

**О РЕШЕНИИ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ
МЕТОДОМ ДЕКОМПОЗИЦИИ РАСЧЕТНОЙ ОБЛАСТИ
БЕЗ ПЕРЕСЕЧЕНИЯ ПОДОБЛАСТЕЙ*****В. М. Свешников***Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН,**г. Новосибирск**E-mail: victor@lapasrv.ssc.ru*

Предложен новый подход к методу итераций по подобластям, сопрягаемым без наложения, причем на границе сопряжения ставится условие Дирихле на всех итерациях по подобластям. Сходимость предложенного подхода исследуется численно на примере решения модельной задачи.

Введение. Метод итераций по подобластям служит средством нахождения решения краевых задач математической физики при декомпозиции расчетной области G на ряд подобластей G_K ($K = 1, N_G$), где N_G – заданное число, что оказывается полезным при расчетах в геометрически сложных областях, а также при распараллеливании решения краевых задач. Более естественным образом область G разделяется на подобласти G_K без наложения в отличие от классического альтернирующего метода Шварца [1], где сопряжение происходит с наложением подобластей.

Итерационные методы по подобластям без наложения рассматривались в [2–5] (см. также библиографию в этих работах). Характерным для большинства работ является то, что в процессе проведения итераций для получения решения краевой задачи в подобластях на границе их сопряжений ставится условие, содержащее нормальную производную от искомой функции.

В данной работе предлагается новый подход к построению итераций по подобластям, сопрягаемым без наложения, который заключается в решении операторного уравнения, содержащего разность нормальных производных на границе сопряжения. При этом на границе ставится условие Дирихле для искомой функции. Другим полезным свойством этого подхода является одновременное решение краевых задач в подобластях, что дает возможность параллельной реализации алгоритма.

* Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 05-01-00487).

Отметим еще одну важную особенность такого подхода. Для получения решения в подобластях могут быть построены адаптивные структурированные сетки, а в целом в расчетной области – адаптивная квазиструктурированная сетка [6], причем сетки в отдельных подобластях могут быть несогласованными.

Приводятся результаты численных экспериментов, свидетельствующие о сходимости предложенного итерационного процесса по подобластям.

Постановка задачи и описание алгоритма. Пусть требуется найти функцию $\varphi(T)$, являющуюся решением краевой задачи

$$L\varphi(T) = g(T), \quad T \in G; \quad l\varphi(T)|_{\Gamma} = 0, \quad (1)$$

где G – расчетная область; Γ – ее граница ($G \cup \Gamma = \overline{G}$); L – эллиптический дифференциальный оператор; l – оператор граничных условий; T – точка наблюдения. Рассматривается двумерная область G , но изложенный далее алгоритм без принципиальных изменений переносится и на трехмерный случай. Будем предполагать существование и единственность достаточно гладкого решения задачи (1).

Разобьем область G на заданное число N_G подобластей G_K ($K = \overline{1, N_G}$) и обозначим через $\Gamma_{n,m}$ ($n \neq m, n, m = \overline{1, N_G}$) границу сопряжения подобластей G_n и G_m (см. рисунок), причем полагаем $\Gamma_{n,m} = \Gamma_{m,n}$. Пусть Λ – множество пар индексов n, m , которые определяют неповторяющиеся непустые множества $\Gamma_{n,m}$ (например, на рисунке $\Gamma_{2,4}$ является пустым множеством). В данной работе будем рассматривать только $\Gamma_{n,m}$ ($n, m \in \Lambda$). Пусть $P_{\overline{K}}$ ($\overline{K} = \overline{1, N_P}$) – точки пересечения границ $\Gamma_{n,m}$ (макроузлы), где N_P – число макроузлов, а $\Gamma_G = \bigcup_{n,m \in \Lambda} \Gamma_{n,m}$ – объединение этих границ. Тогда справедливо равенство

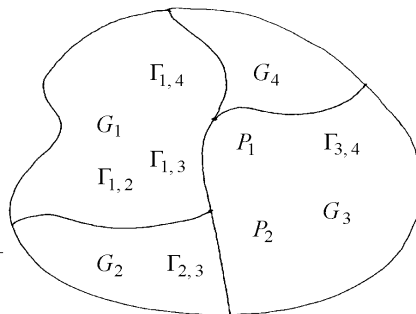
$$G = \bigcup_{K=1}^{N_G} G_K \bigcup_{\overline{K}=1}^{N_P} P_{\overline{K}} \cup \Gamma_G.$$

Запишем условия сопряжения на границе $\Gamma_{n,m}$ в виде

$$(\varphi)_n = (\varphi)_m, \quad (2)$$

$$(\partial\varphi/\partial\mathbf{n})_n = (\partial\varphi/\partial\mathbf{n})_m, \quad (3)$$

где \mathbf{n} – нормаль к $\Gamma_{n,m}$, а величины в скобках относятся к подобластям G_n и G_m соответственно. Направление нормали в данном случае не важно, но для определенности полагаем, что \mathbf{n} – это внутренняя нормаль по отношению к G_n . Условия (2), (3) должны выполняться при решении исходной задачи в G . Если же на $\Gamma_{n,m}$ задана произвольная функция $w_{n,m}$, то условие (2) выполняется, а условие (3) нет. Производные в



Декомпозиция расчетной области

формуле (3) являются функциями, зависящими от $w_{n,m}$. Введем обозначения

$$f_n(w_{n,m}) = \left(\frac{\partial \varphi(w_{n,m})}{\partial \mathbf{n}} \right)_n; \quad f_m(w_{n,m}) = \left(\frac{\partial \varphi(w_{n,m})}{\partial \mathbf{n}} \right)_m. \quad (4)$$

Сформулируем исходную задачу по отысканию функции φ , являющейся решением краевой задачи (1), следующим образом: для каждого $n, m \in \Lambda$ найти такую функцию $w_{n,m}$, которая обеспечила бы выполнение условия (3). Это требование эквивалентно решению операторного уравнения

$$F_{n,m} w_{n,m} \equiv f_n(w_{n,m}) - f_m(w_{n,m}) = 0, \quad (5)$$

где $F_{n,m}: W_{n,m} \rightarrow W_{n,m}$ – оператор, действующий в пространстве $W_{n,m}$ функций, определенных на $\Gamma_{n,m}$.

Уравнение (5) будем решать приближенно. Для этого построим на $\Gamma_{n,m}$ сетку $\omega_{n,m} = \{T_{n,m}^k \in \Gamma_{n,m}, k = \overline{1, M_{n,m}}\}$ с шагами $h_{n,m}^k = s(T_{n,m}^{k+1}) - s(T_{n,m}^k) > 0$, $k = \overline{0, M_{n,m}}$, где $M_{n,m}$ – заданное целое число, а $s(T_{n,m}^k)$ – длина отрезка $[T_{n,m}^0, T_{n,m}^k]$ границы $\Gamma_{n,m}$, отсчитываемая от точки $T_{n,m}^0$. Отметим, что концевые точки границы $T_{n,m}^0, T_{n,m}^{M_{n,m}+1}$ не являются узлами сетки $\omega_{n,m}$. Пусть $U_{n,m}$ – пространство сеточных функций (векторов), определенных на $\omega_{n,m}$, а $u_{n,m} = \{u_{n,m}^k \equiv u_{n,m}(T_{n,m}^k), k = \overline{1, M_{n,m}}\}$ – вектор пространства $U_{n,m}$.

Заменим задачу (5) отыскания функции $w_{n,m}$ непрерывного аргумента приближенной задачей нахождения функции $u_{n,m}$ дискретного аргумента путем решения операторных уравнений

$$\Phi_{n,m} u_{n,m} \equiv \tilde{f}_n - \tilde{f}_m = 0, \quad n, m \in \Lambda. \quad (6)$$

Здесь $\Phi_{n,m}: U_{n,m} \rightarrow U_{n,m}$ – оператор; $\tilde{f}_\xi = \{\tilde{f}_\xi^k\} \in U_{n,m}$, где

$$\tilde{f}_\xi^k = \left(\frac{\partial \tilde{\varphi}(u_{n,m})}{\partial \mathbf{n}} \right)_\xi^k, \quad \xi = n, m, \quad k = \overline{1, M_{n,m}}, \quad (7)$$

а $\tilde{\varphi}$ – решение приближенной задачи во всей области G . Тем самым мы требуем выполнения условий (2), (3) не во всех точках $T \in \Gamma_{n,m}$, а лишь в точках $T_{n,m}^k \in \omega_{n,m}$. Рассмотрим сетку $\omega = \bigcup_{n,m \in \Lambda} \omega_{n,m}$, определенную на ней функцию

$u = \bigcup_{n,m \in \Lambda} u_{n,m}$, а также оператор $\Phi = \bigcup_{n,m \in \Lambda} \Phi_{n,m}$, действующий в пространстве

$U = \bigcup_{n,m \in \Lambda} U_{n,m}$. Введем единую нумерацию $k = \overline{1, M}$, где $M = \sum_{n,m \in \Lambda} M_{n,m}$, для

всех узлов T_k сетки ω и компонент u_k вектора u . Тогда уравнения (6) можно представить в виде системы операторных уравнений относительно вектора u , определенного в узлах сетки ω :

$$\Phi u \equiv \Phi(u) = 0, \quad (8)$$

где $\Phi(u) = \{\Phi_k \equiv \Phi_k(u), k = \overline{1, M}\}$ – вектор-функция. Решение системы уравнений (8) дает значения искомой функции, удовлетворяющие в точках T_k условиям (2), (3), в которых точное решение φ следует заменить приближенным решением $\tilde{\varphi}$.

Решение системы операторных уравнений. Систему уравнений (8) будем решать методом простой итерации вида

$$u^{v+1/2} = u^v + \tau_v \alpha \Phi^v, \quad (9)$$

$$u^{v+1} = \begin{cases} u^{v+1/2}, & \text{если } \|\Phi^{v+1/2}\| < \|\Phi^v\|, \\ u^v, & \text{если } \|\Phi^{v+1/2}\| \geq \|\Phi^v\|. \end{cases} \quad (10)$$

Здесь $v=0, 1, \dots$ – номер итерации; $\Phi^v = \{\Phi_k^v\} \in U$ – вектор, содержащий значения Φ_k ($k = \overline{1, M}$) на v -й итерации; $\|\cdot\|$ – какая-либо норма в пространстве U векторов, определенных на ω ; α и τ_v – числовые параметры, которые введены из следующих соображений. Параметр α служит средством согласования размерностей в равенстве (9): $\alpha = \bar{u} / \|\Phi^0\|$, где $\bar{u} \neq 0$ – характерное значение u_k . Параметр τ_v управляет сходимостью рассматриваемого итерационного процесса и вычисляется как

$$\tau_{v+1} = \begin{cases} \tau_v, & \text{если } \|\Phi^{v+1/2}\| < \|\Phi^v\|, \\ (1/2)\tau_v, & \text{если } \|\Phi^{v+1/2}\| \geq \|\Phi^v\|, \end{cases} \quad (11)$$

где τ_0 задано. Итерационный процесс (9)–(11) прекращается при выполнении хотя бы одного из двух условий:

$$\|\Phi^v\| / \|\Phi^0\| \leq \varepsilon; \quad \tau_n \leq \varepsilon, \quad (12)$$

где ε – заданная малая величина.

На каждом шаге итерационного процесса (9)–(11) имеем вектор $u^v = \{u_k^v, k = \overline{1, M}\}$ в узлах T_k сетки ω . Построим по этим значениям приближающую функцию $Z^v(u^v, T)$, которая дает значения функции $w^v(T)$ в любой точке границы сопряжения подобластей Γ_G , т. е.

$$w^v(T) = Z^v(u^v, T), \quad T \in \Gamma_G. \quad (13)$$

Значения $w^v(T)$ будем использовать в качестве граничных условий при решении краевых задач, которое необходимо проводить на каждом v -м шаге итерационного процесса (9)–(11):

$$L\tilde{\varphi}^v(T) = g(T), \quad T \in G_K; \quad l_K \tilde{\varphi}^v(T) \Big|_{\Gamma_K} = 0, \quad (14)$$

где Γ_K – граница подобласти G_K ; l_K ($K = \overline{1, N_G}$) – оператор граничных условий, которые будут определены далее. Граница каждой подобласти G_K имеет непустое пересечение $\Gamma'_K = \Gamma_K \cap \Gamma_{n,m}$ с границами подобластей $\Gamma_{n,m}$ и может иметь непустое пересечение $\Gamma''_K = \Gamma_K \cap \Gamma$ с границей Γ ($\Gamma_K = \Gamma'_K \cup \Gamma''_K$). Тогда

$$l_K \tilde{\varphi}^v(T) = \begin{cases} l \tilde{\varphi}^v(T) & \text{при } T \in \Gamma''_K, \\ \tilde{\varphi}^v(T) - w^v(T) & \text{при } T \in \Gamma'_K. \end{cases} \quad (15)$$

Численные эксперименты проводились, чтобы показать сходимость итерационного процесса (9)–(11) на примере решения тестовой задачи Дирихле для уравнения Лапласа $\Delta \varphi = 0$, $\varphi|_{\Gamma} = 1$ в квадрате $G = \{0 < x < 1, 0 < y < 1\}$ с границей Γ . Расчетная область покрывалась квадратной сеткой $\Omega = \{x = x_i, y = y_j, i, j = \overline{1, N_{\Omega} - 1}\}$ с шагом $h = 1/N_{\Omega}$ и разбивалась линиями $x = X_I, y = Y_J$ ($I = \overline{1, N_x - 1}, J = \overline{1, N_y - 1}$), совпадающими с линиями сетки Ω , на $N_G = N_x N_y$ прямоугольных подобластей G_K , где $N_{\Omega}, N_x, N_y > 1$ заданы и представляют собой число интервалов сетки Ω в одном направлении и числа подобластей по x, y соответственно.

Сетка Ω разбивалась на подсетки Ω_K так, чтобы узлы Ω_K лежали в подобласти G_K . Узлы сетки Ω , расположенные на границе сопряжения подобластей Γ_G , образуют сетку ω , которую при таком способе построения назовем согласованной с сеткой Ω .

На сетках Ω_K задачи (14), (15) аппроксимировались системой пятиточечных разностных уравнений [7]. Так как значения функции w^v необходимы для численных расчетов только в точках T_k , достаточно в (13) в качестве приближающей функции положить $w^v(T_k) = u_k^v$. Полученную систему алгебраических уравнений запишем в матричном виде:

$$A_K z_K = b_K, \quad K = \overline{1, N_G}. \quad (16)$$

Здесь A_K – квадратная матрица коэффициентов уравнений порядка $((N_{\Omega}/N_x) - 1) \times ((N_{\Omega}/N_y) - 1)$; z_K – искомый вектор, компоненты которого представляют собой приближенное сеточное решение задачи (14), (15) в узлах Ω_K ; b_K – известный на каждом шаге итерационного процесса (9)–(11) вектор правой части (верхний индекс v опускаем).

Решение каждой системы (16) осуществлялось неявным методом Писмана – Речфорда, который на каждой μ -й итерации ($\mu = 1, 2, \dots$) требует выполнения двух полушагов:

$$\begin{aligned} z_K^{\mu - 1/2} &= z_K^{\mu - 1} - \theta (A_{K,x} z_K^{\mu - 1/2} + A_{K,y} z_K^{\mu - 1} - b_K); \\ z_K^{\mu} &= z_K^{\mu - 1/2} - \theta (A_{K,x} z_K^{\mu - 1/2} + A_{K,y} z_K^{\mu} - b_K), \end{aligned} \quad (17)$$

где θ – заданный числовой параметр; $A_{K,x}, A_{K,y}$ – трехдиагональные матрицы, отвечающие за аппроксимацию краевой задачи по x и y [7]. Итерационный процесс (17) проводился до тех пор, пока не выполнялось неравенство

$\|z_K^\mu - z_K^{\mu-1}\| \leq \varepsilon_1$, где ε_1 задано. Подчеркнем, что на каждом приближении (9)–(11) проводились итерации (17) до сходимости с точностью ε_1 , т. е. они являлись внутренними по отношению к внешним итерациям (9)–(11).

Нормальные производные в формуле (7) аппроксимировались при помощи разностных соотношений второго порядка точности. В качестве нормы взята величина $\|a\| = 1/N \left(\sum_1^N a_i^2 \right)^{1/2}$, где $a = \{a_i, i = \overline{1, N}\}$ – вектор.

Численные эксперименты проводились на различных квадратных сетках Ω с числом узлов в одном направлении $N_\Omega = 32$ и $N_\Omega = 64$ и с параметрами разбиения на подобласти $N_x, N_y = 1, 2, 4, 8$. Внешние итерации прекращались при достижении точности $\varepsilon = 10^{-3}$, а внутренние итерации – при достижении более высокой точности $\varepsilon_1 = 10^{-6}$. Отметим, что увеличение ε_1 , т. е. стремление приблизить его к ε , приводило к непредсказуемым ошибкам в численном расчете нормальных производных (7) и, как следствие, к «разбалтыванию» итерационного процесса (9)–(11), поэтому данное значение ε_1 является пороговым. При вычислении параметра α в (9) полагалось $\bar{u} = 1$. В табл. 1 приведено число итераций внешнего процесса (9)–(11), которое потребовалось для достижения заданной точности, а в табл. 2 – времена t расчетов на персональном компьютере с процессором Intel Celeron, 1700 МГц. Параметр θ в (17) подбирался экспериментально приблизительно оптимальным, его некоторые значения приведены в табл. 2. Эксперименты показали, что во всех случаях внешний итерационный процесс (9)–(11) сходился при выполнении первого неравенства (12), т. е. при уменьшении нормы невязки до заданной величины.

Исходя из таблиц можно сделать следующие выводы.

1. Число итераций возрастает с увеличением числа узлов N_Ω сетки Ω , так как при этом увеличивается M – число узлов сетки ω , что означает увеличение числа точек, в которых требуется достичь выполнения условий (2), (3), т. е. повышение точности решения приближенной задачи.

2. При постоянных N_Ω число итераций возрастает с увеличением числа подобластей $N_G = N_x N_y$, а при постоянных N_Ω, N_G и различных значениях N_x и N_y остается величиной одного порядка, что также связано с величиной M .

3. Видно, что для случая $N_{x,y} = N_x = N_y$ времена расчетов при возрастании числа подобластей $N_G = N_{x,y}^2$ падают.

Это можно объяснить тем, что число операций Q_K , необходимое для получения решения системы уравнений (16) с точностью ε_1 , асимптотически равно $Q_K = N_K^2 q(|\ln \varepsilon_1|/R)$, где $N_K = N_\Omega / N_{x,y}$ – число узлов Ω_K в одном направлении, q – количество операций внутреннего итерационного процесса (17) в расчете на один узел и за одну итерацию, а $R = - \lim_{\mu \rightarrow \infty} (1/\mu) \frac{\|\delta^\mu\|}{\|\delta^0\|}$ – его

Т а б л и ц а 1

N_G	$N_x \times N_y$	$N_\Omega \times N_\Omega$	
		32 × 32	64 × 64
2	1 × 2	45	72
	2 × 2	78	145
4	1 × 4	60	110
	2 × 4	108	174
8	1 × 8	116	221
	4 × 4	130	249
16	2 × 8	128	245

Т а б л и ц а 2

N_G	$N_x \times N_y$	$N_\Omega \times N_\Omega$		
		64 × 64		
		v_e	θ	t, c
4	2 × 2	145	10,0	15
16	4 × 4	249	5,0	12
64	8 × 8	429	2,5	9

асимптотическая скорость сходимости [7] ($\delta^u = z - z^u$ – вектор ошибки). Тогда количество операций Q на одной внешней итерации (9)–(11) выражается следующим образом: $Q = N_\Omega^2 q (|\ln \varepsilon_1|/R)$. Здесь можно пренебречь дополнительными действиями, связанными с реализацией расчетов по формуле (9). В нашем случае $R = O(1/N_K)$. Если точность ε при проведении внешнего процесса (9)–(11) была достигнута за v_e итераций, то для этого потребовалось общее количество операций $Q_\Sigma = (N_\Omega^3/N_{x,y})v_e q |\ln \varepsilon_1|$. Таким образом, если число внешних итераций v_e при увеличении числа подобластей растет медленнее, чем $N_{x,y}$, как следует из табл. 2, то число Q_Σ и, следовательно, время счета уменьшаются.

Заключение. Отметим, что проведенные численные эксперименты показали сходимость предложенного подхода, но приведенный итерационный процесс требуется оптимизировать при помощи современных подходов [7], для чего необходимо исследовать свойства введенного оператора Φ .

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Годунов С. К. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1979.
2. Цвик Л. Б. Обобщение алгоритма Шварца на случай областей, сопрягаемых без налегания // ДАН СССР. 1975. 224, № 2. С. 309.
3. Смелов В. В., Журавлева Т. Б. Принцип итерирования по подобластям в задачах с эллиптическим уравнением. М., 1981. 11 с. (Препр. /АН СССР. ВИНТИ; 81-14).
4. Лебедев В. И., Агошков В. И. Операторы Пуанкаре – Стеклова и их приложение в анализе. М.: Отдел вычисл. матем. АН СССР, 1983.
5. Василевский Ю. В., Ильин В. П., Тыргышников Е. Е. Вычислительные технологии // Современные проблемы вычислительной математики и математического моделирования. Т. 1. Вычислительная математика. М.: Наука, 2005.
6. Ильин В. П., Свешников В. М., Сынах В. С. О сеточных технологиях для двумерных краевых задач // Сиб. журн. индустр. математики. 2000. 3, № 1. С. 124.
7. Ильин В. П. Методы конечных разностей и конечных объемов для эллиптических уравнений. Новосибирск: ИВМиМГ СО РАН, 2001.

Поступила в редакцию 14 ноября 2006 г.