — заданная на Γ_2 вектор-функция; $\boldsymbol{l} \cdot \boldsymbol{n} = 0$. Тогда условие (3) эквивалентно заданию на Γ_2 полного вектора скорости

$$\boldsymbol{u}_\tau = \boldsymbol{l}, \qquad \boldsymbol{u}_n = q, \qquad x \in \Gamma_2. \qquad (7)$$

4. Пусть

$$\Psi(\boldsymbol{v}) = \begin{cases} \lambda \boldsymbol{v}^2/2, & |\boldsymbol{v}| \leqslant v_0, \\ +\infty, & |\boldsymbol{v}| > v_0, \end{cases}$$

где $v_0 > 0$ — заданное число, ограничивающее модуль касательной компоненты скорости. Тогда субдифференциальное условие (3) приводит к следующим ограничениям на Γ_2:

$$\boldsymbol{n} \times \operatorname{rot} \boldsymbol{u} = \begin{cases} \lambda \boldsymbol{u}_\tau, & |\boldsymbol{u}_\tau| < v_0, \\ (\lambda + \sigma)\boldsymbol{u}_\tau, & |\boldsymbol{u}_\tau| = v_0, \end{cases} \qquad (8)$$

где $\sigma = \sigma(x) \geqslant 0$ — скалярная функция (заранее неизвестная).

1. Формализация краевой задачи. Пусть область течения (канал) является ограниченной и односвязной в $\mathbb{R}^d$, $d = 2, 3$. Будем предполагать, что $\Gamma_0, \Gamma_1, \Gamma_2$ — непустые открытые подмножества связной границы $\Gamma = \partial\Omega = \overline{\Gamma_0} \cup \overline{\Gamma_1} \cup \overline{\Gamma_2}$, $\Gamma_i \cap \Gamma_j = \emptyset$, $i \neq j$. Участок Γ_2 является объединением конечного числа простых гладких поверхностей (кривых, если $d = 2$), граничащих с Γ_0, а множество $\Gamma - \Gamma_0 - \Gamma_1 - \Gamma_2$ состоит из конечного числа простых замкнутых гладких кривых при $d = 3$.

Рассмотрим следующее пространство вектор-функций, определенных на Ω:

$$\boldsymbol{V} = \{\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{W}_2^1(\Omega)\colon \quad \operatorname{div} \boldsymbol{v} = 0 \quad \text{в } \Omega; \quad \boldsymbol{v} = 0 \quad \text{на } \Gamma_0\}.$$

Здесь $\boldsymbol{W}_r^m$ — пространства Соболева; $\boldsymbol{W}_2^m = \boldsymbol{H}^m$. Скалярное произведение в гильбертовом пространстве $\boldsymbol{V}$ определим формулой

$$(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = \sum_1^d \int\limits_\Omega \nabla u_i \cdot \nabla v_i \, dx, \qquad \|\boldsymbol{u}\|^2 = (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}).$$

В постановке краевой задачи (1)–(3) вектор-функции $\boldsymbol{f} = \boldsymbol{f}(x)$, $x \in \Omega$, $\boldsymbol{g} = \boldsymbol{g}(x)$, $x \in \Gamma_1$ и скалярная функция $q = q(x)$, $x \in \Gamma_2$ являются заданными, при этом

$$\int\limits_\Gamma \tilde{q} \, dS = 0, \qquad \tilde{q} = \begin{cases} \boldsymbol{g} \cdot \boldsymbol{n}, & x \in \Gamma_1, \\ 0, & x \in \Gamma_0, \\ q, & x \in \Gamma_2. \end{cases}$$

Если

$$\boldsymbol{g} \cdot \boldsymbol{n} \leqslant 0, \quad x \in \Gamma_1, \qquad q \geqslant 0, \quad x \in \Gamma_2,$$

то Γ_1 является участком втекания жидкости, Γ_2 — участком вытекания, а Γ_0 — твердой стенкой канала. Будем предполагать, что функция $\boldsymbol{g}$ является следом на Γ_1 некоторой функции из пространства $\boldsymbol{V}$, а функция q — следом нормальной компоненты на Γ_2, при этом функция

$$\tilde{\boldsymbol{g}} = \begin{cases} \boldsymbol{g}(x), & x \in \Gamma_1, \\ 0, & x \in \Gamma_0 \cup \Gamma_2 \end{cases}$$

принадлежит классу $H^{1/2}(\Gamma)$. Обозначим через $\boldsymbol{V}'$ пространство, сопряженное с $\boldsymbol{V}$, и определим следующие операторы:

$$A\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}',$$

$$A\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}', \qquad (A\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = \nu(\operatorname{rot} \boldsymbol{u}, \operatorname{rot} \boldsymbol{v})_{L^2(\Omega)} + (u_n, v_n)_{H^{1/2}(\Gamma)},$$

$$B\colon \boldsymbol{V} \times \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}', \qquad B[\boldsymbol{u}] = B(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}),$$

$$(B(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}), \boldsymbol{w}) = \int\limits_\Omega (\operatorname{rot} \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}) \boldsymbol{w} \, dx,$$

$$\Phi(\boldsymbol{v}) = \begin{cases} \nu \displaystyle\int\limits_{\Gamma_2} \Psi(\boldsymbol{v}_\tau) \, ds, & \Psi(\boldsymbol{v}_\tau(x)) \in L^1(\Gamma_2), \\ +\infty, & \Psi(\boldsymbol{v}_\tau(x)) \notin L^1(\Gamma_2). \end{cases}$$

Обозначим через $(\boldsymbol{h}, \boldsymbol{w})$ значение функционала $\boldsymbol{h} \in \boldsymbol{V}'$ на элементе $\boldsymbol{w} \in \boldsymbol{V}$. Пусть

$$\boldsymbol{K} = \{\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{V}, \quad \boldsymbol{v} = \boldsymbol{g} \quad \text{на } \Gamma_1, \quad \boldsymbol{v} = 0 \quad \text{на } \Gamma_0, \quad \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n} = q \quad \text{на } \Gamma_2\} \cap \operatorname{dom} \Phi,$$

где $\operatorname{dom} \Phi$ состоит из элементов пространства $\boldsymbol{V}$, на которых конечен функционал Φ.

Определение. Вектор-функция $\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{K}$ называется обобщенным решением задачи (1)–(3), если

$$(A\boldsymbol{u} + B[\boldsymbol{u}] - \boldsymbol{f}, \boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}) + \Phi(\boldsymbol{u}) - \Phi(\boldsymbol{v}) \leqslant 0 \quad \forall \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{K}. \tag{9}$$

Действительно, если $\{\boldsymbol{u}, p\}$ — достаточно гладкое решение краевой задачи (1)–(3), то, умножая уравнение импульсов, записанное в форме уравнения Лэмба, на $\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}$ и интегрируя по области Ω, получим

$$\nu(\operatorname{rot}\boldsymbol{u}, \operatorname{rot}(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v})) + \nu\int\limits_{\Gamma_2}(n\times\operatorname{rot}\boldsymbol{u})(\boldsymbol{u}_\tau - \boldsymbol{v}_\tau)\,ds + (B[\boldsymbol{u}], \boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}) = (f, \boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}).$$

Используя неравенство, вытекающее из (3):

$$(\boldsymbol{n}\times\operatorname{rot}\boldsymbol{u})(\boldsymbol{v}_\tau - \boldsymbol{u}_\tau) \leqslant \Psi(\boldsymbol{v}_\tau) - \Psi(\boldsymbol{u}_\tau),$$

получим (9). Справедливо и обратное: если $\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{K}$ — достаточно гладкая вектор-функция, то, полагая в (9)

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{u} \pm \boldsymbol{w} \quad \forall \boldsymbol{w} \in \overset{\circ}{C}{}^{\infty}(\Omega), \qquad \operatorname{div}\boldsymbol{w} = 0,$$

получим

$$\nu(\operatorname{rot}\boldsymbol{u}, \operatorname{rot}\boldsymbol{w})_{L^2(\Omega)} + (B[\boldsymbol{u}], \boldsymbol{w}) = (\boldsymbol{f}, \boldsymbol{w}).$$

Отсюда следует, что вектор $\boldsymbol{u}$ удовлетворяет уравнению импульсов в Ω, из которого путем умножения на $\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}$, интегрирования по Ω и сравнения с (9) получаем неравенство

$$\nu\int\limits_{\Gamma_2}\big(\Psi(\boldsymbol{v}_\tau) - \Psi(\boldsymbol{u}_\tau) - (\boldsymbol{n}\times\operatorname{rot}\boldsymbol{u})(\boldsymbol{v}_\tau - \boldsymbol{u}_\tau)\big)\,dS \geqslant 0 \quad \forall \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{K},$$

означающее справедливость субдифференциального граничного условия (3).

2. Разрешимость вариационного неравенства. Изучим свойства операторов A, B и функционала Φ. Заметим, что

$$(A\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = (A\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}), \qquad (B(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}), \boldsymbol{v}) = 0 \qquad \forall \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{V}.$$

Нетрудно проверить (см., например, [1, 2]), что

$$(A\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}) \geqslant \gamma\|\boldsymbol{u}\|^2 \quad \forall \boldsymbol{u} \in \boldsymbol{V},$$

где $\gamma > 0$ не зависит от $\boldsymbol{u}$; отображение $B[\boldsymbol{u}]$: $\boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}'$ усиленно-непрерывно, т. е. переводит слабосходящиеся в $\boldsymbol{V}$ последовательности в сильносходящиеся в $\boldsymbol{V}'$. Функционал Φ является выпуклым и полунепрерывным снизу. Поэтому для доказательства разрешимости вариационного неравенства (9) достаточно выяснить, при каких условиях нелинейный оператор $B[\boldsymbol{u}]$ будет “подчинен” оператору A на множестве $\boldsymbol{K}$, т. е. получить следующую оценку: для всех $\delta > 0$ найдется элемент $\boldsymbol{w}_\delta \in \boldsymbol{K}$ такой, что

$$(B[\boldsymbol{u}], \boldsymbol{w}_\delta) \leqslant \delta\|\boldsymbol{u}\|^2 + C_\delta \quad \forall \boldsymbol{u} \in \boldsymbol{K}. \tag{10}$$

Здесь $C_\delta > 0$ не зависит от $\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{K}$.

Условие (10) устанавливает зависимость между “структурой” множества $\boldsymbol{K}$ и квадратичным оператором $B[\boldsymbol{u}]$. Проверка данного условия является одним из основных этапов исследования конкретных задач гидродинамики. Однако указанное условие очевидно выполняется, если множество $\boldsymbol{K}$ содержит нулевой элемент или является ограниченным.

2.1. *Двумерные течения.* В двумерном случае нелинейный оператор $B[\boldsymbol{u}]$: $\boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}'$ определяется выражением

$$(B[\boldsymbol{u}], \boldsymbol{w}) = \int\limits_{\Omega} \omega Z(\boldsymbol{u}) \cdot \boldsymbol{w}\, dx,$$

где $\omega = \operatorname{rot} \boldsymbol{u} \equiv \partial u_2/\partial x_1 - \partial u_1/\partial x_2$ — завихренность течения; $Z(\boldsymbol{u}) = \{-u_2, u_1\}$ — поворот вектора $\boldsymbol{u} = \{u_1, u_2\}$ на $\pi/2$.

Заметим, что любую вектор-функцию $\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{K}$ можно представить в виде

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{v} + \nabla r,$$

где $r \in W_2^2(\Omega)$ является решением задачи

$$\Delta r = 0, \quad x \in \Omega, \qquad \frac{\partial r}{\partial n} = \tilde{q} \quad \text{на } \Gamma.$$

Тогда функция $\boldsymbol{v}$ имеет нулевую нормальную компоненту на Γ. Таким образом, для доказательства (10) достаточно оценить выражение $(B[\boldsymbol{v}], \boldsymbol{w})$, где $\boldsymbol{w} \in \boldsymbol{K}$. Пусть $\boldsymbol{w}_0 = \operatorname{Rot} b = \{\partial b/\partial x_2, -\partial b/\partial x_1\}$ — элемент множества $\boldsymbol{K}$, при этом $b \in W_2^2(\Omega)$ — скалярная функция.

Следуя [8, с. 116], определим функцию “срезки” соотношением

$$\mu_\varepsilon(\lambda) = \begin{cases} 1, & 0 \leqslant \lambda < \sigma(\varepsilon)^2, \\ \varepsilon \ln(\sigma(\varepsilon)/\lambda), & \lambda \in (\sigma(\varepsilon)^2, \sigma(\varepsilon)), \\ 0, & \lambda > \sigma(\varepsilon). \end{cases}$$

Здесь $\sigma(\varepsilon) = \exp(-1/\varepsilon)$. Сглаживание непрерывной функции $\mu_\varepsilon(\lambda)$ приводит к дважды непрерывно дифференцируемой функции $\tilde{\mu}_\varepsilon(\lambda)$ такой, что

$$\tilde{\mu}_\varepsilon(\lambda) = 1, \quad \lambda \in [0, \sigma(\varepsilon)^2/2], \qquad \tilde{\mu}_\varepsilon(\lambda) = 0, \quad \lambda > 2\sigma(\varepsilon),$$
$$|\tilde{\mu}_\varepsilon'(\lambda)| \leqslant 2\varepsilon/\lambda, \qquad \lambda > 0.$$

Полагаем $\theta_\varepsilon(x) = \tilde{\mu}_\varepsilon(d_\Gamma(x))$, где $d_\Gamma(x)$ — расстояние от x до границы Γ, и

$$\boldsymbol{w}_\varepsilon = \operatorname{Rot}(\theta_\varepsilon b) = b \operatorname{Rot} \theta_\varepsilon + \theta_\varepsilon \operatorname{Rot} b \in \boldsymbol{K},$$

если число $\varepsilon > 0$ достаточно мало. Тогда

$$(B[\boldsymbol{v}], \boldsymbol{w}_\varepsilon) = \int\limits_{\Omega} \operatorname{rot} \boldsymbol{v} \cdot Z(\boldsymbol{v})(b \operatorname{Rot} \theta_\varepsilon + \theta_\varepsilon \operatorname{Rot} b)\, dx \leqslant$$
$$\leqslant -\int\limits_{\Omega_\varepsilon} b \operatorname{rot} \boldsymbol{v}(\boldsymbol{v} \cdot \nabla \theta_\varepsilon)\, dx + \alpha(\varepsilon) \|\operatorname{rot} \boldsymbol{v}\|_{L^2(\Omega)} \|\boldsymbol{v}\|_{L^4(\Omega)},$$

где $\alpha(\varepsilon) = \|\operatorname{Rot} b\|_{L^4(\Omega_\varepsilon)} \to 0$ при $\varepsilon \to +0$; $\Omega_\varepsilon = \{x \in \Omega,\ d_\Gamma(x) < 2\sigma(\varepsilon)\}$. Оценивая первое слагаемое, заметим, что

$$\boldsymbol{v} \cdot \nabla \theta_\varepsilon = \tilde{\mu}_\varepsilon'(d_\Gamma(x))(\boldsymbol{v}(x) \cdot \nabla d_\Gamma(x)),$$

при этом $\boldsymbol{v}(x) \cdot \nabla d_\Gamma(x) = 0$ на Γ.

Следовательно,

$$\Big| \int\limits_{\Omega_\varepsilon} b \operatorname{rot} \boldsymbol{v}(\boldsymbol{v} \cdot \nabla \theta_\varepsilon)\, dx \Big| \leqslant \int\limits_{\Omega_\varepsilon} |b \operatorname{rot} \boldsymbol{v}|\, |(\boldsymbol{v} \nabla d_\Gamma)| \, \frac{2\varepsilon}{d_\Gamma}\, dx \leqslant$$
$$\leqslant \varepsilon \|b\|_{L^\infty(\Omega)} \|\operatorname{rot} \boldsymbol{v}\|_{L^2(\Omega)} \|\boldsymbol{v} \nabla d_\Gamma\|_{W_2^1(\Omega)}.$$

Из последней оценки вытекает справедливость условия (10). В результате получаем следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть* $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, *множество* $\boldsymbol{K}$ *непусто*, $\partial\Phi(\boldsymbol{v}) \neq \varnothing$ $\forall \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{K}$, $\boldsymbol{f} \in L^2(\Omega)$. *Тогда существует обобщенное решение задачи* (1)–(3).

Замечание. Из теоремы 1 следует, что в двумерном случае имеет место разрешимость при любых числах Рейнольдса краевых задач с условиями, например, вида (5)–(8). Единственность имеет место при малых значениях числа Рейнольдса. В общем случае множество решений гомеоморфно конечномерному компакту [1].

2.2. *Трехмерные течения с ограниченной касательной компонентой скорости.* В отличие от двумерного случая справедливость условия (10) удалось показать при следующем предположении:

$$\|\boldsymbol{w}_\tau\|_{L^2(\Gamma_2)} \leqslant \lambda_0 \quad \forall \boldsymbol{w} \in \boldsymbol{K}, \tag{11}$$

где $\lambda_0 > 0$ не зависит от $\boldsymbol{w} \in \boldsymbol{K}$.

Условие (11) выполняется, в частности, для функции $\Psi(\boldsymbol{v})$ в примере 4. В этом случае субдифференциальное условие (3) приводит к краевому условию (8) на участке Γ_2.

Лемма. *Пусть* $\boldsymbol{K} \neq \varnothing$ *и выполняется условие* (11). *Тогда для оператора* B *на множестве* $\boldsymbol{K}$ *выполняется условие* (10).

Доказательство. Как и в случае $d = 2$, достаточно показать, что

$$(B(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}), \boldsymbol{w}_\gamma) \leqslant \gamma \|\boldsymbol{u}\|^2 + C_\gamma \quad \forall \gamma > 0 \quad \exists \boldsymbol{w}_\gamma \in \boldsymbol{K} \tag{12}$$

для любой вектор-функции $\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{V}$ такой, что $u_n = 0$ на Γ, $\|\boldsymbol{u}_\tau\|_{L^2(\Gamma)} \leqslant \lambda_0$.

Рассмотрим сначала следующую задачу: найти функцию $\boldsymbol{u}_0 \in \boldsymbol{V}$, такую что $\boldsymbol{u}_0 \cdot \boldsymbol{n} = 0$ на Γ и

$$-(\boldsymbol{u}_0, \Delta \boldsymbol{v})_{L^2(\Omega)} + \int\limits_\Gamma \operatorname{rot} \boldsymbol{v} (\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{n})\, dS = 0 \quad \forall \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{V} \cap \boldsymbol{W}_2^2(\Omega), \qquad \boldsymbol{v} = 0 \quad \text{на } \Gamma. \tag{13}$$

Нетрудно заметить, что функция $\boldsymbol{u}_0 \in \boldsymbol{V}$, являющаяся решением системы Стокса

$$-\Delta \boldsymbol{u}_0 + \nabla \xi = 0, \quad \operatorname{div} \boldsymbol{u}_0 = 0 \quad \text{в } \Omega, \qquad \boldsymbol{u}_0 = \boldsymbol{u} \quad \text{на } \Gamma,$$

удовлетворяет (13).

Получим оценку $\boldsymbol{u}_0$ в $L^3(\Omega)$. Для этого выберем в качестве элемента $\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{V} \cap \boldsymbol{W}_2^2(\Omega)$ решение следующей системы:

$$-\Delta \boldsymbol{v} + \nabla \xi = |\boldsymbol{u}_0| \cdot \boldsymbol{u}_0, \quad \operatorname{div} \boldsymbol{v} = 0 \quad \text{в } \Omega, \qquad \boldsymbol{v} = 0 \quad \text{на } \Gamma. \tag{14}$$

Заметим, что правая часть первого уравнения этой системы $\boldsymbol{f} = |\boldsymbol{u}_0| \cdot \boldsymbol{u}_0 \in L^{3/2}(\Omega)$, при этом $\|\boldsymbol{f}\|_{L^{3/2}(\Omega)} = \|\boldsymbol{u}_0\|^2_{L^3(\Omega)}$. Таким образом, из (14) вытекает оценка

$$\|\boldsymbol{v}\|_{\boldsymbol{W}^2_{3/2}(\Omega)} \leqslant C \|\boldsymbol{u}_0\|^2_{L^3(\Omega)}. \tag{15}$$

Подставляя $\boldsymbol{v}$ в (13), на основании (15) получаем

$$\|\boldsymbol{u}_0\|^3_{L^3(\Omega)} = \int\limits_\Gamma \operatorname{rot} \boldsymbol{v} (\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{n})\, dS \leqslant \lambda_0 \|\operatorname{rot} \boldsymbol{v}\|_{L^2(\Gamma)} \leqslant C\lambda_0 \|\boldsymbol{v}\|_{\boldsymbol{W}^2_{3/2}(\Omega)} \leqslant C\lambda_0 \|\boldsymbol{u}_0\|^2_{L^3(\Omega)}.$$

Следовательно, имеет место оценка

$$\|\boldsymbol{u}_0\|_{L^3(\Omega)} \leqslant C\lambda_0,$$

где C не зависит от $\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{V}$, $u_n = 0$ на Γ, $\|\boldsymbol{u}_\tau\|_{L^2(\Gamma)} \leqslant \lambda_0$.

Покажем справедливость (12):

$$(B(\boldsymbol{u},\boldsymbol{u}),\boldsymbol{w}_\gamma) = \int\limits_\Omega (\operatorname{rot}\boldsymbol{u}\times(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_0))\boldsymbol{w}_\gamma\,dx + \int\limits_\Omega (\operatorname{rot}\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{u}_0)\boldsymbol{w}_\gamma\,dx \leqslant$$
$$\leqslant \int\limits_\Omega (\operatorname{rot}\boldsymbol{u}\times(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_0))\boldsymbol{w}_\gamma\,dx + C\|\boldsymbol{u}\|\lambda_0\|\boldsymbol{w}_\gamma\|_{L^6(\Omega)}.$$

Тогда для получения (12) достаточно оценить первое слагаемое в последнем неравенстве.

Учтем, что $\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_0\in\boldsymbol{V}$ обладает свойством $\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_0=0$ на Γ. Тогда, представляя некоторый фиксированный элемент $\boldsymbol{w}_0\in\boldsymbol{K}$ в виде $\boldsymbol{w}_0=\operatorname{rot}\boldsymbol{b}$ и определив $\boldsymbol{w}_\gamma=\operatorname{rot}(\theta_\varepsilon\boldsymbol{b})\in\boldsymbol{K}$, где $\theta_\varepsilon\in C^2(\overline{\Omega})$ — семейство срезающих функций [8, с. 116], получаем оценку

$$\int\limits_\Omega (\operatorname{rot}\boldsymbol{u}\times(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_0))\boldsymbol{w}_\gamma\,dx \leqslant \gamma\|\boldsymbol{u}\|\,\|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_0\|+C_\gamma,$$

где C_γ не зависит от $\boldsymbol{u}$. Выполнения этого неравенства достаточно для справедливости оценки (12).

Теорема 2. *Пусть $\boldsymbol{K}\neq\emptyset$, $\partial\Phi(\boldsymbol{v})\neq\emptyset$ $\forall\boldsymbol{v}\in\boldsymbol{K}$, $\boldsymbol{f}\in L^2(\Omega)$ и выполняется условие* (11). *Тогда множество обобщенных решений задачи* (1)–(3) *непусто и гомеоморфно конечномерному компакту.*

Замечание. Следует отметить, что достаточным условием разрешимости вариационного неравенства (9) является ограниченность касательных компонент скорости в норме $L^2(\Gamma)$. Имея такую априорную информацию о решении системы уравнений Навье — Стокса (например, в форме вариационного принципа типа (4)), можно доказать ограниченность решения в норме пространства $\boldsymbol{V}$ и соответственно ограниченность касательных компонент в $H^{1/2}(\Gamma)$.

Достаточно сильное ограничение (11), гарантирующее разрешимость трехмерной задачи (1)–(3), можно ослабить, потребовав ограниченности касательных компонент вектор-функций из множества $\boldsymbol{K}$ в более слабой норме пространства $\boldsymbol{W}_3^{-1/3}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Чеботарев А. Ю.** Субдифференциальные краевые задачи для стационарных уравнений Навье — Стокса // Дифференц. уравнения. 1992. Т. 28, № 8. С. 1443–1450.
2. **Чеботарев А. Ю.** Вариационные неравенства для оператора типа Навье — Стокса и односторонние задачи для уравнений вязкой теплопроводной жидкости // Мат. заметки. 2001. Т. 70, вып. 2. С. 296–307.
3. **Conca C., Murat F., Pironneau O.** The Stokes and Navier — Stokes equations with boundary conditions involving the pressure // Japan J. Math. 1994. V. 20, N 2. P. 279–318.
4. **Kračmar S., Neustupa J.** A weak solvability of a steady variational inequality of the Navier — Stokes type with mixed boundary conditions // J. Nonlinear Analys. 2001. V. 47. P. 4169–4180.
5. **Kračmar S.** Channel flows and steady variational inequalities of the Navier — Stokes type // Вычисл. технологии. 2002. Т. 7, № 1. С. 83–95.
6. **Чеботарев А. Ю.** Стационарные вариационные неравенства в модели неоднородной несжимаемой жидкости // Сиб. мат. журн. 1997. Т. 38, № 5. С. 1184–1193.
7. **Илларионов А. А., Чеботарев А. Ю.** О разрешимости смешанной краевой стационарной задачи для уравнений Навье — Стокса // Дифференц. уравнения. 2001. Т. 37, № 5. С. 689–695.
8. **Темам Р.** Уравнения Навье — Стокса. Теория и численный анализ. М.: Мир, 1981.

Поступила в редакцию 18/III 2003 г.