

УДК 536.12:621.891

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ТЕМПЕРАТУРЫ ПРИ СКОЛЬЖЕНИИ КОЛЕСА ПО РЕЛЬСУ С УЧЕТОМ КОНВЕКТИВНОГО ОХЛАЖДЕНИЯ СВОБОДНЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

А. А. Евтушенко, С. Я. Матысяк*

Институт прикладных проблем математики и механики им. Я. С. Подстригача
НАН Украины, 70053 Львов, Украина

* Варшавский университет, 02089 Варшава, Польша

Предлагается расчетная схема определения температуры при скольжении колеса железнодорожного состава по рельсу. Используется решение Линга смешанной плоской квазистационарной задачи теплопроводности для полупространства, нагреваемого на локальной части поверхности быстродвижущимся распределенным потоком тепла. Для вычисления этого решения применяется метод кусочно-линейной аппроксимации финитными функциями. В частном случае равномерного распределения интенсивности фрикционного теплового потока получено аналитическое решение задачи. Изучено влияние различных форм распределения интенсивности теплового потока и числа Био на температурное поле рельса.

Ключевые слова: трение, тепловой поток, контактное давление, интегральное уравнение Вольтерра.

Введение. Вследствие трения в области контакта колеса с рельсом происходит превращение механической энергии в тепловую [1]. Фрикционный нагрев приводит к локальному повышению температуры в зоне контакта трущихся тел и может вызвать изменения микроструктуры их материалов с последующим разрушением. Для определения температуры нагрева при скольжении колеса по рельсу в [2] предложено использовать результаты работы [3], в которой получено решение стационарной задачи теплопроводности для полупространства, нагреваемого на конечном участке поверхности равномерно распределенным фрикционным тепловым потоком. В [4] предполагалось, что нагреваемая область в указанной задаче имеет форму квадрата или круга.

Решение соответствующей квазистационарной задачи теплопроводности для полупространства, нагреваемого быстродвижущимся линейным тепловым потоком, получено в работе [5] с помощью интегрального преобразования Фурье в виде интеграла типа свертки интенсивности теплового потока и ядра с корневой особенностью. Случай эллиптического распределения интенсивности фрикционного теплового потока, пропорционального контактному давлению Герца, рассмотрен в работах [6, 7] с использованием интегрального преобразования Лапласа, в работе [8] задача решена методом приближенного интегрирования с помощью кусочно-линейных функций.

Во всех указанных выше работах предполагалось, что поверхность полупространства вне области нагрева теплоизолирована. Целью данной работы является получение решения тепловой задачи Линга [5] для произвольной интенсивности теплового потока с учетом конвективного охлаждения свободной поверхности полупространства и моделирование на основе этого решения теплового режима трибосистемы колесо — рельс.

1. Постановка задачи. Рассмотрим круговой цилиндр радиуса R (колесо), равномерно движущийся с поступательной скоростью V по поверхности полупространства (рельсу) (рис. 1). Цилиндр вдавливается в поверхность полупространства линейной силой P . Вследствие проскальзывания со скоростью V_s в области контакта колеса с рельсом

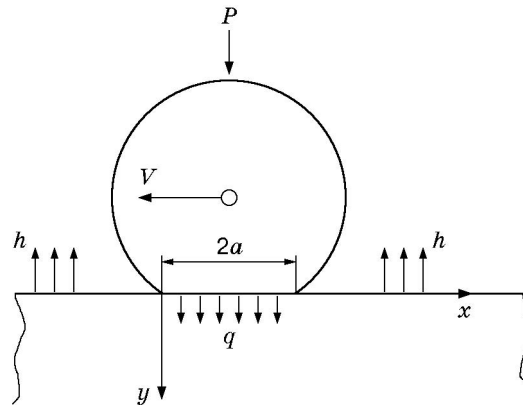


Рис. 1

имеет место теплообразование в виде тепловых потоков, направленных в колесо и рельс. Считая коэффициент распределения тепловых потоков известным [9], рассмотрим распределение температуры в рельсе вследствие трения. С этой целью введем декартову систему координат xy , жестко связанную с ведущим краем колеса. Принимаются следующие допущения:

- длина $2a$ участка контакта мала по сравнению с радиусом колеса R ;
- для крипа, изменяющегося в пределах $0,1\% < s < 2\%$ (макропроскальзывание), скорость скольжения V_s равна [6]

$$V_s = sV; \quad (1)$$

- поверхность рельса нагревается с помощью быстродвижущегося распределенного теплового потока [10], градиент которого в направлении скольжения пренебрежимо мал по сравнению с градиентом в поперечном направлении;

— интенсивность q фрикционного теплового потока пропорциональна мощности трения:

$$q(x) = \gamma f V_s p(x), \quad 0 \leq x \leq 2a$$

(p — контактное давление; f — коэффициент трения; γ — коэффициент распределения тепловых потоков);

- вне участка нагревания происходит конвективное охлаждение поверхности рельса;
- температурное состояние рельса в эйлеровой системе координат xy является установившимся;
- теплофизические свойства материала рельса постоянны.

С учетом сделанных предположений тепловая задача для рельса сводится к решению следующей квазистационарной задачи теплопроводности для полупространства:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial \eta^2} = \frac{\partial T}{\partial \xi}, \quad -\infty < \xi < \infty, \quad 0 \leq \eta < \infty, \quad (2)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \eta} \Big|_{\eta=0} = \begin{cases} -\Lambda p^*(\xi), & 0 \leq \xi \leq 1, \\ \text{Bi} T, & -\infty < \xi < 0 \vee 1 < \xi < \infty, \end{cases} \quad T \rightarrow 0 \text{ при } \sqrt{\xi^2 + \eta^2} \rightarrow \infty.$$

Здесь

$$\Lambda = \frac{\gamma f V_s p_0 d}{K}, \quad d = \sqrt{\frac{2ak}{V_s}}, \quad p_0 = \frac{2P}{\pi a}, \quad \text{Bi} = \frac{hd}{K}, \quad \xi = \frac{x}{2a}, \quad \eta = \frac{y}{d}, \quad (3)$$

T — температура; K, k — коэффициенты теплопроводности и температуропроводности соответственно; h — коэффициент теплообмена; d — эффективная глубина прогревания в

соответствующей нестационарной задаче теплопроводности [7]; p_0 — максимальное давление в двумерном аналоге задачи Герца [11].

2. Метод решения. Решение квазистационарной задачи теплопроводности (2) для произвольного распределения безразмерного контактного давления $p^* = p/p_0$ имеет вид [5]

$$T(\xi, \eta) = T_{\max} T^*(\xi, \eta), \quad -\infty < \xi < \infty, \quad 0 \leq \eta < \infty,$$

где

$$T^*(\xi, \eta) = \frac{2}{\pi} \int_0^b p^*(\tau) G(\xi - \tau, \eta) d\tau - H(\xi - 1) \frac{\text{Bi}}{\sqrt{\pi}} \int_b^\xi T^*(\lambda) G(\xi - \lambda, \eta) d\lambda; \quad (4)$$

$$G(\xi, \eta) = \frac{e^{-\eta^2/(4\xi)}}{\sqrt{\xi}}, \quad b = \begin{cases} 0, & -\infty < \xi \leq 0, \\ \xi, & 0 \leq \xi \leq 1, \\ 1, & 1 \leq \xi < \infty, \end{cases} \quad (5)$$

$H(\cdot)$ — единичная функция Хевисайда; $T^*(\lambda) \equiv T^*(\lambda, 0)$; $T_{\max} = \Lambda\sqrt{\pi}/2$ — максимальная температура в точке $\xi = 1$ выхода из участка контакта в случае равномерного распределения контактного давления [8]

$$p(x) = \pi p_0/4, \quad 0 \leq x \leq 2a \quad (6)$$

и теплоизоляции поверхностей рельса вне области трения, т. е. при $h = 0$ ($\text{Bi} = 0$).

Для вычисления интегралов в правой части решения (4) применим метод кусочно-линейной аппроксимации финитными функциями [12]. Введем равномерную сетку на промежутке интегрирования $[0, b]$:

$$0 = \tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_{n-1} < \tau_n = b, \quad \tau_i = i\delta\tau, \quad \delta\tau = b/n, \quad i = 0, 1, \dots, n.$$

Поставим в соответствие каждому узлу τ_i “функцию-крышку”:

$$\varphi_0(\tau) = \begin{cases} (\tau_1 - \tau)/(\delta\tau), & \tau \in [\tau_0, \tau_1], \\ 0, & \tau \notin [\tau_0, \tau_1], \end{cases} \quad \varphi_n(\tau) = \begin{cases} (\tau - \tau_{n-1})/(\delta\tau), & \tau \in [\tau_{n-1}, \tau_n], \\ 0, & \tau \notin [\tau_{n-1}, \tau_n], \end{cases} \quad (7)$$

$$\varphi_i(\tau) = \begin{cases} (\tau - \tau_{i-1})/(\delta\tau), & \tau \in [\tau_{i-1}, \tau_i], \\ (\tau_{i+1} - \tau)/(\delta\tau), & \tau \in [\tau_i, \tau_{i+1}], \\ 0, & \tau \notin [\tau_{i-1}, \tau_{i+1}], \end{cases} \quad i = 1, 2, \dots, n-1.$$

С помощью кусочно-линейных функций (7) аппроксимируем безразмерное контактное давление $p^*(\tau)$:

$$p^*(\tau) \simeq \sum_{i=0}^{\infty} p_i^* \varphi_i(\tau), \quad p^* \equiv p^*(\tau_i). \quad (8)$$

Равномерная погрешность такого приближения имеет порядок $O(\delta\tau^2)$ [13].

Подставив разложение (8) в уравнение (4) при $\text{Bi} = 0$, после интегрирования получим

$$T^*(\xi, \eta) = \frac{2}{\pi\delta\tau} \sum_{i=0}^n p_i^* G_i(\xi, \eta) H(\xi), \quad -\infty < \xi < \infty, \quad 0 \leq \eta < \infty, \quad (9)$$

где

$$G_0(\xi, \eta) = \tau_1 G_1^{(0)}(\xi, \eta) - G_1^{(1)}(\xi, \eta), \quad G_n(\xi, \eta) = G_n^{(1)}(\xi, \eta) - \tau_{n-1} G_n^{(0)}(\xi, \eta),$$

$$G_i(\xi, \eta) = G_i^{(1)}(\xi, \eta) - \tau_{i-1} G_i^{(0)}(\xi, \eta) + \tau_{i+1} G_{i+1}^{(0)} - G_{i+1}^{(1)}(\xi, \eta), \quad i = 1, 2, \dots, n-1,$$

$$\begin{aligned}
 G_i^{(0)}(\xi, \eta) &= F^{(0)}(\xi - \tau_i, \eta) - F^{(0)}(\xi - \tau_{i-1}, \eta), \quad \xi \geq \tau_i, \quad i = 1, \dots, n, \\
 G_i^{(1)}(\xi, \eta) &= F^{(1)}(\xi - \tau_i, \eta) - F^{(1)}(\xi - \tau_{i-1}, \eta) + (\eta^2/6 + \xi)G_i^{(0)}(\xi, \eta), \\
 F^{(0)}(\xi, \eta) &= -2\sqrt{\xi} e^{-\eta^2/(4\xi)} - \eta\sqrt{\pi} \operatorname{erf}(0,5\eta/\sqrt{\xi}), \quad F^{(1)}(\xi, \eta) = 2\xi\sqrt{\xi} e^{-\eta^2/(4\xi)} / 3,
 \end{aligned} \tag{10}$$

$\operatorname{erf}(\cdot)$ — функция ошибок.

Безразмерную поверхностную температуру $T^*(\lambda)$, $\lambda \geq 1$ во втором слагаемом правой части интегрального уравнения (4) представим в виде

$$T^*(\lambda) \simeq \sum_{j=0}^m T_j^* \varphi_j(\lambda), \quad T_j^* \equiv T^*(\lambda_j), \tag{11}$$

где $\lambda_j = 1 + j\delta\lambda$ ($j = 0, 1, \dots, m$); $\delta\lambda = (\xi - 1)/m$; $\varphi_i(\lambda)$ — “функция-крышка” (7).

Подставив разложение (11) с учетом решения (9) в уравнение (4), получим систему линейных алгебраических уравнений с треугольной матрицей

$$T_k^* + \frac{\operatorname{Bi}}{\sqrt{\pi} \delta\lambda} \sum_{j=0}^k T_j^* G_{jk} = \frac{2}{\pi\delta\tau} \sum_{i=0}^n p_i^* G_{ik}, \quad G_{jk} \equiv G_j(\lambda_k, 0), \quad k = 0, 1, \dots, m. \tag{12}$$

В результате решения системы уравнений (12) находим безразмерную поверхностную температуру T_j^* в узлах λ_j , $j = 0, 1, \dots, m$. Подставив эти значения в интегральное уравнение (4), определим безразмерное температурное поле в рельсе за участком контакта:

$$T^*(\xi, \eta) = \frac{2}{\pi\delta\tau} \sum_{i=0}^n p_i^* G_i(\xi, \eta) - \frac{\operatorname{Bi}}{\sqrt{\pi} \delta\lambda} \sum_{j=0}^m T_j^* G_j(\xi, \eta), \quad \xi \geq 1, \quad \eta \geq 0. \tag{13}$$

3. Равномерное распределение контактного давления. Рассмотрим случай равномерного распределения давления, характерный для тяжело нагруженных узлов трения [14]. Подставляя безразмерное контактное давление $p^*(\tau)$ (6) в уравнение (4), после интегрирования получаем

$$T(\xi, \eta) = \begin{cases} 0, & -\infty < \xi \leq 0, \\ \theta(\xi, \eta), & 0 \leq \xi \leq 1, \\ \theta(\xi, \eta) - \theta(\xi - 1, \eta) - \frac{\operatorname{Bi}}{\sqrt{\pi}} \int_1^\xi T^*(\lambda) G(\xi - \lambda, \eta) d\lambda, & 1 \leq \xi < \infty, \end{cases} \tag{14}$$

где

$$\theta(\xi, \eta) = \sqrt{\xi} e^{-\eta^2/(4\xi)} - \sqrt{0,5\pi} \eta \operatorname{erfc}(0,5\eta/\sqrt{\xi}), \quad 0 \leq \eta < \infty, \quad \operatorname{erfc}(\cdot) = 1 - \operatorname{erf}(\cdot). \tag{15}$$

Из соотношений (14) следует, что для определения поверхностной температуры $T^*(\lambda)$ за область трения $\xi \geq 1$, $\eta = 0$ необходимо решить интегральное уравнение Вольтерра второго рода со слабосингулярным ядром

$$T^*(\xi) + \frac{\operatorname{Bi}}{\sqrt{\pi}} \int_1^\xi \frac{T^*(\lambda)}{\sqrt{\xi - \lambda}} d\lambda = F(\xi), \quad 1 \leq \xi < \infty, \tag{16}$$

где $F(\xi) = \sqrt{\xi} - \sqrt{\xi - 1}$.

Решение интегрального уравнения (16) имеет вид [15]

$$T^*(\xi) = F(\xi) + \int_1^\xi R(\xi - \tau) F(\tau) d\tau, \quad 1 \leq \xi < \infty, \tag{17}$$

где R — резольвента:

$$R(\xi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-\text{Bi} \sqrt{\xi})^n}{\xi \Gamma(n/2)}, \quad (18)$$

$\Gamma(\cdot)$ — гамма-функция. При $n = 2k$ из соотношения (18) следует

$$R_{2k}(\xi) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\text{Bi}^2 \xi)^k}{\xi \Gamma(k)} = \text{Bi}^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\text{Bi}^2 \xi)^{k-1}}{(k-1)!} = \text{Bi}^2 e^{\text{Bi}^2 \xi}, \quad (19)$$

а при $n = 2k + 1$ с учетом формулы 5.2.7.18 из [16] получаем

$$\begin{aligned} R_{2k+1}(\xi) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\text{Bi} \sqrt{\xi})^{2k+1}}{\xi \Gamma(k+0,5)} = \frac{-\text{Bi} \sqrt{\xi}}{\xi \Gamma(0,5)} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\text{Bi} \sqrt{\xi})^{2k+1}}{\xi \Gamma(k+0,5)} = \\ &= -\frac{\text{Bi}}{\sqrt{\pi \xi}} - \text{Bi}^2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\text{Bi} \sqrt{\xi})^{2k+1}}{\Gamma(k+1,5)} = -\frac{\text{Bi}}{\sqrt{\pi \xi}} - \text{Bi}^2 e^{\text{Bi}^2 \xi} \text{erf}(\text{Bi} \sqrt{\xi}). \end{aligned} \quad (20)$$

Суммируя соотношения (19) и (20), находим

$$R(\xi) = -\text{Bi} / \sqrt{\pi \xi} + \text{Bi}^2 e^{\text{Bi}^2 \xi} \text{erfc}(\text{Bi} \sqrt{\xi}). \quad (21)$$

Вычислить аналитически интеграл в соотношении (17) с резольвентой (21) не удастся, поэтому используем асимптотические разложения резольвенты [17]

$$R(\xi) \simeq \tilde{R}(\xi) = -\text{Bi} / \sqrt{\pi \xi} + \text{Bi}^2 (1 - 2 \text{Bi} \xi / \pi + \text{Bi}^2 \xi), \quad \text{Bi} \sqrt{\xi} \ll 1; \quad (22)$$

$$R(\xi) \simeq \tilde{\tilde{R}}(\xi) = -1 / (2 \text{Bi} \xi \sqrt{\pi \xi}), \quad \text{Bi} \sqrt{\xi} \gg 1. \quad (23)$$

Для трибосистем типа колесо — рельс ширина полосы контакта $2a \approx 0,01$ м, коэффициент теплоотдачи $h = 0 \div 200$ Вт/(м²·К) [17]. Принимая значения теплофизических постоянных стали $K = 41$ Вт/(м·К), $k = 9,1 \cdot 10^{-6}$ м²/с, находим, что критерий Био изменяется в пределах $0 \leq \text{Bi} \leq 0,15 \cdot 10^{-2} / \sqrt{V_s}$. При поступательном движении колеса со скоростью $V \approx 75$ м/с и крипе $s = 1$ % согласно формуле (1) скорость скольжения $V_s \approx 0,75$ м/с. Следовательно, верхний предел изменения критерия Био не превышает 0,01. Численное исследование поведения резольвенты R показало, что абсолютная погрешность ее аппроксимации с помощью асимптотики (22) не превышает 1 % для значений аргумента $\xi - \tau \leq \text{Bi}^{-2}$.

Таким образом, интеграл в правой части соотношения (17) можно оценить, используя асимптотическое выражение (22) для \tilde{R} при $1 \leq \xi \leq 10^4$. В результате находим температуру части поверхности рельса за участком контакта

$$T^*(\xi) = \sqrt{\xi} - \sqrt{\xi - 1} - \text{Bi} \theta_1(\xi), \quad 1 < \xi < \infty, \quad (24)$$

где

$$\begin{aligned} \theta_1(\xi) &= (1/\sqrt{\pi}) [\sqrt{\xi - 1} - 0,5\pi(\xi - 1) + \xi \arcsin \sqrt{1 - 1/\xi}] - (2/3) \text{Bi} [\xi \sqrt{\xi - 1} - (\xi - 1) \sqrt{\xi - 1}] + \\ &+ [\text{Bi}^2 / (2\sqrt{\pi})] [(\xi - 2) \sqrt{\xi - 1} - 0,5\pi(\xi - 1)^2 + \xi^2 \arcsin \sqrt{1 - 1/\xi}] - \\ &- (2 \text{Bi}^3 / 15) [3 - 5\xi + 2\xi^2 \sqrt{\xi} - 2(\xi - 1)^2 \sqrt{\xi - 1}]. \end{aligned} \quad (25)$$

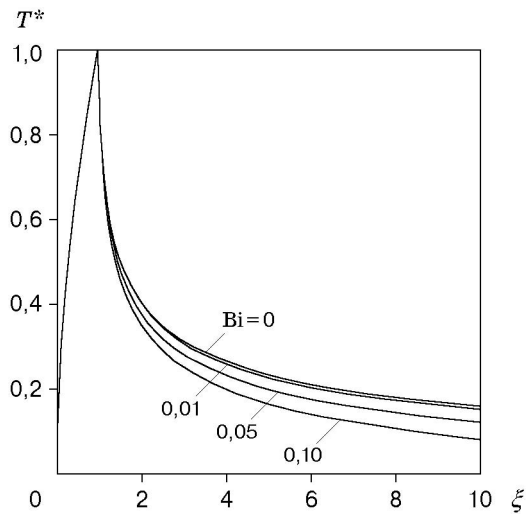


Рис. 2

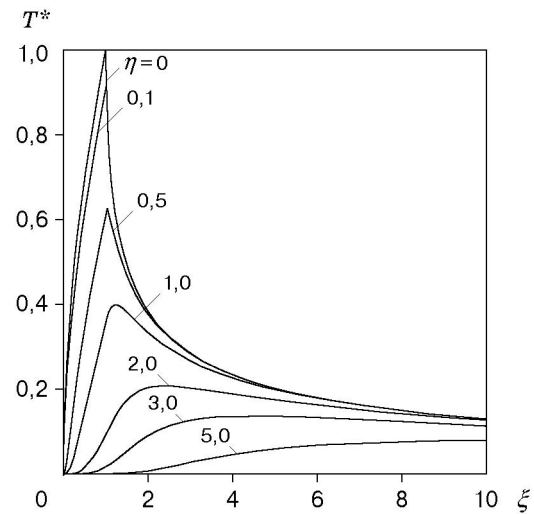


Рис. 3

Зная поверхностную температуру (24), (25), температурное поле в произвольной точке рельса за участком контакта находим из соотношения

$$T(\xi, \eta) = \theta(\xi, \eta) - \theta(\xi - 1, \eta) - \frac{\text{Bi}}{\sqrt{\pi\delta\lambda}} \sum_{j=0}^m T_j^* G_j(\xi, \eta), \quad \xi > 1, \quad \eta > 0, \quad (26)$$

где функции θ и G_j имеют вид (15) и (10) соответственно.

4. Численный анализ и выводы. Вычисления проводились для безразмерной температуры T^* . Безразмерными входными параметрами являются координаты ξ , η , критерий Био Bi , а также количество n , m точек разбиения интервалов $[0; b]$ и $[1; \xi]$ соответственно. Параметры n , m выбирались из условия достижения заданной точности вычислений.

Сначала исследуем случай равномерного распределения контактного давления (6). Расчеты по формулам (14), (15), (24)–(26) показали, что температура за участком контакта уменьшается с увеличением Bi (рис. 2). Температура в области нагревания не зависит от критерия Био, и ее максимальное значение достигается в точке $\xi = 1$ на поверхности рельса, разделяющей области нагревания и охлаждения.

При $\text{Bi} = 0,05$ температура быстро уменьшается с удалением от поверхности рельса (рис. 3). Наиболее стремительно этот процесс происходит под зоной нагревания $0 \leq \xi \leq 1$. При тепловом расчете узлов трения важной характеристикой является эффективная глубина прогревания [18] — расстояние от поверхности скольжения, на котором температура составляет 5 % максимальной поверхностной температуры. Для сечений $\xi = 1, 2, 5$ эффективная глубина равна $3d, 5d$ и $7d$ соответственно, т. е. увеличивается с удалением от области нагревания.

Наиболее часто в инженерных расчетах используется эллиптическое распределение (распределение Герца) контактного давления [11]

$$p(x) = p_0 p^*(x), \quad p^*(x) = \sqrt{1 - ((x - a)/a)^2}, \quad 0 \leq x \leq 2a. \quad (27)$$

На рис. 4 приведена зависимость $T^*(\xi)$ при $\text{Bi} = 0,01$ (сплошные кривые — расчет с использованием эллиптического распределения контактного давления, штриховые — с использованием равномерного распределения контактного давления). Вычисления по формулам (12), (13) показали, что существенное различие распределений температуры при использовании соотношений (6) и (27) наблюдается только в области контакта. За этой

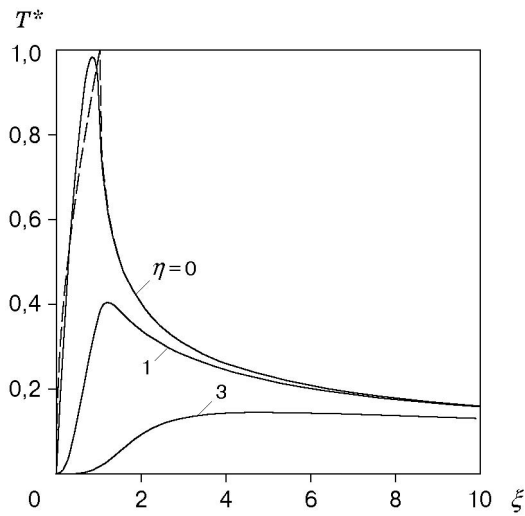


Рис. 4

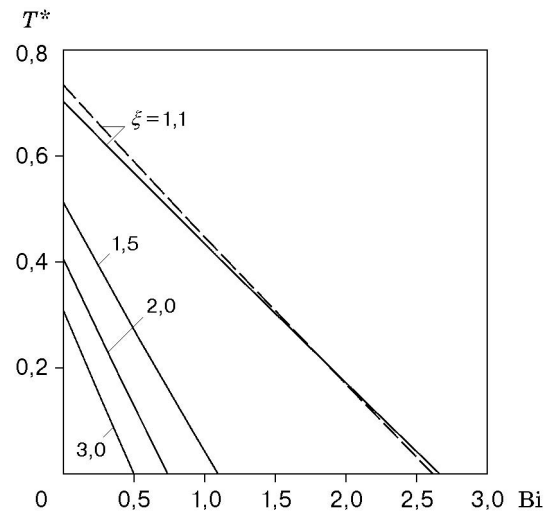


Рис. 5

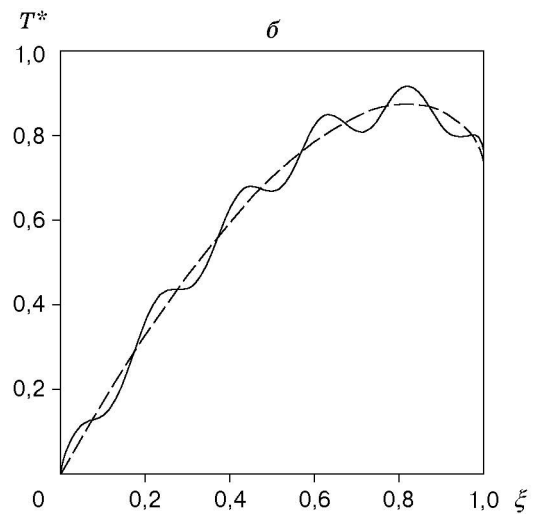
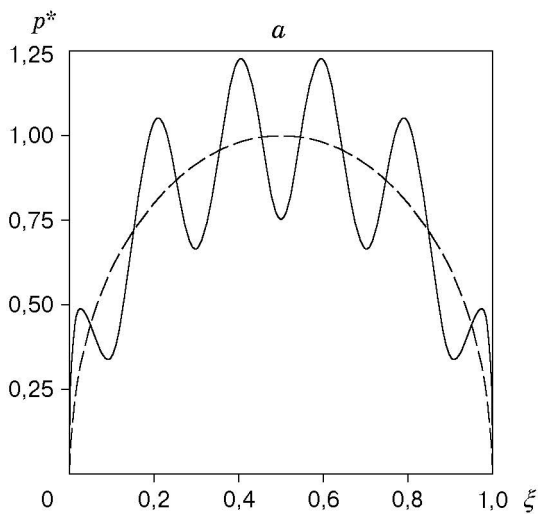


Рис. 6

областью соответствующие температуры практически равны. Следовательно, для расчета поверхностной температуры рельса за область нагрева при эллиптическом распределении контактного давления (27) можно использовать аналитическое решение (24), (25), полученное в случае равномерного распределения давления (6).

Зависимость поверхностной температуры рельса T^* от критерия Био линейна (рис. 5). Незначительное различие зависимостей $T^*(Bi)$ при постоянном (6) (штриховая линия) и эллиптическом (27) (сплошные линии) распределениях контактного давления имеет место только в непосредственной близости ($1,0 \leq \xi \leq 1,1$) от области контакта.

Изучено также влияние шероховатости поверхности рельса на поверхностную температуру. Распределения контактного давления, а следовательно, и интенсивности фрикционного теплового потока брались в виде суперпозиции эллиптического и осциллирующего давлений:

$$p(x) = p_0[\sqrt{1 - ((x - a)/a)^2} - (1/4) \cos(5\pi(x - a)/a)], \quad 0 \leq x \leq 2a. \quad (28)$$

На рис. 6, а, б показаны распределения безразмерных эллиптического (27) (штриховая кривая) и осциллирующего (28) (сплошная кривая) давлений и соответствующих им без-

размерных поверхностных температур. Следует отметить, что если максимальные значения контактных давлений для указанных распределений различаются примерно на 25 %, то соответствующие максимальные температуры — лишь на 6 %. Следовательно, шероховатость поверхности рельса в основном влияет на контактное давление и в меньшей степени — на поверхностную температуру.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Боуден Ф. П., Тейбор Д.** Температура поверхности трущихся тел // Трение и граничная смазка. М., 1953. С. 231–254.
2. **Harrison D.** Corrugation of railway rails: Ph. D. thesis. Cambridge, 1979.
3. **Archard J. F.** The temperature rise of rubbing surfaces // Wear. 1958/59. V. 2, N 6. P. 438–455.
4. **Jaeger J. C.** Moving sources of heat and the temperature of sliding contacts // Proc. Roy. Soc. New South Wales. 1942. V. 76, pt 3. P. 203–224.
5. **Ling F. F., Mow V. C.** Surface displacements of a convective half-space under an arbitrarily distributed fast-moving heat source // Trans. ASME. J. Basis Engng. 1965. V. 87, N 3. P. 729–734.
6. **Tanvir M. A.** Temperature rise due to slip between wheel and rail. An analytical solution for Hertzian contact // Wear. 1980. V. 61, N 1/2. P. 295–308.
7. **Knothe K., Liebelt S.** Determination of temperatures for sliding contact with applications for wheel-rail systems // Wear. 1995. V. 189, N 1/2. P. 91–99.
8. **Евтушенко А. А., Семерак В. М.** Определение температуры при скольжении колеса по рельсу // Трение и износ. 1999. Т. 20, № 6. С. 588–594.
9. **Переверзева О. В., Балакин В. А.** Распределение теплоты между трущимися телами // Трение и износ. 1992. Т. 13, № 3. С. 507–516.
10. **Mow V. C., Cheng H. S.** Thermal stresses in an elastic half-space associated with an arbitrarily distributed moving heat sources // Z. angew. Math. Phys. 1967. Bd 18, N 4. S. 500–507.
11. **Джонсон К.** Механика контактного взаимодействия. М.: Мир, 1989.
12. **Yevtushenko A. A., Pauk V. J.** The plane transient contact problem for rough sliding bodies with wear and heat generation // Wear. 1994. V. 173, N 1. P. 39–50.
13. **Марчук Г. И., Агошков В. И.** Введение в проекционно-сеточные методы. М.: Наука, 1981.
14. **Крагельский И. В., Добычин М. М., Комбалов В. С.** Основы расчетов на трение и износ. М.: Машиностроение, 1977.
15. **Смирнов В. И.** Курс высшей математики. М.: Наука, 1967.
16. **Градштейн И. С., Рыжик И. М.** Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Наука, 1971.
17. **Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами** / Под ред. М. Абрамовица, И. Стиган. М.: Наука, 1979.
18. **Чичинадзе А. В., Браун Э. Д., Гинсбург А. Г., Игнатьева З. В.** Расчет, испытание и подбор фрикционных пар. М.: Наука, 1979.

Поступила в редакцию 6/III 2002 г.