

УДК 532.517.3; 532.526.3

ТРЕХМЕРНЫЕ ДИВЕРГЕНТНЫЕ ВОЛНЫ НА МОДЕЛЬНОМ ВЯЗКОУПРУГОМ ПОКРЫТИИ В ПОТЕНЦИАЛЬНОМ ПОТОКЕ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

В. П. Реутов, Г. В. Рыбушкина

Институт прикладной физики РАН, 603950 Нижний Новгород
E-mail: reutov@appl.sci-nnov.ru

Исследуется генерация трехмерных нелинейных волн на модельном вязкоупругом покрытии, обтекаемом потенциальным потоком несжимаемой жидкости. Рассмотрены периодические нелинейные волны, нарастающие при развитии квазистатической неустойчивости — волновой дивергенции. Покрытие моделируется гибкой пластиной, поддерживаемой распределенным пружинным нелинейно-упругим основанием. На основе уравнений Кармана теории тонких пластин описаны изгибы пластины. В приближении малых уклонов с точностью до членов второго порядка малости найдены возмущения поверхностного давления в потенциальном потоке. При численном моделировании обнаружен скачкообразный переход от двумерных нелинейных волн к трехмерным волновым структурам, наблюдаемый также в экспериментах.

Ключевые слова: вязкоупругие покрытия, гидродинамическая неустойчивость, волновая дивергенция, трехмерные структуры.

Введение. Исследование генерации нелинейных волн на поверхности вязкоупругих покрытий, обтекаемых потоком несжимаемой жидкости, представляет интерес при решении различных задач биомеханики и техники [1–5], а также при решении проблемы структурообразования и отбора диссипативных волновых структур в неравновесных средах [6–9]. Известно, что на покрытиях с малыми потерями (с незначительным затуханием (демпфированием) собственных колебаний и волн) при наличии турбулентного пограничного слоя развивается осцилляторная неустойчивость — флаттер бегущей волны [1, 3]. В данной работе изучается нелинейная стадия квазистатической гидроупругой неустойчивости — волновой дивергенции, которая наблюдается на покрытиях с большими потерями [1, 3]. Наличие перехода от флаттера бегущей волны к двумерным дивергентным волнам при увеличении потерь в покрытии хорошо согласуется с результатами расчетов по линейной теории, построенной в [10] для течения с турбулентным пограничным слоем. Возникновение волновой дивергенции обусловлено наличием потенциального течения за пределами пограничного слоя [10, 11]. Это позволяет проводить анализ генерации дивергентных волн в приближении потенциального обтекания (другие аргументы в пользу потенциальной модели течения приведены в [12, 13]). Квазистатический характер дивергентных волн выражается в том, что их фазовая скорость оказывается значительно меньше скорости невозмущенного потока и в приближении потенциального течения равна нулю.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 09-01-097018-р_поволжье_а).

© Реутов В. П., Рыбушкина Г. В., 2012

Дивергентные волны большой амплитуды наблюдаются, например, на коже плывущего дельфина или человека и обычно трактуются как “сморщивание” кожного покрова [3].

Теория возбуждения двумерных дивергентных волн большой амплитуды с существенно несинусоидальным шиповидным профилем поверхности покрытия, построенная в [11–13], позволила объяснить ряд особенностей паттернов, наблюдаемых на поверхности (полностью или частично упорядоченных узоров на изображении (фотографии) рельефа поверхности покрытия). Однако в экспериментах отмечалось, что при увеличении скорости потока в поперечном к нему направлении увеличивается модуляция нелинейных дивергентных волн, в результате чего они быстро (фактически скачкообразно) становятся трехмерными [1]. В данной работе исследуется развитие трехмерных дивергентных волн большой амплитуды на модельном вязкоупругом покрытии, взаимодействующем с потенциальным потоком несжимаемой жидкости.

1. Модель вязкоупругого покрытия. Для описания взаимодействия диссипативного податливого покрытия с потенциальным потоком используем модель, в которой реальное покрытие заменяется тонкой пластиной, поддерживаемой распределенным пружинным основанием [3]. Как и в работах [12, 13], параметры модельного покрытия определим из условия совпадения его волновых параметров с аналогичными параметрами вязкоупругого слоя из резиноподобного материала.

Используется декартова система координат, в которой оси x и y , расположенные на невозмущенной поверхности пластины, направлены вдоль и поперек потока соответственно, а ось z — по нормали к этой поверхности (рис. 1). С помощью теории тонких пластин [14] систему уравнений изгибных волн запишем в виде

$$\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - T_0 \nabla^2 w + B \nabla^4 w + K_E w + b \frac{\partial w}{\partial t} = -p + hL(w, \Phi); \quad (1.1)$$

$$L(w, \Phi) = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y}; \quad (1.2)$$

$$\frac{1}{E} \Delta^2 \Phi = -\frac{1}{2} L(w, w), \quad L(w, w) = 2 \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right], \quad (1.3)$$

где $w(x, y, t)$ — смещение поверхности пластины в направлении оси z ; $\Phi(x, y, t)$ — функция напряжений на срединной поверхности пластины; p — поверхностное давление; b — феноменологический коэффициент потерь; T_0 — внешнее растягивающее усилие; K_E — жесткость пружинного основания; ρ , E — плотность и модуль Юнга материала пластины соответственно; h — толщина пластины; $B = Eh^3/[12(1 - \mu^2)]$ — изгибная жесткость пластины; μ — коэффициент Пуассона. В отличие от двумерной модели, рассмотренной

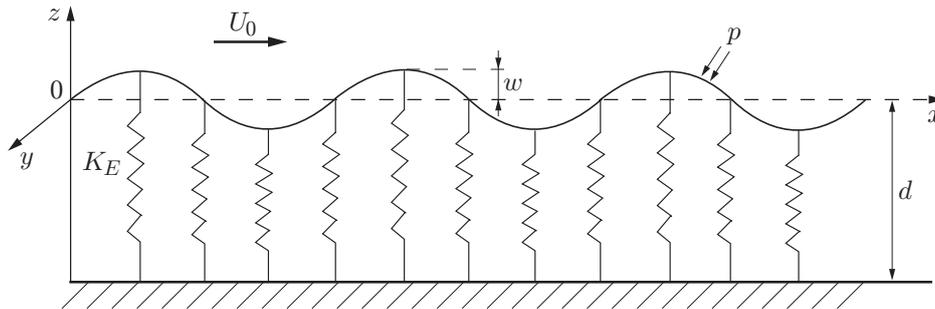


Рис. 1. Модель покрытия в виде упругой пластины, поддерживаемой распределенным пружинным основанием (U_0 — скорость внешнего течения)

в [12, 13], уравнения (1.1)–(1.3) описывают сильные изгибы пластины не только в продольном, но и в поперечном к потоку направлении.

При моделировании твердотельного слоя из резиноподобного материала толщиной d жесткость пружинного основания будем считать нелинейной функцией смещения поверхности:

$$K_E \rightarrow K_{eff}(w) = K_E(1 + \sigma w^2)(1 + w/d)^{-1}, \quad (1.4)$$

где σ — постоянный коэффициент. Подставляя (1.4) в (1.1), получаем локальную нелинейность, ограничивающую смещение точек поверхности. Для двумерных волн с сильным изгибом поверхности в работах [12, 13] показано, что учет локальной нелинейности в виде (1.4) позволяет описать процесс отбора их периода. Также локальная нелинейность играет существенную роль в процессе формирования трехмерных волн (см. п. 3). Полагая, что пластина на рис. 1 моделирует внешнюю (прилегающую к обтекаемой поверхности) часть слоя, введем параметр относительной толщины этой “эффективной” пластины $\beta_p = h/d < 1$. Следуя [12, 13], зададим линейные параметры пластины и пружинного основания с учетом условия равенства фазовых скоростей волн на пластине и главной моды твердотельного слоя. Введем характерное волновое число $k_0 = \sqrt{K_E/T_0}$, имеющее порядок критического волнового числа, при котором на модельном покрытии возникает неустойчивость дивергентных волн (см. п. 2). В [12, 13] показано, что для моделирования слоя с коэффициентом Пуассона $\mu \approx 0,5$, плотностью ρ и модулем сдвига $G = E/[2(1 + \mu)]$ следует положить

$$\begin{aligned} T_0 &= \frac{4}{3} \beta_p G d, & K_E &= \frac{5}{2} \frac{\beta_p G}{d}, & k_0 &= \frac{1}{2d} \sqrt{\frac{15}{2}}, \\ B &= \frac{hG}{6(1 - \mu)}, & b &= 7\gamma_t \sqrt{G\rho}, & \beta_p &\approx 0,5, \end{aligned} \quad (1.5)$$

где γ_t — параметр потерь энергии в материале слоя [15].

Рассмотрим периодические по x и y волны на бесконечном покрытии. В двумерной задаче при сильных изгибах пластины возникает нелинейное растягивающее усилие, вызванное изменением длины дуги. В трехмерной периодической волне аналогичную роль играют нелинейные напряжения, осредненные по длине волны. Для вычисления этих напряжений используем выражения, связывающие локальные растягивающие усилия N_x, N_y и касательные усилия T с деформациями в плоской пластине (см., например, [14]):

$$\begin{aligned} N_x &= \frac{Eh}{1 - \mu^2} \left\{ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \mu \left[\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] \right\}, \\ N_y &= \frac{Eh}{1 - \mu^2} \left\{ \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + \mu \left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] \right\}, \\ T &= \frac{Eh}{2(1 + \mu)} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right). \end{aligned}$$

Здесь u, v, w — смещения материальных точек пластины в направлениях x, y, z соответственно. Функцию напряжений Φ представим в виде

$$\Phi = \frac{1}{h} \left(\frac{1}{2} \bar{N}_x x^2 + \frac{1}{2} \bar{N}_y y^2 + \bar{T} xy \right) + \tilde{\Phi}, \quad (1.6)$$

где $\bar{N}_x, \bar{N}_y, \bar{T}$ — средние по периоду прогиба значения растягивающих и касательных усилий. При этом среднее значение $\tilde{\Phi}$ полагается равным нулю. Интегрируя выражения

по периодам вдоль направлений x и y , получаем

$$\begin{aligned}\bar{N}_x &= \frac{Eh}{2(1-\mu^2)} \left\langle \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \mu \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right\rangle, & \bar{N}_y &= \frac{Eh}{2(1-\mu^2)} \left\langle \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + \mu \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right\rangle, \\ \bar{T} &= \frac{Eh}{2(1+\mu)} \left\langle \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right\rangle, & \langle \cdot \rangle &= \frac{1}{\lambda_x \lambda_y} \int_0^{\lambda_x} \int_0^{\lambda_y} (\cdot) dx dy.\end{aligned}\quad (1.7)$$

Подставляя (1.6) в (1.2), имеем

$$\begin{aligned}L(w, \Phi) &= \frac{1}{h} \left(\bar{N}_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \bar{N}_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2\bar{T} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) + \\ &\quad + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \tilde{\Phi}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \frac{\partial^2 \tilde{\Phi}}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 \tilde{\Phi}}{\partial x \partial y}.\end{aligned}\quad (1.8)$$

Используя интегрирование по частям, в результате осреднения по периоду правой части уравнения для $\tilde{\Phi}$ (которое получается из (1.3) после подстановки (1.6)) получаем $\langle L(w, w) \rangle = 0$. Тогда уравнение для $\tilde{\Phi}$ можно представить в виде

$$\nabla^4 \tilde{\Phi} = -E \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right].\quad (1.9)$$

Средние значения нелинейных функций, входящих в (1.8) и правую часть (1.1), также равны нулю. Уравнения (1.1), (1.3), (1.4), (1.7)–(1.9) образуют замкнутую постановку задачи для определения нелинейного периодического изгиба поверхности покрытия под действием поверхностного давления p .

2. Уравнения генерации дивергентных волн. Ниже строится модель, описывающая генерацию дивергентных волн.

2.1. *Переход к безразмерным переменным.* Предлагаемая модель генерации дивергентных волн применима для сильнодиссипативного покрытия, на котором фактически отсутствуют собственные волны. В этом случае реакция покрытия на возмущения давления сводится к релаксации отклонений поверхности, характерное время которой возрастает с увеличением потерь. Переходя к безразмерным переменным $\tau = \gamma_* t$, $\bar{w} = k_0 w$, $\bar{x} = k_0 x$, $\bar{y} = k_0 y$, $\bar{p} = (k_0/K_E)p$, $\bar{\Phi} = (hk_0^4/K_E)\tilde{\Phi}$, $\bar{L} = Lk_0 h/K_E$ ($\gamma_* = K_E/b$ — декремент релаксации однородного смещения поверхности свободной пластины), получаем уравнения для двумерного периодического изгиба поверхности покрытия в безразмерном виде

$$\frac{\partial w}{\partial \tau} = \nabla^2 w - B_1 \nabla^4 w - \frac{1 + \sigma_1 w^2}{1 + w/d_1} w - p + L(w, \tilde{\Phi});\quad (2.1)$$

$$\begin{aligned}L(w, \tilde{\Phi}) &= \bar{N}_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \bar{N}_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - 2\bar{T} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \tilde{\Phi}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \frac{\partial^2 \tilde{\Phi}}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 \tilde{\Phi}}{\partial x \partial y}; \\ \Delta^2 \tilde{\Phi} &= -E_1 \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right],\end{aligned}\quad (2.2)$$

где $d_1 = k_0 d$, $B_1 = Bk_0^4/K_E$, $E_1 = Ehk_0^2/K_E$, $\sigma_1 = \sigma/k_0^2$ — безразмерные аналоги параметров покрытия, введенных в п. 1. Нормировка растягивающих и касательных усилий имеет вид $(\bar{N}_x, \bar{N}_y, \bar{T}) = (k_0^2/K_E)(N_x, N_y, T)$. В данной работе выражения (1.7) в безразмерной форме не приводятся, так как они получаются из выражений в размерной форме после замены $Eh \rightarrow E_1$ (черта над безразмерными величинами опускается). Кроме того, далее интегрирование проводится по безразмерным периодам $\Lambda_{x,y} = k_0 \lambda_{x,y}$ (см. определение средних в (1.7)).

В правой части уравнения (2.1), так же как в уравнениях в работах [12, 13], опущено инерционное слагаемое, которое в безразмерных переменных имеет вид $\varepsilon_1 \partial^2 w / \partial \tau^2$ ($\varepsilon_1 = \gamma_*^2 / \omega_0^2$; $\omega_0 = \sqrt{K_E / m}$ — частота колебаний однородно смещающейся пластины в отсутствие потерь) и оказывается малым при $\varepsilon_1 \ll 1$, т. е. когда потери в пластине достаточно велики. Это условие достаточно точно выполнялось в экспериментах (см. [12, 13]).

2.2. *Обтекание поверхности покрытия.* Для замыкания системы уравнений (2.1), (2.2) необходимо связать поверхностное давление p , индуцированное потоком, с отклонением поверхности w . Следуя [11], для решения уравнений движения жидкости используем метод возмущений по малым уклонам поверхности. Выражение для поля скорости в потенциальном потоке представим в виде $\mathbf{U} = U_0 \mathbf{i} + \nabla \tilde{\varphi}$, где U_0 — скорость потока на бесконечном удалении от пластины; \mathbf{i} — единичный орт в направлении оси x . Возмущения потенциала течения $\tilde{\varphi}$ над волнистой поверхностью покрытия удовлетворяют уравнению Лапласа

$$\Delta \tilde{\varphi} = 0, \quad (2.3)$$

где $\Delta = \partial^2 / \partial x^2 + \partial^2 / \partial y^2 + \partial^2 / \partial z^2$. Введем характерную скорость потока как величину порядка критической скорости, при которой возникает линейная неустойчивость дивергентных волн: $U_* = \sqrt{K_E / (k_0 \rho_0)}$ ($\rho_0 \approx \rho$ — плотность жидкости во внешнем течении), и перейдем к нормированным переменным $\tilde{\varphi} = k_0 \tilde{\varphi} / U_*$, $\tilde{z} = k_0 z$. При наличии малого параметра $\varepsilon_1 \ll 1$ можно пренебречь производными по времени в кинематическом и динамическом граничных условиях на поверхности покрытия. Иными словами, изгибы волнистой поверхности происходят настолько медленно, что ее обтекание можно считать квазистационарным [11–13]. В этом случае кинематическое и динамическое граничные условия принимают вид [11–13]

$$\begin{aligned} \left(V + \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial x} \right) \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial y} &= \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial z} \Big|_{z=w(x,y,t)}, \\ \frac{1}{2} \left(V + \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial y} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial z} \right)^2 + p \Big|_{z=w(x,y,t)} &= C(\tau), \end{aligned} \quad (2.4)$$

где $V = U_0 / U_*$ — нормированная скорость однородного течения; $C(\tau)$ — произвольная функция времени.

Условия применимости приближения малых уклонов можно записать в виде $|\partial w / \partial x| \ll 1$, $|\partial w / \partial y| \ll 1$. В [11] показано, что даже в рамках этого приближения можно получить двумерные волны существенно несинусоидального типа. В то же время приближение малых уклонов позволяет использовать для решения задачи (2.3), (2.4) метод возмущений. Выполнив разложение переменных в ряд Тейлора в окрестности точки $z = 0$, сведем граничные условия (2.4) к условиям на “невозмущенной” поверхности $z = 0$. Представляя решение (2.3) в виде разложения по малым уклонам $\tilde{\varphi} = \tilde{\varphi}^{(1)} + \tilde{\varphi}^{(2)} + \dots$, для поверхностного давления получаем явное выражение с точностью до членов второго порядка малости:

$$p \Big|_{z=w} = -V \frac{\partial (\tilde{\varphi}_0^{(1)} + \tilde{\varphi}_0^{(2)})}{\partial x} - V \left(\frac{\partial \tilde{\varphi}^{(1)}}{\partial x \partial z} \right)_0 w - \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \tilde{\varphi}_0^{(1)}}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \tilde{\varphi}_0^{(1)}}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \tilde{\varphi}^{(1)}}{\partial z} \right)_0^2 \right] \quad (2.5)$$

(нижним индексом 0 отмечены величины при $z = 0$). Функции $\tilde{\varphi}^{(1)}$ и $\tilde{\varphi}^{(2)}$ удовлетворяют уравнениям $\Delta \tilde{\varphi}^{(1)} = 0$, $\Delta \tilde{\varphi}^{(2)} = 0$ с граничными условиями

$$V \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial \tilde{\varphi}_z^{(1)}}{\partial z} \Big|_{z=0}, \quad \frac{\partial \tilde{\varphi}^{(1)}}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{\varphi}^{(1)}}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial y} - w \frac{\partial^2 \tilde{\varphi}^{(1)}}{\partial z^2} = \frac{\partial \tilde{\varphi}^{(2)}}{\partial z} \Big|_{z=0} \quad (2.6)$$

и условиями $\varphi^{(1)} \rightarrow 0$, $\varphi^{(2)} \rightarrow 0$ при $z \rightarrow \infty$. Решив линейные краевые задачи для $\tilde{\varphi}^{(1)}$ и $\tilde{\varphi}^{(2)}$ с граничными условиями (2.6), можно связать в явном виде давление p с отклонением поверхности w , что приводит к замыканию системы (2.1), (2.2).

2.3. *Спектральная форма уравнений.* Для того чтобы найти численное решение задачи, представим полученные уравнения в спектральной форме. Выражение для отклонения поверхности запишем в виде усеченного ряда Фурье по координатам вдоль и поперек потока:

$$w(x, y, \tau) = \sum_{n=1}^N \sum_{m=0}^M a_{nm}(\tau) e^{i\alpha_n x + i\beta_m y} + \text{к. с.} \quad (2.7)$$

($\alpha_n = n\alpha_1$, $\beta_m = m\beta_1$ и $\alpha_1 = 2\pi/\Lambda_x$, $\beta_1 = 2\pi/\Lambda_y$ — волновые числа первых продольной и поперечной (относительно направления течения) гармоник изгиба поверхности соответственно; к. с. — комплексно-сопряженная величина; N , M — число кратных гармоник по координатам x , y). С учетом (2.7) нетрудно записать решение краевой задачи для $\varphi^{(1)}$ через коэффициенты $\tilde{\varphi}_{nm}^{(1)}$ разложения этой функции в ряд Фурье:

$$\tilde{\varphi}_{nm}^{(1)} = -\frac{i\alpha_n V a_{nm}}{\varkappa_{nm}} e^{-\varkappa_{nm} z}. \quad (2.8)$$

Здесь $\varkappa_{nm} = \sqrt{\alpha_n^2 + \beta_m^2}$. Аналогичный вид имеет экспоненциальная зависимость от z коэффициентов Фурье $\tilde{\varphi}_{nm}^{(2)}$ функции $\varphi^{(2)}$ (однако в этом случае коэффициенты при экспонентах определяются гармониками нелинейностей в (2.6)). Подставляя разложение (2.7) в (2.1), (2.6), (2.5), получаем замкнутую систему уравнений для комплексных амплитуд гармоник

$$\frac{da_{nm}}{d\tau} = \gamma_{nm} a_{nm} + F_{nm}; \quad (2.9)$$

$$\gamma_{nm} = \alpha_n^2 V^2 / \varkappa_{nm} - (\varkappa_{nm}^2 + B_1 \varkappa_{nm}^4 + 1), \quad (2.10)$$

где γ_{nm} — инкремент линейной неустойчивости трехмерных возмущений. Слагаемое F_{nm} в правой части (2.9) определяется нелинейными членами уравнения (2.1) и содержит вклады изгибной нелинейности пластины L_{nm} , нелинейности пружинного основания K_{nm} и нелинейности потока P_{nm} :

$$F_{nm} = L_{nm} + K_{nm} + P_{nm}. \quad (2.11)$$

Здесь

$$\begin{aligned} L_{nm} &= -(\alpha_n^2 \bar{N}_x + \beta_m^2 \bar{N}_y + 2\alpha_n \beta_m \bar{T}) a_{nm} + \tilde{L}_{nm}, \\ \tilde{L}_{nm} &= \left\{ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \tilde{\Phi}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \frac{\partial^2 \tilde{\Phi}}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 \tilde{\Phi}}{\partial x \partial y} \right\}_{nm}, \quad K_{nm} = -\left\{ \frac{\sigma w^3 - w^2/d}{1 + w/d} \right\}_{nm}, \\ P_{nm} &= -\frac{i\alpha_n V}{\varkappa_{nm}} \left\{ \frac{\partial \tilde{\varphi}_0^{(1)}}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{\varphi}_0^{(1)}}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial y} - w \left(\frac{\partial^2 \tilde{\varphi}_0^{(1)}}{\partial z^2} \right)_0 \right\}_{nm} + \\ &\quad + \left\{ V \left(\frac{\partial \tilde{\varphi}_0^{(1)}}{\partial x \partial z} \right)_0 w + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \tilde{\varphi}_0^{(1)}}{\partial x} \right)_0^2 + \left(\frac{\partial \tilde{\varphi}_0^{(1)}}{\partial y} \right)_0^2 + \left(\frac{\partial \tilde{\varphi}_0^{(1)}}{\partial z} \right)_0^2 \right] \right\}_{nm}, \end{aligned} \quad (2.12)$$

$\{\cdot\}_{mn} = (\Lambda_x \Lambda_y)^{-1} \int_0^{\Lambda_y} \int_0^{\Lambda_x} \{\cdot\} e^{-i\alpha_n x - i\beta_m y} dx dy$ — коэффициенты ряда Фурье для функций

в фигурных скобках. Для коэффициентов Фурье функции $\tilde{\Phi}$ в соответствии с последним уравнением (2.2) получаем выражение

$$\tilde{\Phi}_{nm} = -\frac{E_1}{\mathcal{A}_{nm}^4} \left\{ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right\}_{nm}. \quad (2.13)$$

Используя (2.10), можно найти критическую скорость и критические волновые числа, при которых возникает двумерная линейная неустойчивость [12, 13]:

$$V_{cr} = \sqrt{\frac{2\sqrt{2}}{3} \frac{2+q}{\sqrt{1+q}}}, \quad \alpha_{cr} = \sqrt{\frac{2}{1+q}}, \quad \beta_{cr} = 0.$$

Здесь $q = \sqrt{1 + 12B_1}$.

Формулировка задачи в виде системы уравнений (2.9) для комплексных амплитуд гармоник смещения поверхности a_{nm} с правыми частями, определяемыми выражениями (2.10)–(2.13) и спектральным представлением (2.8) для функции $\tilde{\varphi}^{(1)}(x, y, z, \tau)$, позволяет построить численное решение с помощью спектрального метода (см., например, [7]). Для вычисления коэффициентов Фурье нелинейных функций в (2.11)–(2.13) проводилась дискретизация $w(x, y, \tau)$ с $2(N+1)$ точками на периоде по координате x и с $2(M+1)$ точками по координате y (количество точек задано в соответствии со свойствами дискретного преобразования Фурье вещественной функции w). Значения функции $w(x, y, \tau)$ и ее производных по x и y в узлах дискретной сетки находились по коэффициентам a_{nm} разложения (2.7) с помощью обратного двумерного быстрого преобразования Фурье. Аналогично с помощью (2.8) определялись дискретные значения функции $\tilde{\varphi}^{(1)}$ и ее производных на поверхности $z = 0$. Значения функции $\tilde{\Phi}$ и ее производных находились с использованием (2.13). Нелинейные члены в фигурных скобках в выражениях (2.11)–(2.13) вычислялись в функциональном виде (в дискретных узлах сетки), после чего с помощью прямого быстрого преобразования Фурье находились входящие в эти выражения коэффициенты Фурье для нелинейных функций. Замкнутая система уравнений относительно a_{nm} решалась методом Рунге — Кутты четвертого порядка точности.

3. Результаты численного моделирования. Для проведения численных расчетов выберем параметры твердотельного слоя в соответствии с данными экспериментов [1]: $G = 5 \cdot 10^{-4}$ Н/см, $d = 0,32$ см, $\mu \approx 0,5$, $\rho_s \approx 1$ г/см³. Используя (1.5), получаем следующие значения безразмерных параметров модельного покрытия: $B_1 \approx 0,12$, $E_1 = 3(1 + \mu)/2 \approx 2,25$, $d_1 \approx 1,37$. Заметим, что введенный в [13] параметр нелокальной нелинейности в двумерной задаче равен $S = E_1/[2(1 - \mu^2)] \approx 1,5$. Коэффициент локальной нелинейности пружинного основания примем таким же, как в [12, 13]: $\sigma_1 = 8$.

Прежде чем перейти к изложению результатов численного моделирования, отметим, что в экспериментах [1] при значении параметра надкритичности $V/V_{cr} \approx 1,3$ (V_{cr} — измеренное критическое значение скорости потока V) вдоль гребней двумерных дивергентных волн появлялись малые неоднородности, при $V/V_{cr} \geq 1,6$ эти трехмерные возмущения быстро нарастали и наблюдался переход к трехмерным структурам несинусоидальной формы.

Как показано в [11–13], в динамической задаче при определении потенциала скорости потока методом возмущений отсутствует отбор периода дивергентных волн. Это означает, что при малых значениях волнового числа низшей гармоники по продольному направлению α_1 в (2.7) возбуждаются длинные волны с периодом Λ_x , имеющие максимум в спектре на этой гармонике. В работах [12, 13] для описания процесса отбора периода двумерных волн (когда первая гармоника установившегося спектра оказывается в области неустойчивости, а гармоники с меньшими значениями α_m подавляются) определялись возмущения

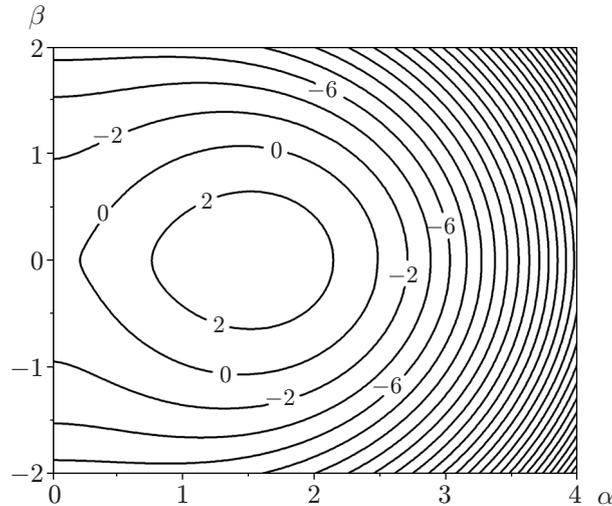


Рис. 2. Линии уровня инкремента линейной неустойчивости трехмерных гармонических возмущений с волновым вектором $\mathbf{k} = (\alpha, \beta)$ при $V/V_{cr} = 1,5$

потока при больших прогибах поверхности и вводилась локальная нелинейность пружинного основания (1.4), учет которой имеет принципиальное значение при описании процесса отбора периода. В рассматриваемой задаче при использовании метода возмущений для потенциала скорости потока также не удалось описать процесс отбора по волновому числу в продольном направлении. Поэтому для каждого значения скорости потока V период возбуждаемых волн Λ_x в продольном направлении задавался равным значению, рассчитанному в [12, 13] в рамках двумерной сильнонелинейной теории (что согласуется с экспериментальными данными). Выбор периода Λ_y в поперечном направлении определялся с учетом зависимости инкремента линейной неустойчивости трехмерных возмущений от волновых чисел в продольном и поперечном направлениях (см. (2.10) и рис. 2). Волновое число первой поперечной гармоники β_1 варьировалось в интервале от $1/4$ до $1/6$ ширины области неустойчивости по волновому числу β в поперечном направлении. В расчетах задавалось одинаковое количество продольных и поперечных гармоник $M = N = 15$, что обеспечивало попадание высших гармоник в область затухания. Соответственно дискретные функции координат содержали $2(M + 1) = 2(N + 1) = 32$ точки дискретизации на периоде в обоих направлениях (столько же гармоник с номерами n и m имеет дискретное преобразование Фурье функции w).

Результаты численного моделирования показывают, что при достаточно малых надкритичностях ($V/V_{cr} \leq 1,5$) подавление поперечных гармоник дивергентных волн приводит к установлению двумерного прогиба поверхности. При этом волны быстро приобретают существенно несинусоидальную шиповидную форму профиля вдоль оси x , что согласуется с экспериментальными данными и результатами расчетов [12, 13], в которых не использовалось приближение малых уклонов, и может рассматриваться как подтверждение применимости приближения малых уклонов при описании формы профиля волн. Возникновение двумерных волн можно интерпретировать как “выживание” в результате конкуренции поперечных гармоник с номером $m = 0$, соответствующим однородной по оси y деформации поверхности. При дальнейшем увеличении скорости потока ($V/V_{cr} \geq 1,6$) наряду с продольными гармониками ($m = 0$) возникают “наклонные” гармоники ($n = 1 \div 3$, $m = \pm 1$) (рис. 3), что приводит к установлению трехмерных дивергентных волн. Переход к трехмерным волнам фактически имеет скачкообразный характер, поскольку происходит в малом интервале изменения скорости потока. На рис. 4 показана пространственная струк-

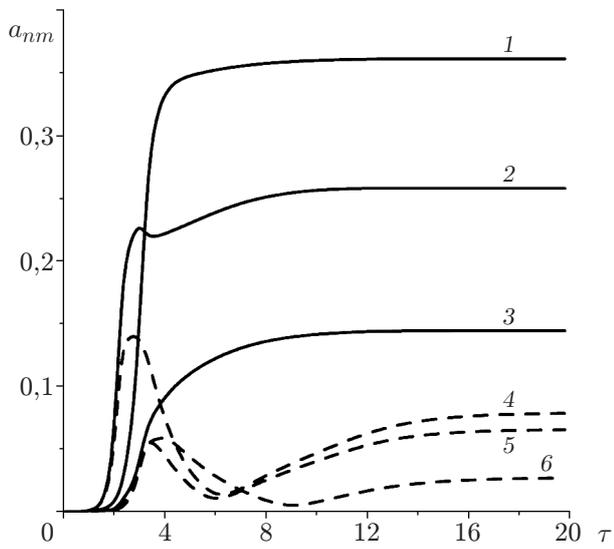


Рис. 3. Эволюция во времени амплитуд пространственных гармоник прогиба поверхности при $V/V_{cr} = 1,6$:

сплошные линии — гармоники с волновыми векторами, направленными вдоль потока; штриховые — гармоники с волновыми векторами, направленными под углом к потоку; 1-3 — $m = 0$ (1 — $n = 1$, 2 — $n = 2$, 3 — $n = 3$), 4-6 — $m = \pm 1$ (4 — $n = 2$, 5 — $n = 3$, 6 — $n = 1$)

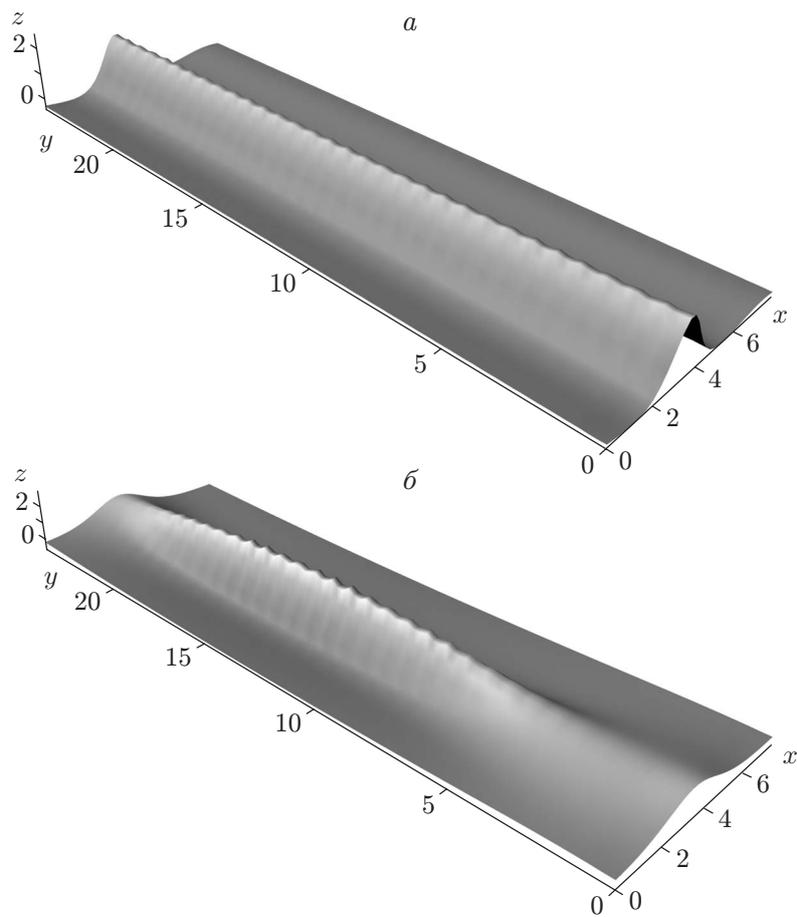


Рис. 4. Установившиеся волновые структуры смещения поверхности покрытия в течение одного пространственного периода:

a — $V/V_{cr} = 1,5$, $б$ — $V/V_{cr} = 1,6$

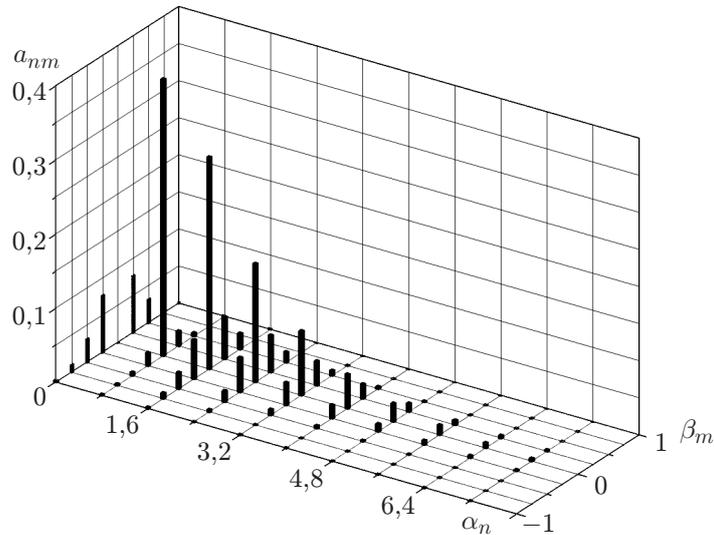


Рис. 5. Спектр по волновым числам трехмерной волновой структуры, представленной на рис. 4,б

тура установившихся прогибов поверхности в случаях $V/V_{cr} = 1,5; 1,6$. Форма трехмерных дивергентных волн (рис. 4,б) качественно согласуется с экспериментальными данными [1]. Пороговое значение отношения V/V_{cr} , при котором возникает трехмерный прогиб, близко к полученному в экспериментах.

На рис. 5 показан спектр по волновым числам периодической волны, профиль которой представлен на рис. 4,б. Видно, что этот спектр является сильно анизотропным и в поперечном направлении более узким, чем в продольном. Характер спада «хвостов» спектра подтверждает правильность выбора числа учтенных гармоник. Поведение амплитуд гармоник позволяет сделать вывод о наличии конкуренции гармоник и отборе их периодов, что проявляется в подавлении (при $V/V_{cr} \leq 1,5$) или «выживании» (при $V/V_{cr} \geq 1,6$) поперечных гармоник (см. рис. 3). Отбор периода можно рассматривать как результат несинхронного взаимодействия гармоник (см. [6]). В то же время солитоноподобная форма волны на рис. 4,б свидетельствует о синхронизации фаз гармоник, которая возникает вследствие их резонансного взаимодействия.

Определим вклады различных нелинейностей в процесс формирования установившихся волн. В [11–13] показано, что нелинейность, обусловленная обтеканием границы, имеет дестабилизирующий характер, так как в приближении малых уклонов резонансное взаимодействие кратных гармоник приводит к возникновению «взрывной» неустойчивости. Нелинейность изгиба пластины (которая в двумерной задаче является интегральной) ограничивает рост возмущений. Введение алгебраической локальной нелинейности (1.4) с использованием феноменологической теории необходимо для описания процесса отбора периода волн в продольном направлении [12, 13]. Несмотря на то что в проведенных расчетах длина волны в продольном направлении предполагалась известной, учет нелинейности (1.4) оказался важным для описания перехода от двумерных структур к трехмерным. В отсутствие стабилизирующего действия нелинейности (1.4) даже при скоростях, незначительно превышающих критическую скорость, наблюдалось быстрое разрастание спектра, что означает выход за границы области применимости модели.

Приведенные выше результаты получены при значениях $M = N = 15$. Увеличение числа гармоник в поперечном направлении y в два раза (при этом период волны в направлении y увеличивается в два раза) приводило к возникновению проблем со сходимостью

стью вычислительной процедуры вследствие быстрого разрастания спектра по β_m . По-видимому, более плотное заполнение спектра гармониками соответствует более сложным решениям (отметим, что в экспериментах [1] наблюдались не строго периодические, а квазипериодические структуры с элементами хаоса). Для построения более сложных решений необходимо применять более сложные модели, в которых не используется приближение малых уклонов, применяемое при решении гидродинамической части задачи.

Заключение. В данной работе построена теория перехода от двумерной неустойчивости дивергентных волн к трехмерной на модельном вязкоупругом покрытии, обтекаемом потенциальным потоком жидкости. Параметры покрытия выбраны путем его сравнения с твердотельным вязкоупругим слоем. На основе уравнений Кармана теории тонких пластин и разложения по малым уклонам поверхности получена замкнутая система уравнений для комплексных амплитуд гармоник смещения поверхности покрытия в потенциальном потоке.

С помощью спектрального метода проведено численное моделирование генерации дивергентных волн. Показано, что при увеличении скорости течения сначала устанавливаются двумерные волны с шиповидной формой профиля, после чего происходит резкий (фактически скачкообразный) переход к трехмерным волновым структурам. Скачкообразный характер перехода и форма поверхности трехмерных структур согласуются с экспериментальными данными. Показано, что возникновение трехмерных структур обусловлено наличием конкуренции и синхронизации пространственных гармоник смещения поверхности.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Gad-el-Hak M., Blackwelder R. F., Riley J. J.** On the interactions of compliant coatings with turbulent boundary layers // *J. Fluid Mech.* 1984. V. 140. P. 257–281.
2. **Carpenter P. W., Garrad A. D.** The hydrodynamic stability of flows over Kramer type compliant surfaces. 1. Tollmien — Schlichting instabilities // *J. Fluid Mech.* 1985. V. 155. P. 465–510.
3. **Carpenter P. W., Garrad A. D.** The hydrodynamic stability of flows over Kramer type compliant surfaces. 2. Flow-induced surface instabilities // *J. Fluid Mech.* 1986. V. 170. P. 199–232.
4. **Grotberg J. V.** Pulmonary flow and transport phenomena // *Annu. Rev. Fluid Mech.* 1994. V. 26. P. 529–571.
5. **Bandyopadhyay P. R., Henoeh C., Hrubes J. D., et al.** Experiments on the effect of ageing on compliant coating drag reduction // *Phys. Fluids.* 2005. V. 17, N 8. 085104.
6. **Рабинович М. И.** Введение в теорию колебаний и волн / М. И. Рабинович, Д. И. Трубецков. Саратов: Гос. учеб.-науч. центр “Колледж”, 1999.
7. **Гетлинг А. В.** Конвекция Рэлея — Бенара. Структуры и динамика. М.: Эдиториал УРСС, 1999.
8. **Должанский Ф. В., Крымов В. А., Манин Д. Ю.** Устойчивость и вихревые структуры квазидвумерных сдвиговых течений // *Успехи физ. наук.* 1990. Т. 160, № 7. С. 1–47.
9. **Скотт Э.** Нелинейная наука. Рождение и развитие когерентных структур. М.: Физматлит, 2007.
10. **Reutov V. P., Rybushkina G. V.** Hydroelastic instability threshold in a turbulent boundary layer over a compliant coating // *Phys. Fluids.* 1998. V. 10, N 2. P. 417–425.
11. **Реутов В. П., Рыбушкина Г. В.** Генерация нелинейных волн на вязкоупругом покрытии в турбулентном пограничном слое // *ПМТФ.* 2000. Т. 41, № 6. С. 50–59.

12. **Реутов В. П., Рыбушкина Г. В.** Отбор нелинейных дивергентных волн на модельном вязкоупругом покрытии в потенциальном потоке. Н. Новгород, 2008. (Препр. / Ин-т прикл. физики РАН; № 753).
13. **Reutov V. P., Rybushkina G. V.** Selection of the divergence waves on a model visco-elastic coating under a potential flow // Phys. Fluids. 2008. V. 20, N 9. 092108.
14. **Вольмир А. С.** Оболочки в потоке жидкости и газа. Задачи аэроупругости. М.: Наука, 1976.
15. **Duncan J. H., Waxman A. M., Tulin M. P.** The dynamics of waves at the interface between a visco-elastic coating and a fluid flow // J. Fluid Mech. 1985. V. 158. P. 177–199.

*Поступила в редакцию 24/I 2011 г.,
в окончательном варианте — 14/VII 2011 г.*
