

УДК 532.64

ВЛИЯНИЕ ВИДА ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ НА ЛИНИИ ТРЕХФАЗНОГО КОНТАКТА НА ХАРАКТЕРИСТИКИ ТЕЧЕНИЯ ПРИ ЗАПОЛНЕНИИ КАНАЛА

Е. И. Борзенко, Г. Р. Шрагер

Томский государственный университет, 634050 Томск, Россия

E-mails: borzenko@ftf.tsu.ru, shg@ftf.tsu.ru

Исследовано влияние различных моделей динамики линии трехфазного контакта на характеристики течения в процессе заполнения плоского канала. С помощью методики, основанной на совместном использовании алгоритма SIMPLE и метода инвариантов, численно решена определяющая система уравнений. Рассмотрены различные способы расчета движения контактной точки при выполнении условий прилипания и скольжения для значения динамического краевого угла $\theta = \pi$ без учета поверхностного натяжения на свободной границе. Показано, что во всей расчетной области, за исключением малой окрестности точки контакта, кинематические характеристики потока, а также распределения диссипативной функции и касательного напряжения слабо зависят от выбранного способа расчета движения контактной точки.

Ключевые слова: линия трехфазного контакта, свободная граница, прилипание, скольжение, способ расчета, диссипативная функция, касательное напряжение, сходимость.

Введение. Процессы растекания и смачивания часто встречаются в природе и используются в различных отраслях промышленности. Течения жидкости такого типа характеризуются наличием свободной поверхности и движущейся вдоль твердой стенки линии трехфазного контакта (ЛТК) газ — жидкость — твердое тело [1–3]. Начиная с 70-х гг. XX в. выполнено большое количество экспериментальных и теоретических исследований течений жидкости при наличии границы раздела и движущейся ЛТК. Обзор этих исследований представлен в работах [4–8]. Однако до сих пор остаются недостаточно изученными механизмы взаимодействия фаз на линии контакта, процесс формирования фронта поверхности раздела, особенности динамики контактной линии и течения жидкости в ее окрестности [9].

Результаты анализа классической математической модели динамики жидкости с использованием уравнений Навье — Стокса, естественных граничных условий на свободной поверхности, условий прилипания на движущейся линии контакта при значениях динамического краевого угла $\theta \neq 0, \pi$ показывают, что при определении динамических характеристик течений возникают особенности, приводящие к бесконечному увеличению параметров потока по мере приближения к линии контакта [10–12]. Динамический краевой угол, определяемый как угол между плоскостью, касательной к поверхности раздела в точке контакта, и твердой стенкой, называется также макроскопическим контактным углом [12, 13].

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (коды проектов 12-08-310003мол_а, 12-08-00313а).

© Борзенко Е. И., Шрагер Г. Р., 2015

Для устранения особенности в классической модели используется условие скольжения на твердой стенке в окрестности линии контакта. В работе [13] представлен достаточно полный обзор моделей скольжения на контактных линиях, в которых вводятся независимые предположения о динамическом краевом угле, позволяющие устранить сингулярность на линии контакта. Использование в моделях механизмов скольжения в качестве граничных условий обусловлено формированием газового слоя на твердой стенке в результате захвата воздуха фронтом свободной поверхности [14–16], существованием предельного напряжения адгезии [17], наличием шероховатости стенки [18] и релаксационных свойств поверхности раздела в окрестности линии контакта [19] и т. п.

Модели динамики линий контакта оказывают существенное влияние на форму границы раздела и характеристики течения в том случае, если капиллярные силы доминируют либо соизмеримы с другими силами, действующими в потоке, в частности при малых значениях капиллярного числа $Ca = \mu U / \sigma$ (μ — динамическая вязкость; U — характерная скорость; σ — коэффициент поверхностного натяжения). В работе [20], по-видимому, впервые проведен асимптотический анализ динамики смачивания при малых значениях Ca , при этом вводился дополнительный параметр, характеризующий размер области, в которой нарушается гипотеза сплошности среды. В работе [21] используется разложение по Ca более высокого порядка и вводится дополнительный параметр, характеризующий длину скольжения в окрестности ЛТК.

Поскольку математическая постановка задачи о движении жидкости при наличии границ раздела является сложной, при ее решении требуется использовать численные методы. В связи с этим возникает необходимость разработки алгоритмов численной реализации моделей динамики ЛТК и проведения анализа влияния этих моделей на результаты расчетов.

Целью данной работы является исследование влияния моделей динамики ЛТК и способов их численной реализации на форму свободной поверхности, кинематические и динамические характеристики течения при заполнении плоского канала вязкой жидкостью. При этом режим течения и характер взаимодействия фаз на ЛТК таковы, что краевой угол $\theta = \pi$ и капиллярные силы малы по сравнению с инерционными, вязкими и гравитационными силами в потоке. Значение динамического краевого угла, равное π , используется в работах [12, 22, 23]. Результаты экспериментов, в которых по мере увеличения капиллярного числа значение краевого угла θ стремится к π , приведены в [24–28]. Подобные течения возникают при переработке полимерных жидкостей, поэтому рассматриваемая задача является базовой при анализе процесса формования изделий методом литья под давлением. Для решения задач такого типа используется классическая постановка, не учитывающая капиллярные силы. В работах [29, 30] подробно обсуждается проблема анализа процесса заполнения. Современное состояние проблемы исследования эволюции свободной поверхности и характеристик фонтанирующего течения представлено в работах [31, 32]. Течения расплавов полимеров при наличии свободной границы характеризуются значениями $Ca \gg 1$, поэтому допущение о пренебрежимо малых капиллярных силах часто используется при решении задач такого типа [33, 34], а его справедливость подтверждается результатами расчетов (см., например, [31]).

Постановка задачи. Рассматривается процесс заполнения вертикального плоского канала несжимаемой вязкой жидкостью в поле силы тяжести. Область решения показана на рис. 1. Течение описывается уравнениями движения и неразрывности, которые в безразмерных переменных имеют вид

$$\text{Re} \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \Delta u,$$

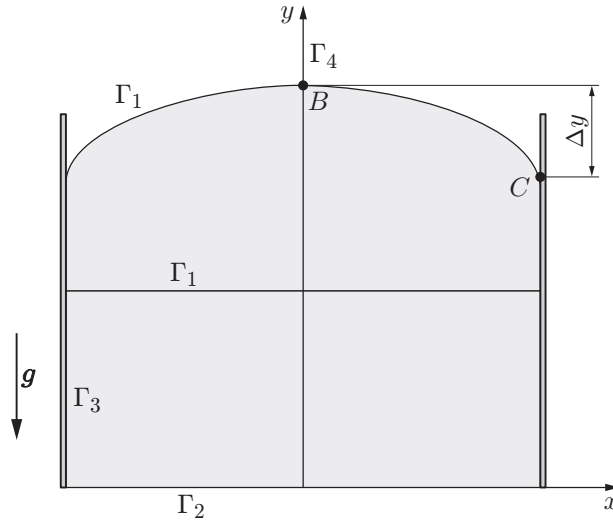


Рис. 1. Область решения

$$\operatorname{Re} \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \Delta v - W,$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0.$$

Здесь t — время; u, v — проекции вектора скорости на оси декартовой системы координат x, y соответственно; p — давление; $\operatorname{Re} = \rho UL/\mu$ — число Рейнольдса; $W = \rho g L^2/(\mu U)$ — безразмерный критерий, характеризующий соотношение гравитационных и вязких сил; ρ — плотность; μ — динамическая вязкость; g — ускорение свободного падения. В качестве характерного масштаба обезразмеривания длины выбрана полуширина канала L , скорости — среднерасходная скорость во входном сечении U , давления — величина $\mu U/L$, времени — величина L/U .

На свободной границе Γ_1 (см. рис. 1) ставятся условия отсутствия касательного напряжения и равенства нормального давления внешнему давлению, которое без ограничения общности можно считать равным нулю. Кроме того, на свободной границе выполняется кинематическое условие. На входной границе Γ_2 задается профиль продольной скорости, характерный для установившегося течения между бесконечными плоскостями, поперечная скорость равна нулю. На твердой стенке Γ_3 выполняется условие прилипания. На линии симметрии Γ_4 ставится условие симметрии. Силы поверхностного натяжения не учитываются.

Таким образом, граничные условия записываются в виде

$$\begin{aligned} \Gamma_1: \quad & \frac{\partial v_n}{\partial s} + \frac{\partial v_s}{\partial n} = 0, \quad p = 2 \frac{\partial v_n}{\partial n}, \\ \Gamma_2: \quad & u = 0, \quad v = 1,5(1 - x^2), \\ \Gamma_3: \quad & u = 0, \quad v = 0, \\ \Gamma_4: \quad & u = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial x} = 0, \end{aligned} \tag{1}$$

где v_n, v_s — нормальная и касательная составляющие скорости на свободной поверхности. Условия (1) записаны в локальной декартовой системе координат (n, s) , связанной со сво-

бодной поверхностью. Движение на свободной границе Γ_1 осуществляется в соответствии с кинематическим условием, которое в лагранжевом представлении записывается в виде

$$\frac{dx}{dt} = u, \quad \frac{dy}{dt} = v. \quad (2)$$

В начальный момент времени канал частично заполнен покоящейся жидкостью, свободная граница расположена на достаточно большом расстоянии от входной границы Γ_2 , что позволяет исключить ее влияние на характер течения в окрестности границы Γ_2 .

Условие прилипания в точке C (см. рис. 1) и условие скольжения на линии контакта являются совместимыми с точки зрения кинематики и предполагают катящееся движение фронта свободной границы по твердой стенке. При этом материальные точки, находящиеся на поверхности газ — жидкость, попадают на твердую стенку, становясь точками контактной линии. Такой режим движения подтверждается экспериментально [11, 35]. Однако необходимо также определить величину динамического краевого угла. В предположении слабой смачиваемости поверхности твердого тела и больших значений капиллярного числа Ca можно считать, что при заполнении канала краевой угол равен π [25]. В используемом в дальнейшем вычислительном алгоритме реализуется кинематическое условие (2), соответствующее режиму накатывания свободной поверхности на твердую стенку при краевом угле, приблизительно равном π начиная с некоторого момента времени.

Помимо кинематического условия (2), используемого для каждой точки свободной границы, применяется условие $\theta = \pi$. Кроме того, используется постановка задачи, в которой в точке контакта выполняется условие отсутствия касательного напряжения (1), а нормальная скорость равна нулю, при этом касательная скорость на твердой стенке в окрестности точки C вычисляется по формуле

$$v(1, y) = V_C(\varepsilon/V_C)^{(y_C - y)/l}, \quad y_C - l \leq y \leq y_C, \quad (3)$$

где V_C — касательная скорость в точке контакта; l — безразмерная длина скольжения; ε — параметр релаксации. В данном случае наряду с условием (2) выполняется условие проскальзывания.

Существует большое количество условий проскальзывания. В данном случае условие проскальзывания вводится для устранения математической особенности и обеспечения сходимости вычислительного алгоритма. В то же время это условие может рассматриваться как математическая модель, адекватная некоторой физической гипотезе. Входящие в модель параметры имеют определенный физический смысл и могут использоваться для согласования численного решения с экспериментальными данными.

Методика численного решения. Для решения поставленной задачи применяется конечно-разностный метод. Область решения покрывается разнесенной разностной сеткой, при этом для расчета искомых переменных во внутренних узлах используется алгоритм SIMPLE [36]. Свободная граница представляется в виде набора равномерно распределенных маркеров-частиц, при этом первый маркер лежит на линии симметрии, а последний — на ЛТК. Расчет составляющих скорости выполняется с помощью метода инвариантов [37], в основе которого лежит предположение о выполнении условия отсутствия касательных напряжений и уравнения неразрывности для каждого маркера. Маркеры свободной поверхности, за исключением последнего, движутся в соответствии с кинематическим условием (2). В данной работе рассматривались следующие механизмы движения маркера на ЛТК и способы их расчета.

1. На линии трехфазного контакта выполняется условие прилипания, т. е. маркер C имеет нулевую скорость. В момент времени, когда маркер M попадает на стенку, маркер C перемещается в новое положение (рис. 2, а). Согласно такому алгоритму положение линии

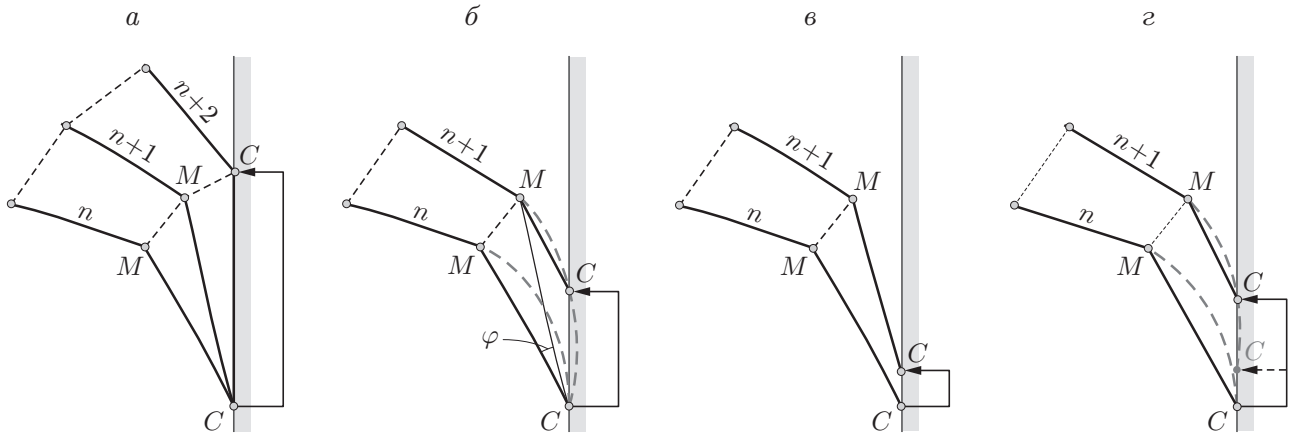


Рис. 2. Механизмы движения маркеров при различных способах расчета:
 а — способ 1, б — способ 2, в — способ 3, г — способ 4

контакта дискретно меняется и начиная с некоторого момента времени значение краевого угла становится приближенно равным π (способ 1).

2. На линии трехфазного контакта выполняется условие прилипания, для определения положения точки C используется равенство $\theta = \pi$. Алгоритм расчета заключается в следующем. Участок свободной границы CM представляется в виде параболы, при этом линия стенки является касательной к этой параболе в точке C , где расположена ее вершина (рис. 2,б). Движение ЛТК происходит за счет накатывания жидкости на твердую стенку (подобно накатыванию колеса) в соответствии с формулой

$$y_C^{n+1} = y_C^n + \frac{(y_M^n - y_C^n)^2}{|x_M^n - x_C^n|} \frac{\operatorname{tg} \varphi}{\cos \varphi},$$

где φ — угол поворота отрезка MC ; верхний индекс — временной шаг, нижний — обозначение маркера (способ 2).

3. Реализуется механизм движения, соответствующий способу 1, при скольжении точки C вдоль твердой стенки со скоростью, вычисляемой по формуле (3) (рис. 2,в). Движение контактной линии происходит за счет скольжения, а также за счет накатывания фронта свободной границы на твердую стенку (способ 3).

4. Реализуется механизм движения, соответствующий способу 2, при скольжении точки C вдоль твердой стенки. Движение ЛТК на каждом шаге по времени происходит по двум механизмам. Сначала точка C смещается в соответствии с условием скольжения, затем реализуется механизм накатывания при краевом угле, равном π (рис. 2,г) (способ 4).

В окрестности свободной границы имеет место фонтанирующее течение, при котором по мере заполнения канала частицы-маркеры “скатываются” к точке контакта и их распределение вдоль свободной границы становится неравномерным. Поэтому на участках, где расстояние между соседними маркерами больше шага основной расчетной сетки, вводятся дополнительные маркеры.

Результаты расчетов. Исследуем влияние различных способов расчета динамики ЛТК на кинематические характеристики течения и сеточную сходимость вычислительного алгоритма. В качестве кинематических характеристик рассматриваются составляющие вектора скорости и форма свободной границы. Форма свободной границы характеризуется параметром $\chi = \Delta y/L$, определяющим положение точки B на линии симметрии относительно точки контакта C (см. рис. 1).

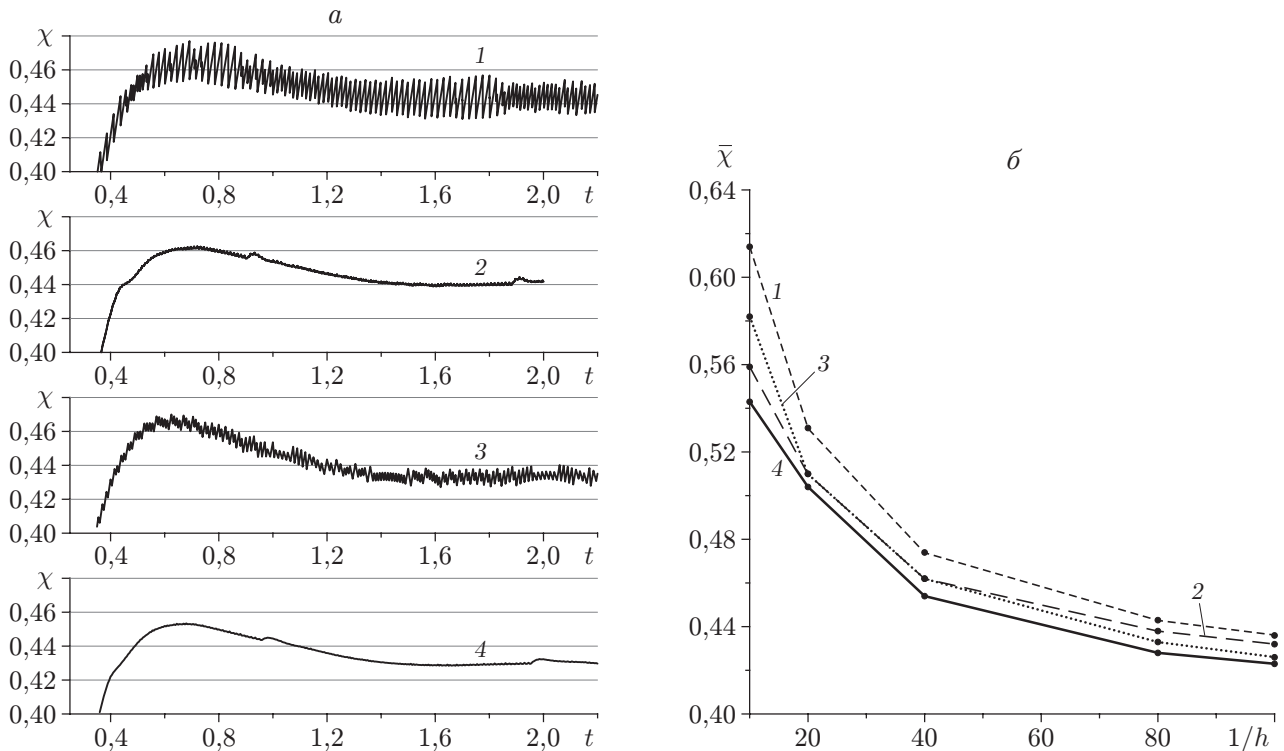


Рис. 3. Эволюция параметра течения χ (а) и его зависимость от шага сетки (б) при различных способах расчета:
1 — способ 1; 2 — способ 2; 3 — способ 3; 4 — способ 4

На рис. 3,а показана эволюция параметра χ со временем при различных способах расчета динамики ЛТК. Используется квадратная расчетная сетка с шагом $h = 1/80$, максимальный шаг по времени ограничен условием Куранта [38]. Во всех расчетах погрешность выполнения закона сохранения массы не превышает 1 %. Все результаты расчетов получены при $Re = 0,01$, $W = 10$. Кривые 3, 4, соответствующие способам расчета движения ЛТК со скольжением, получены при $l = 0,2$, $\varepsilon = 0,001$. Во всех случаях наблюдается квазиустановившаяся форма свободной границы. Осцилляции характеристики обусловлены дискретным характером накатывания фронта потока на твердую стенку. Для способов 2, 4, при использовании которых положение точки контакта определяется из условия $\theta = \pi$, амплитуда осцилляций значительно меньше, чем для способов, при использовании которых точка контакта определяется непосредственно из разностного аналога кинематического условия. Незначительные изменения амплитуды осцилляций во времени обусловлены перестраиванием расчетной сетки на свободной границе при вводе дополнительных частиц-маркеров в процессе расчета.

На рис. 3,б представлена зависимость осредненных значений $\bar{\chi}$ для квазиустановившихся форм свободной границы от числа узлов сетки в направлении оси x , полученная с использованием рассматриваемых способов расчета движения контактной точки. Характер кривых подтверждает сеточную сходимость при вычислении формы свободной границы. Максимальное различие значений параметра $\bar{\chi}$ не превышает 5 %. Полученные значения $\bar{\chi}$ согласуются с данными работы [31]. В табл. 1 приведены координаты точек свободной границы, полученные при использовании различных способов расчета, в момент времени $t = 3$. Формы свободной поверхности практически совпадают на всей ширине канала, за исключением окрестности точки контакта. После установления решения фронт

Таблица 1

Координаты точек свободной границы, полученные при использовании различных способов расчета, в момент времени $t = 3$

x	χ			
	Способ 1	Способ 2	Способ 3	Способ 4
0	4,1006	4,1013	4,0993	4,1009
0,10	4,0987	4,0994	4,0974	4,0989
0,20	4,0929	4,0936	4,0916	4,0932
0,30	4,0829	4,0837	4,0817	4,0833
0,40	4,0682	4,0690	4,0672	4,0687
0,50	4,0480	4,0488	4,0472	4,0486
0,60	4,0209	4,0217	4,0202	4,0217
0,70	3,9845	3,9853	3,9842	3,9854
0,80	3,9343	3,9351	3,9345	3,9355
0,90	3,8593	3,8600	3,8600	3,8608
0,95	3,8023	3,8029	3,8036	3,8041
1,00	3,6647	3,6603	3,6701	3,6686

Таблица 2

Значения продольной и поперечной скоростей в различных точках свободной границы

x	Способ 1		Способ 2		Способ 3		Способ 4	
	U	V	U	V	U	V	U	V
0	0	0,9990	0	0,9997	0	0,9991	0	0,9995
0,10	0,0705	0,9962	0,0707	0,9969	0,0693	0,9964	0,0697	0,9968
0,20	0,1404	0,9879	0,1409	0,9886	0,1381	0,9883	0,1390	0,9885
0,30	0,2094	0,9731	0,2101	0,9737	0,2058	0,9740	0,2073	0,9740
0,40	0,2768	0,9507	0,2778	0,9512	0,2719	0,9522	0,2739	0,9518
0,50	0,3415	0,9182	0,3428	0,9186	0,3350	0,9207	0,3377	0,9199
0,60	0,4018	0,8717	0,4032	0,8722	0,3937	0,8758	0,3967	0,8746
0,70	0,4538	0,8047	0,4554	0,8050	0,4440	0,8112	0,4473	0,8091
0,80	0,4876	0,7042	0,4890	0,7045	0,4760	0,7140	0,4799	0,7117
0,90	0,4735	0,5393	0,4750	0,5382	0,4600	0,5591	0,4636	0,5495
0,95	0,4237	0,4160	0,4260	0,4130	0,4134	0,4399	0,4164	0,4315
1,00	0	0	0	0	0	0,1058	0	0,0983

потока движется вдоль канала со среднерасходной скоростью. Значения продольной и поперечной скоростей в точках свободной границы, представленных в табл. 1, приведены в табл. 2. Эти значения, полученные при использовании рассматриваемых в данной работе способов расчета, хорошо согласуются.

Полученные результаты свидетельствуют о сходимости вычислительного алгоритма для рассмотренных моделей динамики ЛТК и соответствии расчетных кинематических характеристик течения экспериментальным данным. Некорректность классической постановки задачи не оказывает влияния на результаты расчета кинематических характеристик для рассматриваемых условий течения. Результаты расчетов таких режимов течения при заполнении круглой трубы, полученные методом конечных элементов в рамках классической постановки задачи, согласуются с экспериментальными данными о форме свободной границы [39].

На рис. 4–6 показано влияние различных способов расчета движения ЛТК на динамические характеристики течения, а также зависимость этих характеристик от шага

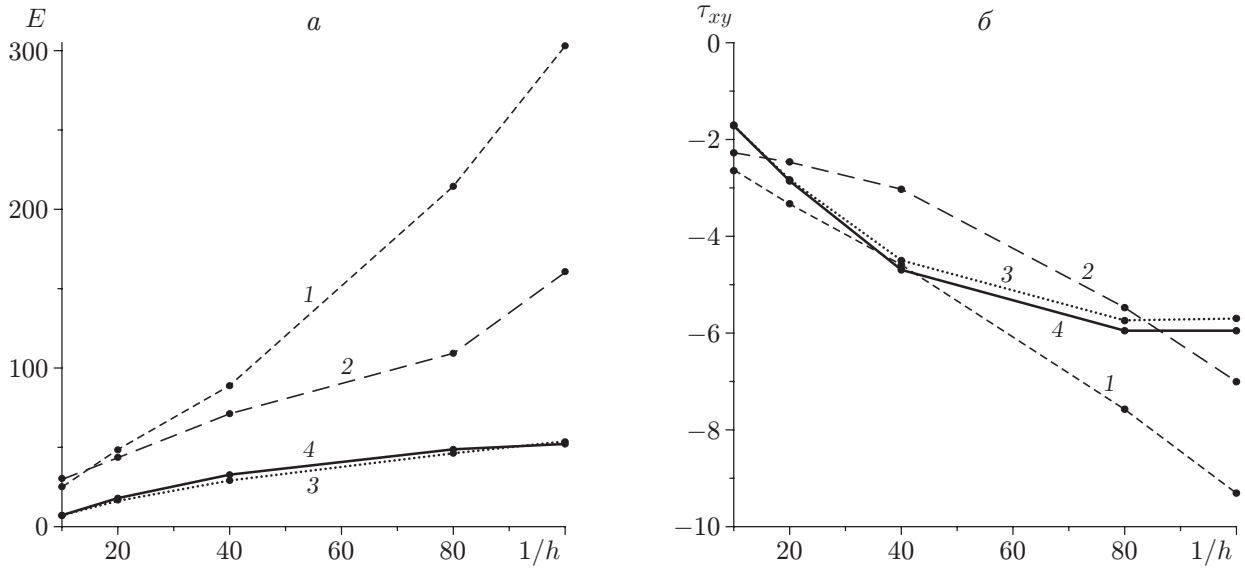


Рис. 4. Зависимости диссипативной функции (а) и касательного напряжения (б) от шага сетки при различных способах расчета:
1 — способ 1; 2 — способ 2; 3 — способ 3; 4 — способ 4

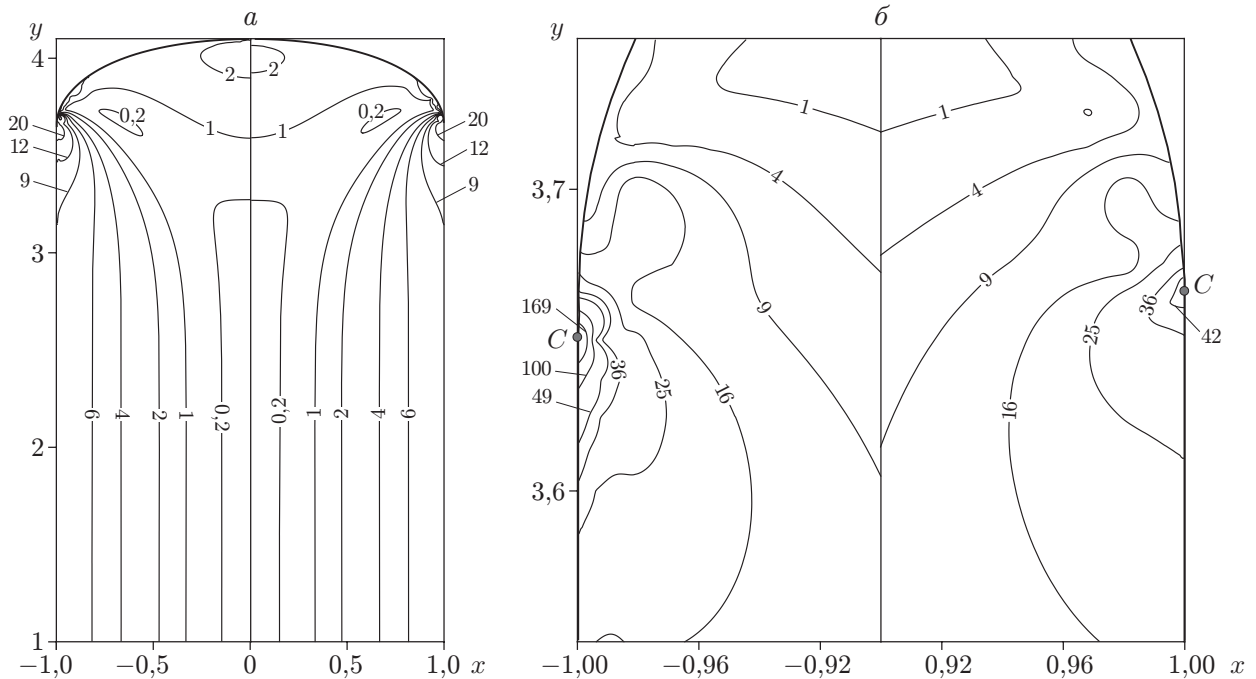


Рис. 5. Распределения диссипативной функции в потоке во всей расчетной области (а) и в малой окрестности точки контакта (б) при различных способах расчета:
слева — способ 1, справа — способ 4

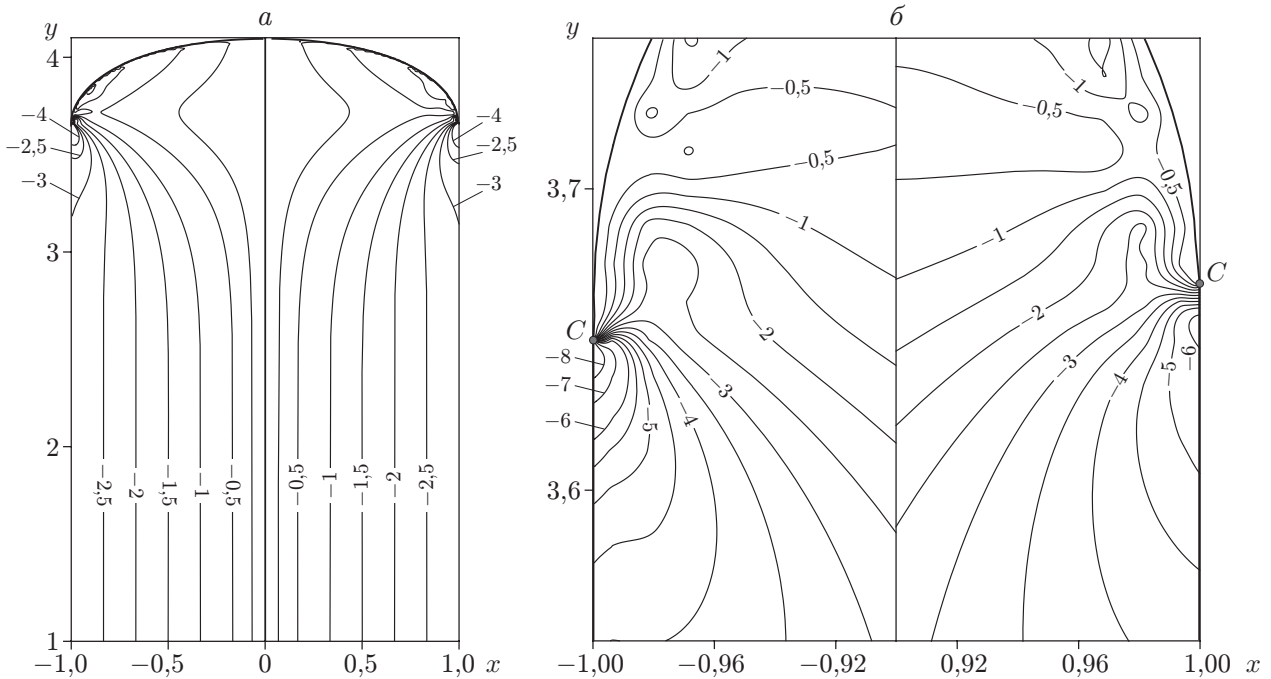


Рис. 6. Распределения касательного напряжения в потоке во всей расчетной области (а) и в малой окрестности точки контакта (б) при различных способах расчета:
 слева — способ 1, справа — способ 4

сетки. В качестве динамических характеристик рассматриваются диссипативная функция E , значение которой равно удвоенному второму инварианту тензора скоростей деформаций, и касательное напряжение τ_{xy} . На рис. 4,а представлена зависимость значений диссипативной функции в точке контакта от числа узлов в направлении оси x при различных способах расчета движения ЛТК. Характер кривых 1, 2, полученных при использовании различных способов расчета с условиями прилипания в контактной точке, свидетельствует об отсутствии сеточной сходимости. Этот результат, полученный с использованием способа 1 (кривая 1), обусловлен наличием особенности в точке контакта. Для второго способа (кривая 2) отсутствие сходимости, по-видимому, вызвано наличием ошибки в аппроксимации условия при $\theta = \pi$. Результаты расчета с учетом условия скольжения (кривые 3, 4) свидетельствуют о наличии сеточной сходимости при уменьшении шага сетки. Аналогичные результаты, полученные для значений касательного напряжения, представлены на рис. 4,б. Кривые 3, 4 характеризуют изменение касательного напряжения в точке твердой стенки, удаленной от точки контакта на расстояние, равное 0,01, поскольку в точке контакта задается условие скольжения. Результаты исследования сеточной сходимости для касательного напряжения свидетельствуют о наличии особенности в точке контакта в классической постановке задачи и показывают, что использование условия скольжения позволяет устранить эту особенность. Распределения диссипативной функции в потоке в момент времени $t = 3$, полученные с использованием способов 1, 4, показаны на рис. 5,а. Наблюдается хорошее соответствие изолиний диссипативной функции в выбранном масштабе. Распределения диссипативной функции в малой окрестности точки контакта представлены на рис. 5,б. При использовании обоих способов расчета максимальные значения функции достигаются в окрестности точки контакта. В большей части потока распределение диссипативной функции практически не зависит от способа расче-

та движения контактной точки, различия наблюдаются лишь в малой окрестности точки контакта. Поля касательного напряжения при $t = 3$ представлены на рис. 6. Так же как и на рис. 5, в большей части потока изолинии, полученные с использованием способов 1, 4, хорошо согласуются (рис. 6,а), различие имеет место лишь в малой окрестности точки контакта (рис. 6,б).

Заключение. В результате проведенного исследования показано влияние моделей динамики ЛТК на кинематические и динамические характеристики течения вязкой жидкости со свободной границей без учета капиллярных сил и сходимость вычислительного алгоритма. Способы расчета движения контактной точки основаны на использовании условий прилипания и скольжения при значении динамического краевого угла $\theta = \pi$. Из анализа полученных результатов следует, что кинематические характеристики течения, имеющего место при заполнении канала, согласуются с экспериментальными данными. Результаты расчетов динамических характеристик, в частности диссипативной функции и касательного напряжения, свидетельствуют об отсутствии сходимости численного метода при использовании условия прилипания в контактной точке и о ее наличии при использовании условия скольжения. Для рассматриваемых условий течения влияние особенностей расчета движения в точке контакта на характеристики потока проявляется в малой окрестности этой точки.

ЛИТЕРАТУРА

1. Сумм Б. Д. Физико-химические основы смачивания и растекания / Б. Д. Сумм, Ю. В. Горюнов. М.: Химия, 1976.
2. de Gennes P. D. Wetting: statics and dynamics // Rev. Modern Phys. 1985. V. 57, iss. 3, pt 1. P. 827–863.
3. Bonn D., Eggers J., Indekeu J., et al. Wetting and spreading // Rev. Modern Phys. 2009. V. 81, iss. 2. P. 739–805.
4. Dussan V. E. B. On the spreading of liquids on solid surface: static and dynamics contact line // Annu. Rev. Fluid Mech. 1979. V. 11. P. 371–400.
5. Dussan V. E. B., Rame E., Garoff S. On identifying the appropriate boundary conditions at a moving contact line: on experimental investigation // J. Fluid Mech. 1991. V. 230. P. 97–116.
6. Blake T. D. The physics of moving wetting lines // J. Colloid Interface Sci. 2006. V. 299, iss. 1. P. 1–13.
7. Shikhmurzaev Y. D. Singularities at the moving contact line. Mathematical, physical and computational aspects // Physica D. Nonlinear Phenomena. 2006. V. 217, iss. 2. P. 121–133.
8. Shikhmurzaev Y. D. Some dry facts about dynamic wetting // Eur. Phys. J. Spec. Topics. 2011. V. 197, iss. 1. P. 47–60.
9. Blake T. D. Discussion notes: A more collaborative approach to the moving contact-line problem? // Eur. Phys. J. Spec. Topics. 2011. V. 197, iss. 1. P. 343–345.
10. Huh C., Scriven L. E. Hydrodynamic model of steady movement of a solid/liquid/fluid contact line // J. Colloid Interface Sci. 1971. V. 35, iss. 1. P. 85–101.
11. Dussan V. E. B., Davis S. H. On the motion of a fluid-fluid interface along a solid surface // J. Fluid Mech. 1974. V. 65, pt 1. P. 71–95.
12. Пухначев В. В., Солонников В. А. К вопросу о динамическом краевом угле // Прикл. математика и механика. 1982. Т. 46, № 6. С. 961–971.
13. Shikhmurzaev Y. D. Moving contact lines in liquid/liquid/solid structure // J. Fluid Mech. 1997. V. 334. P. 211–249.

14. **Burley R., Kennedy B. S.** An experimental study of air entrainment at a solid/liquid/gas interface // *Chem. Engng Sci.* 1976. V. 31, iss. 10. P. 901–911.
15. **Blake T. D., Ruschak K. J.** A maximum speed of wetting // *Nature.* 1979. V. 282. P. 489–491.
16. **Gutoff E. B., Kendrick C. E.** Dynamic contact angle // *AIChE J.* 1982. V. 28, iss. 3. P. 459–466.
17. **Durbin P. A.** Considerations on the moving contact-line singularity, with application to frictional drag on a slender drop // *J. Fluid Mech.* 1988. V. 197. P. 157–169.
18. **Hocking L. M.** A moving fluid interface on a rough surface // *J. Fluid Mech.* 1976. V. 76, iss. 4. P. 801–817.
19. **Huh C., Mason S. G.** The steady movement of a liquid meniscus in a capillary tube // *J. Fluid Mech.* 1977. V. 81, iss. 3. P. 401–419.
20. **Воинов О. В.** Гидродинамика смачивания // *Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа.* 1976. № 5. С. 76–84.
21. **Cox R. G.** The dynamics of the spreading of liquids on a solid surface. Pt 1. Viscous flow // *J. Fluid Mech.* 1986. V. 168. P. 169–194.
22. **Байокки К., Пухначев В. В.** Задачи с односторонними ограничениями для уравнений Навье — Стокса и проблема динамического краевого угла // *ПМТФ.* 1990. № 2. С. 27–40.
23. **Ngan C. G., Dussan V. E. B.** The moving contact line with 180° advancing contact angle // *Phys. Fluids.* 1984. V. 27, N 12. P. 2785–2787.
24. **Elliot G. E. P., Riddiford A. C.** Dynamic contact angle. 1. The effect of impressed motion // *J. Colloid Interface Sci.* 1967. V. 23, iss. 3. P. 389–398.
25. **Hoffman R. L.** A study of the advancing interface. 1. Interface shape in liquid — gas systems // *J. Colloid Interface Sci.* 1975. V. 50, iss. 2. P. 228–241.
26. **Blake T. D., Shikhmurzaev Y. D.** Dynamic wetting by liquids of different viscosity // *J. Colloid Interface Sci.* 2002. V. 253, iss. 1. P. 196–202.
27. **Wang X., Peng X., Lee D.** Dynamic wetting and stress singularity on contact line // *Sci. China. Ser. E. Technol. Sci.* 2003. V. 46, iss. 4. P. 407–417.
28. **Wilson M. C. T., Summers J. L., Shikhmurzaev Y. D., et al.** Nonlocal hydrodynamic influence on the dynamic contact angle: slip models versus experiment // *Phys. Rev. E.* 2006. V. 73, iss. 4. P. 041606-1–041606-10.
29. **Coyle D. J., Blake J. W., Macosko C. W.** The kinematics of fountain flow in mold-filling // *AIChE J.* 1987. V. 33, iss. 7. P. 1168–1177.
30. **Kamal M. R., Goyal S. K., Chu E.** Simulation of injection mold filling of viscoelastic polymer with fountain flow // *AIChE J.* 1988. V. 34, iss. 1. P. 94–106.
31. **Mitsoulis E.** Fountain flow revisited: The effect of various fluid mechanics parameters // *AIChE J.* 2010. V. 56, iss. 5. P. 1147–1162.
32. **Борзенко Е. И., Фролов О. Ю., Шрагер Г. Р.** Фонтанирующее течение вязкой жидкости при заполнении канала с учетом диссипативного разогрева // *Изв. РАН. Механика жидкости и газа.* 2014. № 1. С. 44–53.
33. **Mavridis H., Hrymak A. N., Vlachopoulos J.** Mathematical modeling of injection mold filling: A review // *Adv. Polymer Technol.* 1986. V. 6, iss. 4. P. 457–466.
34. **Li C. S., Hung C. F., Shen Y. K.** Computer simulation and analysis of fountain flow and filling process in injection molding // *J. Polymer. Res.* 1994. V. 1, iss. 2. P. 163–173.
35. **Ngan C. G., Dussan V. E. B.** On the nature of the dynamic contact angle: an experimental study // *J. Fluid Mech.* 1982. V. 118. P. 27–40.
36. **Патанкар С.** Численные методы решения задач теплообмена и механики жидкости. М.: Энергоатомиздат, 1984.

37. **Васенин И. М., Нефедов А. П., Шрагер Г. Р.** Метод расчета течений вязкой жидкости со свободной поверхностью // Численные методы механики сплошной среды. Новосибирск: Вычисл. центр Сиб. отд-ния АН СССР, 1985. Т. 16, № 6. С. 29–43.
38. **Годунов С. К.** Разностные схемы / С. К. Годунов, В. С. Рябенский. М.: Наука, 1977.
39. **Behrens R. A., Crochet M. J., Denson C. D., Metzner A. B.** Transient free-surface flows: motion of a fluid advancing in a tube // AIChE J. 1987. V. 33, iss. 7. P. 1178–1186.

*Поступила в редакцию 3/XII 2013 г.,
в окончательном варианте — 7/II 2014 г.*
