

УДК 539.3

УСТОЙЧИВОСТЬ ДЕФОРМИРОВАНИЯ ИЗОТРОПНЫХ ГИПЕРУПРУГИХ ТЕЛ

В. Н. Солодовников

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 630090 Новосибирск

Формулируются уравнения связи между скоростями напряжений и скоростями деформаций и рассматриваются условия устойчивого деформирования изотропных гиперупругих тел. Представлены зависимости напряжений от деформаций при нагружении чистого сдвига, а также при одноосном и осесимметричном нагружении для материала с определяющей функцией, полученной обобщением определяющей функции закона Гука. При малых деформациях диаграммы практически совпадают с линейными, следующими из закона Гука. Ветвление решений и переход к падающим диаграммам начинаются при достижении больших напряжений порядка величин модуля сдвига, причем в одни и те же моменты независимо от значений констант материала.

1. Определение деформаций. В трехмерном евклидовом пространстве введем две взаимосвязанные (декартову и криволинейную) системы координат. Декартовы и криволинейные координаты материальных точек в их исходных положениях в начальный момент времени $\tau = 0$ обозначим через y^i, x^i , а в текущий момент времени τ — через \hat{y}^i, \hat{x}^i . Радиус-векторы точек, базисные векторы и метрический тензор криволинейной системы координат изменяются от $\mathbf{R} = y^i \mathbf{k}_i, \mathbf{l}_i = \mathbf{R}_{,x^i} = y^n_{,x^i} \mathbf{k}_n, g_{ij} = \mathbf{l}_i \cdot \mathbf{l}_j$ в момент $\tau = 0$ до $\hat{\mathbf{R}} = \hat{y}^i \mathbf{k}_i, \hat{\mathbf{l}}_i = \hat{\mathbf{R}}_{,\hat{x}^i} = \hat{y}^n_{,\hat{x}^i} \mathbf{k}_n, \hat{g}_{ij} = \hat{\mathbf{l}}_i \cdot \hat{\mathbf{l}}_j$ в момент τ (\mathbf{k}_i — базисные векторы декартовой системы координат). Векторы смещений точек есть $\mathbf{u} = \hat{\mathbf{R}} - \mathbf{R} = w^i \mathbf{k}_i = u^i \mathbf{l}_i = \hat{u}^i \hat{\mathbf{l}}_i$, где $w^n = u^i y^n_{,x^i} = \hat{u}^i \hat{y}^n_{,\hat{x}^i}$. Определим также базисные векторы сопутствующих систем координат $\hat{\mathbf{R}}_{,x^i} = \mathbf{l}_i + u^n_{,i} \mathbf{l}_n, \mathbf{R}_{,\hat{x}^i} = \hat{\mathbf{l}}_i - \hat{u}^n_{,i} \hat{\mathbf{l}}_n$. Здесь и в дальнейшем индексы i, j, m, n принимают значения 1, 2, 3; по повторяющимся индексам проводится суммирование от 1 до 3. Переменные в нижнем индексе после запятой обозначают частное дифференцирование; индексы i после запятой или точки с запятой обозначают ковариантное дифференцирование по x^i и \hat{x}^i соответственно. Ковариантное дифференцирование по x^i и \hat{x}^i выполняется в одной и той же криволинейной системе координат, но с разложением дифференцируемых векторов и тензоров по разным базисным векторам \mathbf{l}_i и $\hat{\mathbf{l}}_i$.

Введем тензоры деформаций Грина и Альманси $e = e_{ij} \mathbf{l}^i \mathbf{l}^j, \hat{e} = \hat{e}_{ij} \hat{\mathbf{l}}^i \hat{\mathbf{l}}^j$, где

$$\begin{aligned} e_{ij} &= (\hat{g}_{mn} \hat{x}^m_{,x^i} \hat{x}^n_{,x^j} - g_{ij})/2 = (u_{i,j} + u_{j,i} + u^n_{,i} u_{n,j})/2, \\ \hat{e}_{ij} &= (\hat{g}_{ij} - g_{mn} x^m_{,\hat{x}^i} x^n_{,\hat{x}^j})/2 = (\hat{u}_{i;j} + \hat{u}_{j;i} - \hat{u}^n_{,i} \hat{u}_{n;j})/2, \end{aligned} \quad (1.1)$$

представляющие деформацию в текущий момент времени в одной и той же материальной точке и связанные равенствами $\hat{e}_{mn} = e_{ij} x^i_{,\hat{x}^m} x^j_{,\hat{x}^n}, e_{ij} = \hat{e}_{mn} \hat{x}^m_{,x^i} \hat{x}^n_{,x^j}$. Для определения

объемной деформации $\varepsilon_V = J - 1$ используем выражения якобиана преобразования декартовых координат материальных точек от исходных к текущим J через компоненты тензоров деформаций [1]

$$J = (\det G)^{-1/2} [\det (G + 2E)]^{1/2} = (\det \hat{G})^{1/2} [\det (\hat{G} - 2\hat{E})]^{-1/2}, \quad (1.2)$$

где $E = \|e_{ij}\|$, $\hat{E} = \|\hat{e}_{ij}\|$, $G = \|g_{ij}\|$, $\hat{G} = \|\hat{g}_{ij}\|$ — матрицы, составленные из ковариантных компонент тензоров деформаций и метрических тензоров (i, j — номера строк и столбцов).

Скорости деформаций определяются двумя тензорами $\eta = \eta_{ij} \mathbf{l}^i \mathbf{l}^j$, $\hat{\eta} = \hat{\eta}_{ij} \hat{\mathbf{l}}^i \hat{\mathbf{l}}^j$ с компонентами $\eta_{ij} = (v_{i,j} + v_{j,i} + u_{,i}^n v_{n,j} + u_{,j}^n v_{n,i})/2$, $\hat{\eta}_{ij} = (\hat{v}_{i,j} + \hat{v}_{j,i})/2$, связанными соотношениями

$$\hat{\eta}_{mn} = \eta_{ij} x_{,\hat{x}^m}^i x_{,\hat{x}^n}^j, \quad \eta_{ij} = \hat{\eta}_{mn} \hat{x}_{,x^i}^m \hat{x}_{,x^j}^n. \quad (1.3)$$

Тензор $\eta = \dot{e}$ есть скорость изменения тензора деформаций Грина; $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{u}} = \dot{w}^i \mathbf{k}_i = v^i \mathbf{l}_i = \hat{v}^i \hat{\mathbf{l}}_i$; $\dot{J} = J \hat{\eta}_i^i$ (точка обозначает дифференцирование по времени τ). Движение окрестности материальной точки в каждый момент времени складывается из деформирования, переноса со скоростью \mathbf{v} и вращения как неизменяемого целого с вектором угловой скорости $\boldsymbol{\omega} = \omega^i \mathbf{k}_i$, где $\omega^m = [(\mathbf{v}_{,\hat{y}^n} \cdot \mathbf{k}_l) - (\mathbf{v}_{,\hat{y}^l} \cdot \mathbf{k}_n)]/2 = (\dot{w}_{,\hat{y}^n}^l - \dot{w}_{,\hat{y}^l}^n)/2$ (m, n, l — четная перестановка индексов 1, 2, 3). Декартовы компоненты тензора $\hat{\eta} = \hat{\eta}_{ij}^{(d)} \mathbf{k}_i \mathbf{k}_j$ принимают значения $\hat{\eta}_{ij}^{(d)} = [(\dot{\mathbf{v}}_{,\hat{y}^i} \cdot \mathbf{k}_j) + (\mathbf{v}_{,\hat{y}^j} \cdot \mathbf{k}_i)]/2 = (\dot{w}_{,\hat{y}^i}^j + \dot{w}_{,\hat{y}^j}^i)/2$.

2. Главные кратности удлинений. Главные оси тензоров деформаций e , \hat{e} проходят вдоль одних и тех же материальных волокон, но взятых для e в исходных, а для \hat{e} в текущих положениях. Значения главных компонент этих тензоров e_i , \hat{e}_i связаны равенствами $1 + 2e_i = (1 - 2\hat{e}_i)^{-1}$ и изменяются в пределах $-0,5 < e_i < \infty$, $-\infty < \hat{e}_i < 0,5$.

Введем соосные с e , \hat{e} тензоры $\varepsilon = \varepsilon_{ij} \mathbf{l}^i \mathbf{l}^j$, $\hat{\varepsilon} = \hat{\varepsilon}_{ij} \hat{\mathbf{l}}^i \hat{\mathbf{l}}^j$, $\alpha = \alpha_{ij} \mathbf{l}^i \mathbf{l}^j$, $\hat{\alpha} = \hat{\alpha}_{ij} \hat{\mathbf{l}}^i \hat{\mathbf{l}}^j$. Ковариантные компоненты тензоров ε , $\hat{\varepsilon}$ принимают значения ковариантных компонент метрических тензоров сопутствующих систем координат $\varepsilon_{ij} = g_{ij} + 2e_{ij} = \hat{y}_{,x^i}^m \hat{y}_{,x^j}^m$, $\hat{\varepsilon}_{ij} = \hat{g}_{ij} - 2\hat{e}_{ij} = \hat{y}_{,\hat{x}^i}^m \hat{y}_{,\hat{x}^j}^m$. Контравариантные компоненты тензоров α , $\hat{\alpha}$ равны контравариантным компонентам метрических тензоров сопутствующих систем координат и компонентам матриц $(G + 2E)^{-1}$, $(\hat{G} - 2\hat{E})^{-1}$, т. е.

$$\alpha^{ij} = [(G + 2E)^{-1}]^{ij} = x_{,\hat{y}^m}^i x_{,\hat{y}^m}^j, \quad \hat{\alpha}^{ij} = [(\hat{G} - 2\hat{E})^{-1}]^{ij} = \hat{x}_{,\hat{y}^m}^i \hat{x}_{,\hat{y}^m}^j. \quad (2.1)$$

Главные компоненты данных тензоров ε_i , $\hat{\varepsilon}_i$, α_i , $\hat{\alpha}_i$ связаны равенствами $\varepsilon_i = 1 + 2e_i = \hat{\alpha}_i$, $\hat{\varepsilon}_i = 1 - 2\hat{e}_i = \alpha_i = \varepsilon_i^{-1}$. Для каждого элементарного материального волокна отношение квадратов длин в исходном и текущем состояниях $|d\hat{\mathbf{R}}|^2/|d\mathbf{R}|^2 = \varepsilon_{ij} dx^i dx^j / (g_{mn} dx^m dx^n)$ ($d\mathbf{R} = \mathbf{R}_{,x^i} dx^i$, $d\hat{\mathbf{R}} = \hat{\mathbf{R}}_{,\hat{x}^i} dx^i$). Это отношение принимает экстремальные значения, равные ε_i , для волокон, проходящих вдоль главных осей тензоров e , \hat{e} . Поэтому величины ε_i могут быть названы квадратами главных кратностей удлинений. В случае нулевой деформации волокна $\varepsilon_i = 1$, при неограниченном его укорочении $\varepsilon_i \rightarrow 0$, при неограниченном удлинении $\varepsilon_i \rightarrow \infty$.

3. Напряжения. Для изотропного гиперупругого тела напряжения определяются по имеющимся в текущий момент времени в рассматриваемой точке деформациям из уравнений [1]

$$\hat{\sigma}^{ij} = \hat{\mu}(\hat{\alpha}^{in} \hat{\alpha}_n^j - \hat{\chi} \hat{\alpha}^{ij}) + p \hat{g}^{ij}, \quad (3.1)$$

где $\hat{\sigma}^{ij}$ — контравариантные компоненты тензора напряжений Коши $\hat{\sigma} = \hat{\sigma}^{ij} \hat{\mathbf{l}}_i \hat{\mathbf{l}}_j$; $\hat{\mu} = \beta I_1^{-2} J^{-1}$; $\hat{\chi} = 2I_1(\Upsilon + 1/3)$; $\beta = \Psi_{,\Upsilon}$; $p = \hat{\sigma}_n^n/3 = \Psi_{,J}$ — гидростатическое давление; Ψ —

плотность энергии деформации, задаваемая для материалов функцией $\Psi = \Psi(\Upsilon, J)$. Инварианты тензоров деформаций представляются выражениями $\Upsilon = I_2 I_1^{-2}$, $I_1 = 3/2 + e_n^n = \hat{\alpha}_n^n/2$, $I_2 = e^{ij'} e'_{ij} = \hat{\alpha}^{ij'} \hat{\alpha}'_{ij}/4$ ($e^{ij'} = e^{ij} - e_n^n g^{ij}/3$, $\hat{\alpha}^{ij'} = \hat{\alpha}^{ij} - \hat{\alpha}_n^n \hat{g}^{ij}/3$) и выражениями (1.2) для якобиана J . Уравнения (3.1), формулируемые для второго, симметричного тензора напряжений Пиола — Кирхгофа $\sigma = \sigma^{ij} \mathbf{l}_i \mathbf{l}_j$, где

$$\sigma^{ij} = J \hat{\sigma}^{mn} x_{,\hat{x}^m}^i x_{,\hat{x}^n}^j, \quad \hat{\sigma}^{mn} = J^{-1} \sigma^{ij} \hat{x}_{,x^i}^m \hat{x}_{,x^j}^n, \quad (3.2)$$

принимают вид

$$\sigma^{ij} = \Psi_{,e_{ij}} = 2\mu(e^{ij'} - \chi g^{ij}) + \gamma \alpha^{ij}. \quad (3.3)$$

Здесь $\mu = \beta I_1^{-2}$; $\gamma = pJ$; $\chi = I_1 \Upsilon$. При малых деформациях уравнения (3.1), (3.3), линеаризуемые относительно деформаций, переходят в соотношения закона Гука $\sigma^{ij} = 2\mu_0 e^{ij'} + K e_n^n g^{ij}$ с двумя константами материала, модулем сдвига μ_0 и модулем объемного сжатия K , получаемыми в пределе $\mu \rightarrow \mu_0$, $p, J \rightarrow K$ при стремлении деформаций к нулю.

Перейдем в (3.1) к декартовой системе координат с координатными линиями, направленными вдоль главных осей тензоров \hat{e} , $\hat{\sigma}$. Для главных компонент напряжений $\hat{\sigma}_i$ получаем выражения

$$\hat{\sigma}_i = \hat{\mu} \varepsilon_i (\varepsilon_i - \hat{\chi}) + p, \quad (3.4)$$

в которых при определении $\hat{\mu}$, $\hat{\chi}$ и аргументов функции Ψ можно использовать представления

$$I_1 = \frac{1}{2} (\varepsilon_m + \varepsilon_n + \varepsilon_l), \quad J = (\varepsilon_m \varepsilon_n \varepsilon_l)^{1/2}, \quad \Upsilon = 2 \left(\frac{1}{3} - \frac{\varepsilon_m \varepsilon_n + \varepsilon_n \varepsilon_l + \varepsilon_l \varepsilon_m}{(\varepsilon_m + \varepsilon_n + \varepsilon_l)^2} \right)$$

(m, n, l — четная перестановка индексов 1, 2, 3). Так как $\varepsilon_i \geq 0$, величина Υ удовлетворяет неравенствам $0 \leq \Upsilon \leq 2/3$ и может рассматриваться как мера неодинаковости главных кратностей удлинений. В пространстве декартовых координат $\varepsilon_i \geq 0$ Υ равна одной трети квадрата тангенса угла наклона между лучом, выходящим из начала координат в данную точку ε_i , и лучом, вдоль которого $\varepsilon_m = \varepsilon_n = \varepsilon_l$. Значение $\Upsilon = 0$ при $\varepsilon_m = \varepsilon_n = \varepsilon_l$ и $\Upsilon = 2/3$ при $\varepsilon_m = \varepsilon_n = 0$.

Для изотропных гиперупругих материалов в качестве дополнительного условия можно принять, что в направлении главной оси с максимальным удлинением ε_i должно действовать максимальное напряжение $\hat{\sigma}_i$. Тогда в соответствии с (3.4) должно быть $\beta > 0$.

4. Изменение площадей элементарных материальных площадок и нормалей к ним. В недеформированном теле возьмем площадку в форме параллелограмма со смежными сторонами $d\mathbf{R}^{(1)} = \mathbf{R}_{,x^i} dx^{i(1)}$, $d\mathbf{R}^{(2)} = \mathbf{R}_{,x^i} dx^{i(2)}$ площади dS , единичный нормальный вектор к которой $\mathbf{N} = N_i \mathbf{l}^i$ определяется равенством

$$\mathbf{N} dS = d\mathbf{R}^{(1)} \times d\mathbf{R}^{(2)} = (\det G)^{1/2} c_{ijk} \mathbf{l}^k dx^{i(1)} dx^{j(2)},$$

где c_{ijk} — антисимметричный объект [2], принимающий значения 1, -1, если i, j, k — четная и нечетная перестановки индексов 1, 2, 3 соответственно, и значение 0 в остальных случаях. В текущий момент времени исходная площадка перейдет в площадку в форме параллелограмма со сторонами $d\hat{\mathbf{R}}^{(1)} = \hat{\mathbf{R}}_{,x^i} dx^{i(1)}$, $d\hat{\mathbf{R}}^{(2)} = \hat{\mathbf{R}}_{,x^i} dx^{i(2)}$ площади $d\hat{S}$ и единичным вектором нормали $\hat{\mathbf{N}} = \hat{N}_i \hat{\mathbf{l}}^i$, для которых

$$\hat{\mathbf{N}} d\hat{S} = d\hat{\mathbf{R}}^{(1)} \times d\hat{\mathbf{R}}^{(2)} = \det \hat{\Gamma} (\det \hat{G})^{1/2} c_{ijk} x_{,\hat{x}^m}^k \hat{\mathbf{l}}^m dx^{i(1)} dx^{j(2)}. \quad (4.1)$$

Определяя детерминант матрицы $\hat{\Gamma} = \|\hat{x}_{,x^j}^i\|$ из (1.1), (1.2): $\hat{\Gamma}^T \hat{G} \hat{\Gamma} = G + 2E$, $\det \hat{\Gamma} = J (\det \hat{G})^{-1/2} (\det G)^{1/2}$, находим [3]

$$\hat{N}_m d\hat{S} = J N_i x_{,\hat{x}^m}^i dS. \quad (4.2)$$

Возьмем теперь в момент τ другую площадку со смежными сторонами $d\hat{\mathbf{R}}^{(1)'} = \hat{\mathbf{R}}_{,\hat{x}i} d\hat{x}^{i(1)}$, $d\hat{\mathbf{R}}^{(2)'} = \hat{\mathbf{R}}_{,\hat{x}i} d\hat{x}^{i(2)}$ и ортогональным к площадке, равным по модулю ее площади вектором

$$\hat{\mathbf{N}} d\hat{S} = d\hat{\mathbf{R}}^{(1)'} \times d\hat{\mathbf{R}}^{(2)'} = (\det \hat{G})^{1/2} c_{ijk} \hat{\mathbf{l}}^k d\hat{x}^{i(1)} d\hat{x}^{j(2)}.$$

Здесь $d\hat{S}$, $\hat{\mathbf{N}}$ могут быть отличными от определяемых равенством (4.1). В момент времени $\tau + \Delta\tau$ стороны площадки займут положения $d\hat{\mathbf{R}}_{\tau+\Delta\tau}^{(1)'} = (\hat{\mathbf{R}} + \mathbf{v}\Delta\tau)_{,\hat{x}i} d\hat{x}^{i(1)}$, $d\hat{\mathbf{R}}_{\tau+\Delta\tau}^{(2)'} = (\hat{\mathbf{R}} + \mathbf{v}\Delta\tau)_{,\hat{x}i} d\hat{x}^{i(2)}$. Для вектора площадки получаем выражения $\hat{\mathbf{N}}_{\tau+\Delta\tau} d\hat{S}_{\tau+\Delta\tau} = d\hat{\mathbf{R}}_{\tau+\Delta\tau}^{(1)'} \times d\hat{\mathbf{R}}_{\tau+\Delta\tau}^{(2)'}$ $= [(1 + \hat{\eta}_m^m \Delta\tau)\hat{\mathbf{N}} - (\mathbf{v}_{,\hat{x}i} \cdot \hat{\mathbf{N}})\hat{\mathbf{l}}^i \Delta\tau] d\hat{S}$. Отсюда при $\Delta\tau \rightarrow 0$ находим скорости изменений площадей площадок и нормалей к ним

$$(d\hat{S})\dot{=} = (\hat{\eta}_m^m - \hat{\eta}_{ij} \hat{N}^i \hat{N}^j) d\hat{S}, \quad (\hat{\mathbf{N}})\dot{=} = (\hat{\eta}_{ij} \hat{N}^i \hat{N}^j) \hat{\mathbf{N}} - (\mathbf{v}_{,\hat{x}i} \cdot \hat{\mathbf{N}}) \hat{\mathbf{l}}^i. \quad (4.3)$$

Скорости поворотов нормалей $(\hat{\mathbf{N}})\dot{=}$ зависят от направления и скорости вращения окрестности материальной точки как неизменяемого целого.

5. Определение усилий. Векторы усилий, действующие на площадках, представляемых в начальный и текущий моменты времени векторами $\mathbf{N} dS$, $\hat{\mathbf{N}} d\hat{S}$, определяются по формулам

$$\hat{\mathbf{q}} d\hat{S} = \hat{\sigma}^{ij} \hat{N}_j \hat{\mathbf{R}}_{,\hat{x}i} d\hat{S} = \sigma^{ij} N_j \hat{\mathbf{R}}_{,\hat{x}i} dS, \quad (5.1)$$

где $\hat{\mathbf{q}}$ — плотность усилий на единицу площади площадки. На декартовых координатных площадках с нормальными $\mathbf{k}_m = \hat{y}_{,\hat{x}i}^m \hat{\mathbf{l}}^i = \hat{x}_{,\hat{y}m}^i \hat{\mathbf{l}}_i$ плотности усилий принимают значения $\hat{\mathbf{q}}^{(m)} = \hat{\sigma}^{ij} \hat{y}_{,\hat{x}j}^m \hat{\mathbf{R}}_{,\hat{x}i}$. Проекции приведенных векторов на нормали и касательные к указанным площадкам $\hat{\sigma}^{mn(d)} = \hat{\mathbf{q}}^{(m)} \cdot \mathbf{k}_n = \hat{\sigma}^{ij} \hat{y}_{,\hat{x}j}^m \hat{y}_{,\hat{x}i}^n = J^{-1} \sigma^{ij} \hat{y}_{,\hat{x}i}^m \hat{y}_{,\hat{x}j}^n$ являются физическими, истинными напряжениями, действующими на декартовых координатных площадках, т. е. декартовыми компонентами тензора напряжений $\hat{\sigma} = \hat{\sigma}^{mn(d)} \mathbf{k}_m \mathbf{k}_n$.

6. Скорости напряжений. Определим скорости напряжений с учетом вращения окрестности материальной точки как неизменяемого целого и поворотов площадок, на которых действуют рассматриваемые напряжения. Представим декартовы координатные площадки поворачивающимися в момент τ вместе с окрестностью точки с вектором угловой скорости $\boldsymbol{\omega} = \omega^i \mathbf{k}_i$. В момент времени $\tau + \Delta\tau$ площадки займут положения с нормальными

$$\hat{\mathbf{N}}_{\tau+\Delta\tau}^{(m)} = \mathbf{k}_m + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{k}_m \Delta\tau = \mathbf{k}_m + (\mathbf{k}_n \omega^l - \mathbf{k}_l \omega^n) \Delta\tau. \quad (6.1)$$

Здесь и ниже индекс m соответствует величинам, определяемым для площадки с нормалью \mathbf{k}_m ; слагаемыми порядка $(\Delta\tau)^2$ пренебрегается; m, n, l — четная перестановка индексов 1, 2, 3. Возьмем элементарные материальные площадки, имеющие в момент $\tau + \Delta\tau$ нормали $\hat{\mathbf{N}}_{\tau+\Delta\tau}^{(m)}$ и площади $d\hat{S}_{\tau+\Delta\tau}^{(m)}$. Подставляя $\hat{\mathbf{N}} = \mathbf{k}_m$ в (4.3), определяем $(d\hat{S})\dot{=}^{(m)} = (\hat{\eta}_i^i - \hat{\eta}_m^{(d)}) d\hat{S}^{(m)}$, $(\hat{\mathbf{N}})\dot{=}^{(m)} = \hat{\eta}_m^{(d)} \mathbf{k}_m - (\mathbf{v}_{,\hat{x}i} \cdot \mathbf{k}_m) \hat{\mathbf{l}}^i$, $\hat{\eta}_m^{(d)} = \hat{\eta}_{ij} \hat{x}_{,\hat{y}m}^i \hat{x}_{,\hat{y}m}^j$ (суммирование по m не проводится). Из равенств $d\hat{S}_{\tau+\Delta\tau}^{(m)} = d\hat{S}^{(m)} + (d\hat{S})\dot{=}^{(m)} \Delta\tau$, $\hat{\mathbf{N}}_{\tau+\Delta\tau}^{(m)} = \hat{\mathbf{N}}^{(m)} + (\hat{\mathbf{N}})\dot{=}^{(m)} \Delta\tau$ находим приближенные значения площадей и нормалей к площадкам в момент τ :

$$d\hat{S}^{(m)} = [1 - (\hat{\eta}_i^i - \hat{\eta}_m^{(d)}) \Delta\tau] d\hat{S}_{\tau+\Delta\tau}^{(m)}, \quad (6.2)$$

$$\hat{\mathbf{N}}^{(m)} = (1 - \hat{\eta}_m^{(d)} \Delta\tau) \mathbf{k}_m + [\mathbf{k}_n \omega^l - \mathbf{k}_l \omega^n + (\mathbf{v}_{,\hat{x}i} \cdot \mathbf{k}_m) \hat{\mathbf{l}}^i] \Delta\tau.$$

Согласно (4.2), (6.2) в момент $\tau = 0$ площадки имеют площади $dS^{(m)}$ и единичные нормальные векторы $\mathbf{N}^{(m)} = N_i^{(m)} \mathbf{l}^i$, где

$$N_i^{(m)} = \frac{d\hat{S}^{(m)}}{J dS^{(m)}} \{ (1 - \hat{\eta}_m^{(d)} \Delta\tau) \hat{y}_{,\hat{x}i}^m + [\omega^l \hat{y}_{,\hat{x}i}^n - \omega^n \hat{y}_{,\hat{x}i}^l + (\mathbf{v}_{,\hat{x}i} \cdot \mathbf{k}_m)] \Delta\tau \}. \quad (6.3)$$

Плотности усилий, определяемые согласно (5.1) для момента времени $\tau + \Delta\tau$ на площадках с нормальными (6.1):

$$\hat{\mathbf{q}}_{\tau+\Delta\tau}^{(m)} = (\sigma^{ij} + \dot{\sigma}^{ij} \Delta\tau)(\hat{\mathbf{R}} + \mathbf{v} \Delta\tau)_{,xi} N_j^{(m)} dS^{(m)} (d\hat{S}_{\tau+\Delta\tau}^{(m)})^{-1},$$

с учетом (6.2), (6.3) представляются равенствами

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{q}}_{\tau+\Delta\tau}^{(m)} = \{ & (1 - \hat{\eta}_k^k \Delta\tau) \hat{y}_{,xj}^m + [\omega^l \hat{y}_{,xj}^n - \omega^n \hat{y}_{,xj}^l + (\mathbf{v}_{,xj} \cdot \mathbf{k}_m)] \Delta\tau \} J^{-1} \sigma^{ij} \hat{\mathbf{R}}_{,xi} + \\ & + (\sigma^{ij} \mathbf{v}_{,xi} + \dot{\sigma}^{ij} \hat{\mathbf{R}}_{,xi}) J^{-1} \hat{y}_{,xj}^m \Delta\tau. \end{aligned}$$

С использованием декартовых компонент тензоров $\hat{\sigma}$ и

$$\hat{s} = J^{-1} \dot{\sigma}^{ij} \hat{\mathbf{R}}_{,xi} \hat{\mathbf{R}}_{,xj} = \hat{s}^{ij} \hat{\mathbf{l}}_i \hat{\mathbf{l}}_j = \hat{s}^{ij(d)} \mathbf{k}_i \mathbf{k}_j \quad (6.4)$$

для рассматриваемых плотностей усилий получаем выражения

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{q}}_{\tau+\Delta\tau}^{(m)} = (1 - \hat{\eta}_k^k \Delta\tau) \hat{\sigma}^{mi(d)} \mathbf{k}_i + [\omega^l \hat{\sigma}^{ni(d)} - \omega^n \hat{\sigma}^{li(d)} + (\mathbf{v}_{,ij} \cdot \mathbf{k}_m) \hat{\sigma}^{ji(d)}] \mathbf{k}_i \Delta\tau + \\ + (\hat{\sigma}^{mi(d)} \mathbf{v}_{,ji} + \hat{s}^{mi(d)} \mathbf{k}_i) \Delta\tau. \end{aligned}$$

Проекции данных векторов на нормаль и касательные к площадкам (6.1)

$$\hat{\sigma}_{\tau+\Delta\tau}^{ij(d)} = \hat{\mathbf{q}}_{\tau+\Delta\tau}^{(i)} \cdot \hat{\mathbf{N}}_{\tau+\Delta\tau}^{(j)} = \hat{\sigma}^{ij(d)} + (\hat{s}^{ij(d)} + \hat{\sigma}^{ik(d)} \hat{\eta}_{kj}^{(d)} + \hat{\sigma}^{kj(d)} \hat{\eta}_{ik}^{(d)} - \hat{\sigma}^{ij(d)} \hat{\eta}_k^k) \Delta\tau$$

есть приближенные значения физических, истинных напряжений, которые действуют в рассматриваемой материальной точке через малое время $\Delta\tau$ вместо напряжений $\hat{\sigma}^{ij(d)}$, действующих в ней в момент τ . Устремляя $\Delta\tau$ к нулю, определяем скорости напряжений

$$\hat{\Sigma}^{ij(d)} = \lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta\tau} (\hat{\sigma}_{\tau+\Delta\tau}^{ij(d)} - \hat{\sigma}^{ij(d)}) = \hat{s}^{ij(d)} + \hat{\sigma}^{ik(d)} \hat{\eta}_{kj}^{(d)} + \hat{\sigma}^{kj(d)} \hat{\eta}_{ik}^{(d)} - \hat{\sigma}^{ij(d)} \hat{\eta}_k^k,$$

которые являются декартовыми компонентами симметричного тензора $\hat{\Sigma} = \hat{\Sigma}^{ij(d)} \mathbf{k}_i \mathbf{k}_j = \hat{\Sigma}^{ij} \hat{\mathbf{l}}_i \hat{\mathbf{l}}_j$. В разложении по базисным векторам криволинейной системы координат, взятым в текущем положении материальной точки, имеем

$$\hat{\Sigma}^{ij} = \hat{s}^{ij} + \hat{\sigma}^{ik} \hat{\eta}_{kj}^i + \hat{\sigma}^{kj} \hat{\eta}_{ik}^j - \hat{\sigma}^{ij} \hat{\eta}_k^k. \quad (6.5)$$

Представив тензор напряжений Коши в виде $\hat{\sigma} = J^{-1} \sigma^{ij} (\mathbf{l}_i + \mathbf{u}_{,xi}) (\mathbf{l}_j + \mathbf{u}_{,xj})$ и продифференцировав его по времени τ , получим выражение для $\hat{\Sigma}$ как тензора скоростей напряжений Яумана [3–5] $\hat{\Sigma} = (\hat{\sigma})' + \hat{\sigma} \cdot \hat{\Omega} - \hat{\Omega} \cdot \hat{\sigma}$, где $\hat{\Omega} = \hat{\Omega}_{ij} \hat{\mathbf{l}}^i \hat{\mathbf{l}}^j$; $\hat{\Omega}_{ij} = (\hat{v}_{i;j} - \hat{v}_{j;i})/2$; $\hat{\sigma} \cdot \hat{\Omega} = \hat{\sigma}^{ik} \hat{\Omega}_{kj} \hat{\mathbf{l}}_i \hat{\mathbf{l}}_j$. Тензор $\hat{\Sigma}$ определяется независимо от свойств материала.

7. Уравнения связи скоростей напряжений со скоростями деформаций в изотропном гиперупругом теле. Дифференцированием уравнений (3.3) по времени τ определяем

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}^{ij} = [(\dot{J}p_{,J} + \dot{\Upsilon}p_{,\Upsilon})J + p\dot{J}] \alpha^{ij} + [(\dot{J}\beta_{,J} + \dot{\Upsilon}\beta_{,\Upsilon})\beta^{-1} - 2I_1^{-1} \dot{I}_1] \sigma^{(1)ij} + \\ + 2\mu(\eta^{ij'} - \dot{\chi}g^{ij}) - 2pJ\alpha^{im} \alpha^{jn} \eta_{mn}, \quad (7.1) \end{aligned}$$

где $p_{,\Upsilon} = \beta_{,J}$; $\sigma^{(1)ij} = \sigma^{ij} - pJ\alpha^{ij}$; $\eta^{ij'} = \eta^{ij} - g^{ij} \eta_m^m/3$. Используя (6.4), выразим \hat{s}^{ij} через $\dot{\sigma}^{ij}$ и с учетом (1.3), (2.1), (3.1), (3.2), (7.1) подставим в (6.5). Получим уравнения для скоростей напряжений

$$\begin{aligned} \hat{\Sigma}^{ij} = (\dot{J}p_{,J} + \dot{\Upsilon}p_{,\Upsilon}) \hat{g}^{ij} + [(\dot{J}\beta_{,J} + \dot{\Upsilon}\beta_{,\Upsilon})\beta^{-1} - 2I_1^{-1} \dot{I}_1] \hat{\sigma}^{ij'} + \\ + 2\hat{\mu} \hat{\alpha}^{im} \hat{\alpha}^{jn} \hat{\eta}_{mn} - \hat{\mu} \hat{\alpha}^{ij} (\hat{\chi})' + \hat{\sigma}^{in'} \hat{\eta}_m^j + \hat{\sigma}^{nj'} \hat{\eta}_m^i - \hat{\sigma}^{ij'} \hat{\eta}_m^m, \quad (7.2) \end{aligned}$$

являющиеся (после подстановок $\dot{I}_1 = \hat{\alpha}^{ij}\hat{\eta}_{ij}$, $\dot{J} = J\hat{\eta}_i^i$, $\dot{\Upsilon} = \beta^{-1}J\hat{\sigma}^{ij'}\hat{\eta}_{ij}$, $\hat{\sigma}^{ij'} = \hat{\sigma}^{ij} - p\hat{g}^{ij}$) линейными относительно скоростей деформаций $\hat{\eta}_{ij}$ с несимметричной матрицей коэффициентов.

В декартовой системе координат с осями, направленными вдоль главных осей тензоров $\hat{\sigma}$, \hat{e} , из (7.2) получим выражения для скоростей нормальных напряжений (по i суммирование не проводится)

$$\begin{aligned} \hat{\Sigma}^{ii} = \dot{J}p_{,J} + \dot{\Upsilon}p_{,\Upsilon} + [(\dot{J}\beta_{,J} + \dot{\Upsilon}\beta_{,\Upsilon})\beta^{-1} - 2I_1^{-1}\dot{I}_1 + 2\hat{\eta}_{ii} - \hat{\eta}_k^k]\hat{\sigma}'_i + \\ + \hat{\mu}\varepsilon_i[2\varepsilon_i\hat{\eta}_{ii} - (\hat{\chi})] \quad (\hat{\sigma}'_i = \hat{\sigma}_i - p) \end{aligned} \quad (7.3)$$

и выражения для скоростей сдвигающих напряжений (m, n, l — четная перестановка индексов 1, 2, 3)

$$\hat{\Sigma}^{mn} = B_l \hat{\eta}_{mn}, \quad B_l = 2\hat{\mu}\varepsilon_m\varepsilon_n - \hat{\sigma}'_l = \hat{\mu}(\varepsilon_m + \varepsilon_n)[2\varepsilon_m\varepsilon_n + \varepsilon_l(\varepsilon_m + \varepsilon_n) - \varepsilon_l^2]/(2I_1). \quad (7.4)$$

При положительных значениях $B_l > 0$, реализующихся, в частности, при малых деформациях, когда $B_l \approx 2\mu_0$, величины $\hat{\Sigma}^{mn}$, $\hat{\eta}_{mn}$ имеют одинаковые знаки. В случае $B_l = 0$ и $\hat{\Sigma}^{mn} = 0$ скорости $\hat{\eta}_{mn}$ единственным образом из (7.4) не определяются. Если $B_l < 0$, то скорость сдвигающего напряжения и соответствующая скорость сдвиговой деформации должны быть противоположно направлены. Поэтому выполнение неравенств $B_l > 0$ может рассматриваться как одно из условий устойчивого деформирования материала. В каждый момент равным нулю может быть только один из коэффициентов B_l , так как при $\hat{\sigma}'_l = 2\hat{\mu}\varepsilon_m\varepsilon_n$ должно быть $\hat{\sigma}'_m = \hat{\sigma}'_n = -\hat{\mu}\varepsilon_m\varepsilon_n < 0$. Сокращая B_l на неотрицательные множители, получим условия устойчивого деформирования

$$\varepsilon_l < (\varepsilon_m + \varepsilon_n)/2 + \sqrt{(\varepsilon_m + \varepsilon_n)^2/4 + 2\varepsilon_m\varepsilon_n},$$

налагающие ограничения на величины квадратов главных кратностей удлинений ε_m , ε_n , ε_l и не зависящие от вида определяющей функции Ψ и значений каких-либо констант материала.

В матричной форме уравнения (7.3) представляются в виде

$$Z = DX, \quad (7.5)$$

где $X^T = (\hat{\eta}_{11}, \hat{\eta}_{22}, \hat{\eta}_{33})$; $Z^T = (\hat{\Sigma}^{11}, \hat{\Sigma}^{22}, \hat{\Sigma}^{33})$; D — несимметричная матрица коэффициентов, зависящая только от значений ε_i в текущий момент времени. В недеформированном состоянии материала матрица D симметричная и положительно определенная, уравнения (7.5) однозначно разрешимы относительно скоростей деформаций. В процессе нагружения при $\det D = 0$ решение уравнений (7.5) может быть неединственным и должно выбираться с учетом имеющихся ограничений на допустимые скорости напряжений и деформаций. В последующие моменты времени D может иметь отрицательные собственные значения.

На решениях уравнений (7.5) X , Z с компонентами противоположных знаков для каждой главной оси реализуется убывающая зависимость (падающая диаграмма) напряжения от деформации: удлинение проходящего вдоль оси волокна сопровождается уменьшением действующего в нем напряжения (по i суммирование не проводится): $\hat{\eta}_{ii} \geq 0$, $\hat{\Sigma}^{ii} \leq 0$, а укорочение волокна — возрастанием напряжения: $\hat{\eta}_{ii} \leq 0$, $\hat{\Sigma}^{ii} \geq 0$. Такое деформирование материала рассматривается как неустойчивое. Ниже исследуется деформирование изотропного гиперупругого материала при некоторых простых нагружениях с функцией Ψ , полученной обобщением определяющей функции закона Гука. Собственные значения матрицы D в приведенных ниже решениях являются только вещественными.

8. Исследование деформирования изотропного гиперупругого материала при простых нагружениях. В законе Гука напряжения $\sigma^{ij} = 2\mu_0 e^{ij'} + Ke_n^n g^{ij}$ ($\mu_0 = E_0/[2(1+\nu)]$, $K = E_0/[3(1-2\nu)]$; E_0, ν — модуль Юнга и коэффициент Пуассона) являются частными производными $\sigma^{ij} = \Psi_{0,e_{ij}}$ функции $\Psi_0 = \Psi_0(I_2, J_1) = \mu_0 I_2 + 0,5K(J_1 - 1)^2$, зависящей от двух аргументов $I_2 = e^{ij'} e'_{ij}$, $J_1 = 1 + e_n^n$. При малых деформациях J_1, I_2 могут рассматриваться как представляющие приближенно аргументы $J, \Upsilon = I_2 I_1^{-2}$ определяющей функции для изотропного гиперупругого материала Ψ , если учесть $J \approx J_1$ и в выражении для Υ опустить множитель с $I_1 \approx 3/2$.

Определим функцию Ψ , непрерывно переходящую в Ψ_0 при стремлении деформаций к нулю. Примем зависимость для давления в виде $p = 0,5K(1 - J^{-2})$. При этом давление неограниченно возрастает по абсолютной величине с уменьшением объема материала, стремится к максимально допустимому значению при $J \rightarrow \infty$ и приближается к определяемому в законе Гука при $J \rightarrow 1$. Данному p соответствует функция $\Psi_2 = \int p dJ = 0,5KJ^{-1}(J - 1)^2$, $p = \Psi_{2,J}$. Добавим к Ψ_2 слагаемое $\beta\Upsilon$ с коэффициентом $\beta = 9\mu_0/4$, аппроксимирующее при малых деформациях первое слагаемое в Ψ_0 . В результате приходим к определяющей функции изотропного гиперупругого тела вида $\Psi = \beta\Upsilon + 0,5KJ^{-1}(J - 1)^2$ с теми же двумя константами материала μ_0, K , что и в законе Гука. При определенной таким образом функции Ψ нули собственных значений матрицы D , при которых согласно уравнениям (7.5) могут осуществляться ветвление решений и переход к убывающим зависимостям напряжений от деформаций, достигаются в моменты, не зависящие от значений μ_0, K .

Чисто сдвиговое нагружение осуществляется при $\hat{\sigma}_i = -\hat{\sigma}_j, \hat{\sigma}_k = p = 0, J = 1$. Из уравнений (3.4) определяем $\varepsilon_k = (\varepsilon_i^2 + \varepsilon_j^2)/(\varepsilon_i + \varepsilon_j)$, $\hat{\sigma}_i = \beta\varepsilon_i\varepsilon_j(\varepsilon_i^2 - \varepsilon_j^2)/(\varepsilon_i^2 + \varepsilon_i\varepsilon_j + \varepsilon_j^2)^2$. Учитывая, что $\hat{\sigma}_i > 0$ и является однородной функцией нулевой степени $\varepsilon_i, \varepsilon_j$, а также учитывая монотонное возрастание ε_i и убывание ε_j , введем параметр $0 \leq \xi = 1 - \varepsilon_j/\varepsilon_i \leq 1$ и получим зависимости $\varepsilon_i = \{(2 - \xi)/[(1 - \xi)(2 - 2\xi + \xi^2)]\}^{1/3}$, $\varepsilon_j = [(2 - \xi)(1 - \xi)^2/(2 - 2\xi + \xi^2)]^{1/3}$, $\varepsilon_k = \{(2 - 2\xi + \xi^2)^2/[(1 - \xi)(2 - \xi)^2]\}^{1/3}$. Имеем $\varepsilon_i \rightarrow \infty, \varepsilon_j \rightarrow 0$, значение ε_k стремится к ε_i при $\xi \rightarrow 1$. Элементарная материальная частица, являющаяся в начальный момент времени кубиком с ребрами, направленными вдоль главных осей тензоров σ, e , в текущем состоянии принимает форму прямого параллелепипеда, у которого одно из ребер неограниченно укорачивается, два других неограниченно удлиняются. Объем частицы остается постоянным.

Напряжения $\hat{\sigma}_i$ возрастают (рис. 1) до момента $\xi = \xi_* = 0,671457$, $\varepsilon_i = 1,53465$, $\varepsilon_j = 0,505842$, $\varepsilon_k = 1,28399$, в который достигается максимальное (порядка величины μ_0) значение $\hat{\sigma}_i = 0,142031\beta$. На участке $\xi_* < \xi < 1$ одно из собственных значений матри-

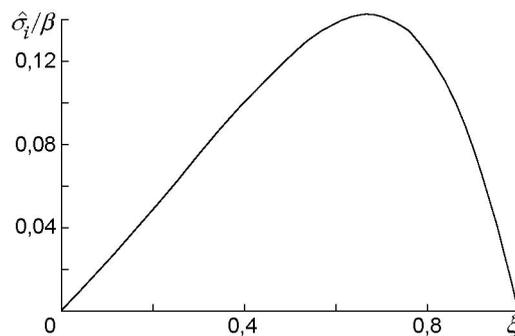


Рис. 1

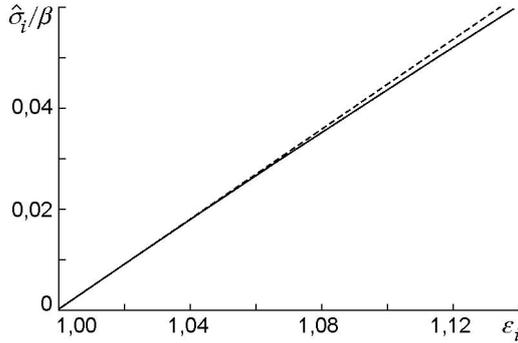


Рис. 2

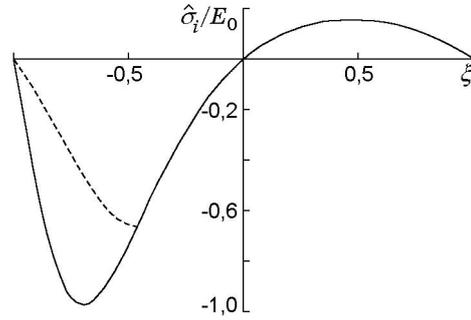


Рис. 3

цы D , обращаясь в нуль при $\xi = \xi_*$, становится отрицательным, диаграмма на рис. 1 принимает вид падающей, напряжения монотонно уменьшаются (причем стремятся к нулю не только напряжения, но и действующие на гранях кубика усилия, необходимые для удержания его в деформированном состоянии и пропорциональные величинам $\hat{\sigma}_j(\varepsilon_k\varepsilon_i)^{1/2}$, $\hat{\sigma}_i(\varepsilon_j\varepsilon_k)^{1/2}$), деформирование материала определяется как неустойчивое. В течение всего процесса деформирования $B_l > 0$. Зависимость $\hat{\sigma}_i$ от ε_i (сплошная линия на рис. 2) в широком интервале изменения значений $\hat{\sigma}_i$ до величин порядка модуля сдвига близка к линейной, следующей из закона Гука $\hat{\sigma}_i = 2\mu_0\varepsilon_i$ (штриховая линия на рис. 2). Для закона Гука длина поперечного волокна остается постоянной: $\varepsilon_k = 1$.

В случае осесимметричного нагружения $\hat{\sigma}_i = \hat{\sigma}_j$, $\hat{\sigma}_k = 0$, согласно (3.4) имеем

$$\hat{\mu}(\varepsilon_i - \varepsilon_j)(\varepsilon_i + \varepsilon_j - \hat{\chi}) = 0, \quad \hat{\mu}\varepsilon_k(\varepsilon_k - \hat{\chi}) + p = 0, \quad \hat{\sigma}_i = 1,5p. \quad (8.1)$$

Из двух решений первого уравнения в (8.1) в начале нагружения может реализоваться только одно, соответствующее осесимметричному деформированию $\varepsilon_i = \varepsilon_j$. Введя параметр $-1 \leq \xi = (\varepsilon_i - \varepsilon_k)/(\varepsilon_i + \varepsilon_k) \leq 1$, получим зависимости $\gamma = 16\beta\xi(1 - \xi^2)/(3 + \xi)^3$, $J = \gamma/K + \sqrt{(\gamma/K)^2 + 1}$, $\varepsilon_i = J^{2/3}[(1+\xi)/(1-\xi)]^{1/3}$, $\varepsilon_k = J^{2/3}[(1-\xi)/(1+\xi)]^{2/3}$, $p = \gamma/J$. Ниже приводятся результаты счета с $\nu = 0,3$. В данном осесимметричном решении (сплошная кривая на рис. 3) напряжение достигает экстремальных значений при растяжении ($0 \leq \xi \leq 1$), когда $\xi = \xi_*^+ = (2\sqrt{7} - 1)/9$, $\varepsilon_i = 1,55687$, $\varepsilon_k = 0,551518$, $J = 1,1562$, $\hat{\sigma}_i = 0,157462E_0$, а при сжатии ($-1 \leq \xi \leq 0$), когда $\xi = \xi_*^- = -(2\sqrt{7} + 1)/9$, $\varepsilon_i = 0,410525$, $\varepsilon_k = 2,31772$, $J = 0,624986$, $\hat{\sigma}_i = -0,975072E_0$. При $\xi \rightarrow \pm 1$ объем материала возвращается к исходному: $J \rightarrow 1$, $\hat{\sigma}_i \rightarrow 0$.

В процессе сжатия, когда $\xi = \xi_{**} = 3 - 2\sqrt{3}$, $\varepsilon_i = 0,561577$, $\varepsilon_k = 1,53426$, $J = 0,695598$, $\hat{\sigma}_i = -0,666704E_0$, одно из собственных значений матрицы D обращается в нуль и от осесимметричного ответвляется определяемое из (8.1) неосесимметричное решение $\varepsilon_i + \varepsilon_j = \hat{\chi}$, $\varepsilon_k = (\varepsilon_i + \varepsilon_j)/2 + \sqrt{(\varepsilon_i + \varepsilon_j)^2/4 + 2\varepsilon_i\varepsilon_j}$, $p = -2\hat{\mu}\varepsilon_i\varepsilon_j$. Введя обозначения $\zeta_1 = (\varepsilon_i + \varepsilon_j)/2$, $\zeta_2 = 2\zeta_1^{-2}\varepsilon_i\varepsilon_j$, получим выражения $\gamma = -4\beta\zeta_2/(3 + \sqrt{1 + \zeta_2})^2$, $J = \gamma/K + \sqrt{(\gamma/K)^2 + 1}$, $\zeta_1 = \{2J^2/[\zeta_2(1 + \sqrt{1 + \zeta_2})]\}^{1/3}$, $\varepsilon_i = \zeta_1(1 - \sqrt{1 - \zeta_2/2})$, $\varepsilon_j = \zeta_1(1 + \sqrt{1 - \zeta_2/2})$, $\varepsilon_k = \zeta_1(1 + \sqrt{1 + \zeta_2})$, $p = \gamma/J$, в которых $0 \leq \zeta_2 \leq 2$. Значения $\varepsilon_i \rightarrow 0$, $\varepsilon_j \rightarrow \infty$ при $\zeta_2 \rightarrow 0$. Объем материала монотонно увеличивается, приближаясь к исходному, напряжение стремится к нулю ($J \rightarrow 1$, $\hat{\sigma}_i \rightarrow 0$ при $\zeta_2 \rightarrow 0$) (штриховая кривая на рис. 3). Осесимметричность напряженного состояния ($\hat{\sigma}_i = \hat{\sigma}_j$) при неосесимметричном деформировании сохраняется. Неосесимметричное деформирование, так же как и осесимметричное при $-1 < \xi < \xi_{**}$ и $\xi_*^+ < \xi < 1$, неустойчиво и осуществляется при уменьшающихся по абсолютной величине напряжениях $\hat{\sigma}_i$, меньших, чем в осесимметричном решении. Значения ξ_*^+ , ξ_*^- , ξ_{**} не зависят от констант материала.

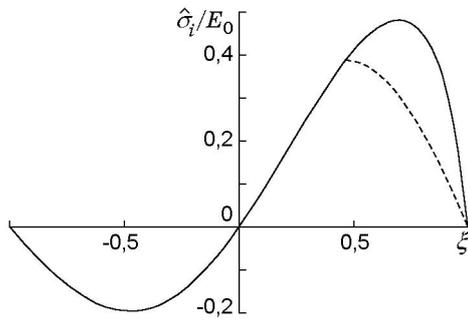


Рис. 4

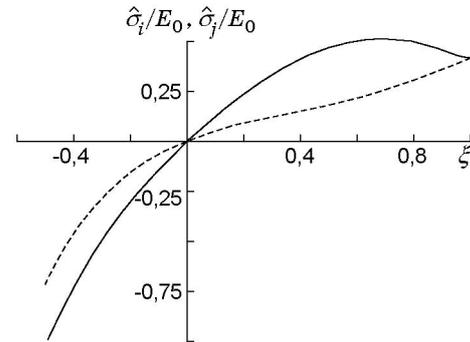


Рис. 5

Элементарная материальная частица, взятая в начальный момент времени в форме кубика с ребрами, направленными вдоль главных осей тензоров σ , e , при осесимметричном деформировании растяжения в пределе превращается в квадратную пластину с неограниченно уменьшающейся толщиной и удлиняющимися сторонами; при осесимметричном деформировании сжатия — в неограниченно удлиняющуюся призму с квадратным поперечным сечением, площадь которого стремится к нулю. В ответвляющемся при сжатии неосесимметричном решении поперечное сечение призмы перестает быть квадратным, одна его сторона неограниченно удлиняется, другая неограниченно укорачивается. Призма переходит в квадратную пластину, расположенную в осевой плоскости. Усилия, необходимые для удержания кубика в деформированном состоянии, в пределе, так же как и напряжения, стремятся к нулю.

Аналогичные результаты получаются в случае одноосного нагружения напряжением $\hat{\sigma}_i$ при $\hat{\sigma}_j = \hat{\sigma}_k = 0$. В определяемом из уравнений $\hat{\mu}(\varepsilon_j - \varepsilon_k)(\varepsilon_j + \varepsilon_k - \hat{\chi}) = 0$, $p = 0,5\hat{\mu}\varepsilon_i(\varepsilon_i - \hat{\chi})$, $\hat{\sigma}_i = 3p$ осесимметричном решении $\varepsilon_j = \varepsilon_k$, $-1 \leq \xi = (\varepsilon_i - \varepsilon_j)/(\varepsilon_i + \varepsilon_j) \leq 1$ (сплошная кривая на рис. 4) диаграмма переходит в падающую при сжатии, когда $\xi = (1 - 2\sqrt{7})/9$, $\varepsilon_i = 0,47695$, $\varepsilon_j = 1,34637$, $J = 0,929825$, $\hat{\sigma}_i = -0,195797E_0$, и при растяжении, когда $\xi = (1 + 2\sqrt{7})/9$, $\varepsilon_i = 3,72429$, $\varepsilon_j = 0,659662$, $J = 1,27304$, $\hat{\sigma}_i = 0,4787E_0$. При растяжении, когда $\xi = 2\sqrt{3} - 3$, $\varepsilon_i = 2,21003$, $\varepsilon_j = 0,808927$, $J = 1,20256$, $\hat{\sigma}_i = 0,385641E_0$, от осесимметричного ответвляется неосесимметричное решение, показанное на рис. 4 штриховой кривой.

Рассмотрим действие $\hat{\sigma}_i$ при постоянных длинах поперечных волокон: $\varepsilon_j = \varepsilon_k = 1$. Из (3.4) находим $p = 0,5K(1 - \varepsilon_i^{-1})$, а также $\hat{\sigma}_i = 8\beta\varepsilon_i^{1/2}(\varepsilon_i - 1)(2 + \varepsilon_i)^{-3} + p$, $\hat{\sigma}_j = \hat{\sigma}_k = (3p - \hat{\sigma}_i)/2$, зависимости которых от параметра $-1 \leq \xi = (\varepsilon_i - 1)/(\varepsilon_i + 1) \leq 1$ представлены на рис. 5 сплошной и штриховой кривыми соответственно. При сжатии напряжения неограниченно возрастают по абсолютной величине; при растяжении значение $\hat{\sigma}_i > 0$ возрастает, достигает максимума и затем уменьшается, $\hat{\sigma}_j$ растет. Деформирование материала определяется как устойчивое.

Во всех рассмотренных случаях нагружений ветвление решений и переход к падающим диаграммам с неустойчивым деформированием осуществляются при $\det D = 0$; на решениях, являющихся неединственными, и на решениях с падающими диаграммами среди собственных значений матрицы D имеются отрицательные; в областях устойчивого деформирования зависимости напряжений от деформаций близки к линейным в широком диапазоне напряжений.

Автор выражает благодарность Л. В. Баеву, Е. В. Мамонтову, С. Н. Коробейникову и В. Д. Кургузову за полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Солодовников В. Н.** Определяющие уравнения изотропного гиперупругого тела // ПМТФ. 2000. Т. 41, № 6. С. 178–183.
2. **Мак-Коннел Дж.** Введение в тензорный анализ. М.: Физматгиз, 1963.
3. **Коробейников С. Н.** Нелинейное деформирование твердых тел. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2000.
4. **Поздеев А. А., Трусов П. В., Няшин Ю. И.** Большие упругопластические деформации. М.: Наука, 1986.
5. **Прагер В.** Введение в механику сплошных сред. М.: Изд-во иностр. лит., 1963.

*Поступила в редакцию 8/V 2001 г.,
в окончательном варианте — 23/VII 2001 г.*
