УДК 517.957+532.5.013.4

КРИТЕРИИ УСТОЙЧИВОСТИ СДВИГОВОГО ТЕЧЕНИЯ ЖИДКОСТИ И ГИПЕРБОЛИЧНОСТЬ УРАВНЕНИЙ ТЕОРИИ ДЛИННЫХ ВОЛН

Е. Ю. Князева, А. А. Чесноков

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 630090 Новосибирск
Новосибирский государственный университет, 630090 Новосибирск
E-mails: la.lena@ngs.ru, chesnokov@hydro.nsc.ru

Показано соответствие условий гиперболичности интегродифференциальных уравнений теории длинных волн классическим критериям устойчивости сдвиговых потоков идеальной жидкости.

Ключевые слова: сдвиговые потоки, критерии устойчивости, длинные волны, гиперболичность.

Введение. Классические результаты исследования устойчивости плоскопараллельных сдвиговых течений идеальной жидкости, полученные в рамках линейного приближения, являются важнейшей составляющей современной теории гидродинамической устойчивости [1, 2]. В последнее время существенный прогресс достигнут в изучении нелинейных волновых процессов. Результаты исследования ряда основных задач нелинейной теории распространения длинных поверхностных и внутренних волн в неоднородной жидкости приведены в монографии [3]. Применение метода В. М. Тешукова [4] для теоретического анализа нелинейных моделей сдвигового течения тонкого слоя жидкости позволяет определить скорости распространения возмущений и сформулировать условия гиперболичности интегродифференциальных уравнений движения. При этом потеря гиперболичности системы уравнений на рассматриваемом решении трактуется в [3] как возникновение длинноволновой неустойчивости.

Целью данной работы является сопоставление условий гиперболичности интегродифференциальных уравнений теории длинных волн и классических критериев устойчивости сдвиговых течений, а также выявление связи между потерей свойства гиперболичности уравнений движения и возникновением неустойчивости Кельвина — Гельмгольца.

1. Сдвиговые течения под крышкой. Плоскопараллельные движения идеальной несжимаемой жидкости между пластинами $y = 0$ и $y = h$ в поле силы тяжести описываются уравнениями Эйлера с граничными условиями

$$u_t + uu_x + vu_y + \rho^{-1}p_x = 0, \qquad v_t + uv_x + vv_y + \rho^{-1}p_y = -g,$$
$$u_x + v_y = 0, \qquad v\big|_{y=0} = 0, \qquad v\big|_{y=h} = 0. \tag{1}$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 10-01-00338) и Совета по грантам Правительства РФ для поддержки научных исследований, проводимых в российских вузах (государственный контракт № 11.G34.31.0035), а также в рамках Интеграционного проекта СО РАН № 44.

Здесь u, v — проекции вектора скорости на оси x, y; t — время; p — давление. Без ограничения общности плотность жидкости ρ, ускорение свободного падения g и высоту канала h можно считать равными единице. Уравнения (1) имеют класс решений

$$u = U(y), \qquad v = 0, \qquad p = \rho g(h - y) + p_0(t), \tag{2}$$

описывающих сдвиговые течения жидкости. В результате линеаризации системы (1) на заданном сдвиговом потоке (2) и построения решений для малых возмущений в виде элементарных волновых пакетов $\boldsymbol{u}(t,x,y) = \hat{\boldsymbol{u}}(y)\exp\left(i\alpha(x - ct)\right)$ получаем уравнение Рэлея

$$(U - c)(\psi'' - \alpha^2\psi) - U''\psi = 0, \qquad \psi\big|_{y=0} = 0, \quad \psi\big|_{y=h} = 0. \tag{3}$$

На основе (3) выводятся классические критерии устойчивости [1, 2], зависящие от свойств профиля скорости основного течения.

Критерий Рэлея. Достаточным условием устойчивости плоскопараллельного течения является отсутствие у профиля скорости $U(y)$ точек перегиба.

Критерий Фьертофта. Если существует постоянная K, такая что

$$(U(y) - K)U''(y) \geqslant 0, \tag{4}$$

то течение устойчиво.

Критерий Розенблюта — Симона. Пусть $U'(y) > 0$ и имеется одна точка перегиба $U''(y_s) = 0$, причем $U'''(y_s) < 0$. Тогда для устойчивости течения необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие

$$J = \frac{1}{U'(y)(U(y) - U(y_s))}\Big|_0^h - \int\limits_0^h \Big(\frac{1}{U'(y)}\Big)' \frac{dy}{U(y) - U(y_s)} > 0. \tag{5}$$

В длинноволновом приближении система уравнений (1) принимает вид [5]

$$u_t + uu_x + vu_y + \rho^{-1}p_x = 0, \quad p_y = -\rho g, \quad v = -\int\limits_0^y u_x\,dy, \quad \int\limits_0^h u_x\,dy = 0. \tag{6}$$

Очевидно, что и в этом случае уравнения движения допускают класс сдвиговых решений (2). Анализ уравнений длинных волн (6) целесообразно проводить в полулагранжевых координатах, переход к которым осуществляется заменой переменной $y = \Phi(t,x,\lambda)$, где функция $\Phi(t,x,\lambda)$ — решение задачи Коши [6]

$$\Phi_t + u(t,x,\Phi)\Phi_x = v(t,x,\Phi), \qquad \Phi(0,x,\lambda) = \lambda h \quad (0 \leqslant \lambda \leqslant 1).$$

При этом для определения функций $u(t,x,\lambda)$, $H(t,x,\lambda) = \Phi_\lambda$ получаем уравнения

$$u_t + uu_x + p^*_x = 0, \qquad H_t + (uH)_x = 0, \qquad \int\limits_0^1 H\,d\lambda = h, \tag{7}$$

где $p^*(t,x)$ — давление жидкости на верхней крышке канала. При выполнении условия $H > 0$ замена переменных обратима, а уравнения (6) и (7) эквивалентны на гладких решениях.

Замечание 1. Классические критерии устойчивости применимы в случае длинноволнового приближения. В результате линеаризации уравнений (6) на сдвиговом потоке (2) и построения решений в виде элементарных волновых пакетов получаем уравнение Рэлея (3) при $\alpha = 0$, из которого следуют сформулированные выше критерии.

В работе [5] уравнения (7) преобразованы к нелинейной эволюционной системе уравнений с операторными коэффициентами

$$\boldsymbol{U}_t + \boldsymbol{A}\langle \boldsymbol{U}_x \rangle = 0. \tag{8}$$

Здесь $\boldsymbol{U}(t,x,\lambda)$ — искомый вектор; $\boldsymbol{A}$ — оператор, действующий по переменной λ. Для систем вида (8) в работе [4] предложено обобщение понятия гиперболичности. Характеристики системы (8) определяются уравнением $x'(t) = c(t,x)$, где c — собственное значение задачи $(\boldsymbol{F}, (\boldsymbol{A} - cI)\langle \boldsymbol{\varphi} \rangle) = 0$, решение которой относительно функционала $\boldsymbol{F}$, действующего по переменной λ при фиксированных значениях t и x, ищется в классе локально интегрируемых либо обобщенных функций ($\boldsymbol{\varphi}(\lambda)$ — гладкая пробная функция). Система уравнений (8) является гиперболической, если все собственные значения вещественные и соответствующая им совокупность собственных функционалов обладает свойством полноты (если на пробной функции $\boldsymbol{\varphi}$ значения всех функционалов равны нулю, то $\boldsymbol{\varphi} = 0$).

Для течений с монотонным по глубине профилем скорости условия гиперболичности уравнений (7) формулируются с использованием характеристической функции

$$\chi(z) = \int_0^1 \frac{H\,d\lambda}{(u - z)^2} = -\frac{W_1}{u_1 - z} + \frac{W_0}{u_0 - z} + \int_0^1 \frac{W_\lambda\,d\lambda}{u - z},$$

определенной и аналитической всюду в комплексной плоскости, кроме отрезка вещественной оси $[u_0, u_1]$, являющегося непрерывным характеристическим спектром задачи. Здесь $W = H/u_\lambda = 1/u_y$; индексы 0, 1 соответствуют значениям функций на нижней и верхней границах канала. Предполагается, что $u_\lambda > 0$, $\lambda \in [0,1]$ (случай $u_\lambda < 0$ аналогичен). Применяя формулы Сохоцкого — Племеля, вычислим предельные значения комплексной функции $\chi(z)$ из верхней и нижней полуплоскостей в интервале (u_0, u_1):

$$\chi^\pm(u) = -\frac{W_1}{u_1 - u(\lambda)} + \frac{W_0}{u_0 - u(\lambda)} + \int_0^1 \frac{W_\nu\,d\nu}{u(\nu) - u(\lambda)} \pm \pi i\,\frac{W_\lambda}{u_\lambda}.$$

Для сокращения записи зависимость функций от t и x опущена; интеграл вычисляется в смысле главного значения. Приведем сформулированные в [5] условия гиперболичности уравнений (7).

Для течений с монотонным по глубине профилем скорости условия

$$\Delta \arg \frac{\chi^+(u)}{\chi^-(u)} = 0, \qquad \chi^\pm(u) \ne 0 \tag{9}$$

(приращение аргумента функций $\chi^\pm(u)$ вычисляется при изменении λ от 0 до 1 и фиксированных значениях t, x) являются необходимыми и достаточными для гиперболичности уравнений (7), если функции $u(t,x,\lambda)$, $W(t,x,\lambda)$ дифференцируемы, а u_λ, W_λ удовлетворяют условию Гельдера по λ на отрезке $[0,1]$.

Замечание 2. Условия гиперболичности (9) уравнений длинных волн (7) (или (6)) целесообразно проверять с использованием функций $\Psi^\pm(u) = (u_1 - u)(u_0 - u)\chi^\pm(u)$, не имеющих особенностей в граничных точках. Для класса сдвиговых течений жидкости (2) в эйлеровых переменных (в этом случае $y = \lambda h$) функции $\Psi^\pm$ имеют вид

$$\Psi^\pm(U) = \frac{U - U_0}{U_1'} + \frac{U_1 - U}{U_0'} - (U_1 - U)(U_0 - U)\Big(\int_0^h \frac{U''(\bar y)}{(U'(\bar y))^2}\,\frac{d\bar y}{U(\bar y) - U(y)} \mp \pi i\,\frac{U''}{U'^3}\Big).$$

Условия гиперболичности уравнений движения обеспечивают конечность скорости распространения длинноволновых возмущений в горизонтальном направлении и, вероятно, необходимы для локальной корректности задачи Коши. Для нелинейных уравнений вихревой мелкой воды, описывающих сдвиговые течения со свободной границей, в [3] получены локальные теоремы существования и единственности решения задачи Коши при гладких начальных данных, удовлетворяющих условиям гиперболичности.

Следует отметить, что на частных классах решений (с кусочно-постоянным или кусочно-линейным профилем скорости) интегродифференциальные уравнения теории длинных волн сводятся к обычным гиперболическим системам дифференциальных уравнений. Для рассматриваемой модели задача о взаимодействии сдвиговых потоков с линейным профилем скорости исследована в [7]. При этом уравнения движения (6) редуцируются к одному гиперболическому уравнению. Из приведенных выше критериев следует, что при изучении устойчивости течений ограничиться кусочно-линейными аппроксимациями скорости не представляется возможным, поэтому необходимо использовать интегродифференциальные уравнения движения.

Проведем сравнение критериев устойчивости и условий гиперболичности уравнений длинных волн для класса сдвиговых течений жидкости (2) с монотонным профилем скорости (для определенности полагаем $U'(y) > 0$).

Сформулируем основные утверждения.

1. Если на решении (2) системы уравнений (6) с монотонным и дважды непрерывно дифференцируемым профилем скорости $U(y)$ выполняется критерий Рэлея или Фьертофта, то на этом решении длинноволновые уравнения движения являются гиперболическими.

2. Выполнение критерия Розенблюта — Симона на гладком решении (2) системы уравнений (6) является необходимым и достаточным условием гиперболичности уравнений движения.

3. Пусть гладкий и монотонный профиль скорости $U(y)$ имеет не более одной точки перегиба. Тогда выполнение одного из критериев устойчивости является необходимым и достаточным условием гиперболичности системы уравнений (6) на решении (2).

Приведем доказательство данных утверждений.

1. В случае монотонного профиля скорости (пусть $U'(y) > 0$ при $y \in [0, h]$) в граничных точках $y = 0$ и $y = h$ функции $\Psi^{\pm}(U)$ принимают вещественные положительные значения

$$\Psi^+(U_0) = \frac{U_1 - U_0}{U_0'} > 0, \qquad \Psi^+(U_1) = \frac{U_1 - U_0}{U_1'} > 0. \tag{10}$$

При выполнении критерия Рэлея ($U''(y) \neq 0$) функции $\operatorname{Im}\Psi^{\pm}(U)$ в интервале (U_0, U_1) являются знакопостоянными. Характерный график функции $\Psi^+(U)$, соответствующий случаю $U'' > 0$, показан на рис. 1,*а* (график функции $\Psi^-(U)$ симметричен относительно вещественной оси). В данном случае при изменении U от U_0 до U_1 комплексные функции $\Psi^{\pm}(U)$ не имеют приращения аргумента и, следовательно, условия гиперболичности (9) выполнены.

При выполнении критерия Фьертофта достаточно рассмотреть случай, когда имеется единственная точка перегиба $y = y_s$. Тогда в неравенстве (4) в качестве постоянной K следует выбрать $U_s = U(y_s)$. Заметим, что в данном случае $U'' < 0$ при $y \in [0, y_s)$ и $U'' > 0$ при $y \in (y_s, h]$. В силу определения функций $\Psi^{\pm}$ знак $\operatorname{Im}\Psi^{\pm}$ совпадает со знаком U'' (рис. 1,*б*). Следовательно, выяснение вопроса о выполнении условий гиперболичности (9) сводится к проверке неравенства $\Psi^{\pm}(U_s) > 0$ (аргумент комплексных функций $\Psi^{\pm}$ имеет приращение лишь в том случае, если $\Psi^{\pm}(U_s) < 0$). При выполнении неравенства (4)

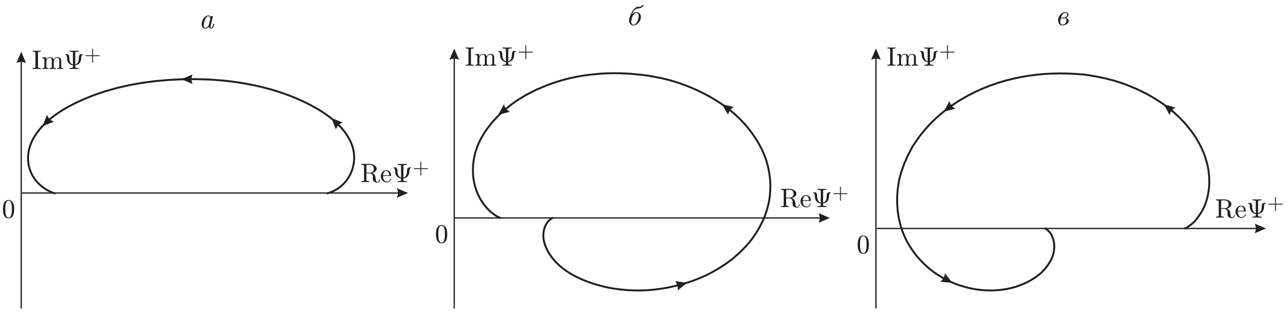

Рис. 1. Характерный график функции $\Psi^+(U)$ при выполнении различных критериев:
а — критерий Рэлея, *б* — критерий Фьертофта, *в* — критерий Розенблюта — Симона; стрелки — направление обхода

с постоянной $K = U_s$ получаем

$$\Psi^{\pm}(U_s) = \frac{U_s - U_0}{U_1'} + \frac{U_1 - U_s}{U_0'} + (U_1 - U_s)(U_s - U_0) \int\limits_0^h \frac{U''(y)(U(y) - U_s)\, dy}{(U'(y))^2 (U(y) - U_s)^2} > 0,$$

так как все слагаемые последнего выражения положительны. Это обусловливает гиперболичность длинноволновых уравнений.

2. Пусть $U'(y) > 0$ и имеется одна точка перегиба $U''(y_s) = 0$, причем $U'''(y_s) < 0$. В данном случае критерий Фьертофта неприменим, поскольку $U'' > 0$ при $y \in [0, y_s)$ и $U'' < 0$ при $y \in (y_s, h]$. В граничных точках по-прежнему выполняются неравенства (10), и мнимая часть функций $\Psi^{\pm}$ один раз меняет знак при изменении U от U_0 до U_1. Следовательно, приращение аргумента функций $\Psi^{\pm}$ определяется знаком величины $\Psi^{\pm}(U_s)$. В силу определения функций $\Psi^{\pm}$ имеем

$$\Psi^{\pm}(U_s) = (U_1 - U_s)(U_s - U_0) J. \tag{11}$$

Следовательно, при выполнении неравенства (5) характерный график функции Ψ^+ соответствует рис. 1,*в*, что гарантирует выполнение условий гиперболичности (9). Справедливо также обратное утверждение: если выполнены условия гиперболичности (9), то $\Psi^{\pm}(U_s) > 0$ и из соотношения (11) следует выполнение неравенства (5).

3. Устойчивость рассматриваемых течений всегда может быть проверена одним из критериев Рэлея, Фьертофта или Розенблюта — Симона. Действительно, в случае отсутствия точек перегиба течение устойчиво согласно критерию Рэлея, в случае наличия точки перегиба y_s, такой что $U'''(y_s) > 0$, выполняется условие Фьертофта (4) с постоянной $K = U(y_s)$, а в случае $U'''(y_s) < 0$ устойчивость или неустойчивость течения определяется критерием Розенблюта — Симона. Таким образом, для данного класса течений выполнение одного из критериев устойчивости является необходимым и достаточным условием гиперболичности уравнений движения.

2. Неустойчивость контактного разрыва. Рассмотрим семейство решений (2) системы (6) с функцией $U(y)$ следующего вида:

$$U(y) = b \operatorname{th} \frac{(2y - h)a}{2h} \tag{12}$$

(a, b — произвольные положительные постоянные). Параметр a влияет на скорость изменения функции $U(y)$ вблизи точки перегиба: при $a \to \infty$ профиль скорости стремится к разрывной кусочно-постоянной функции. Параметр b определяет скорость течения на

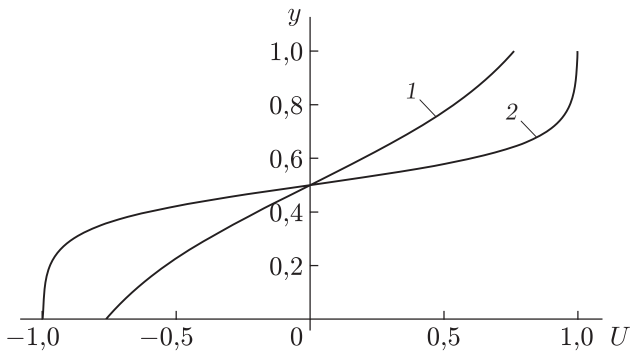

Рис. 2

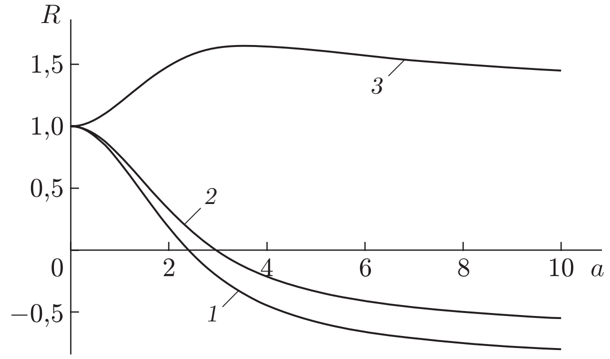

Рис. 3

Рис. 2. Профиль скорости, полученный по формуле (12):
1 — $a = 2$; *2* — $a = 10$

Рис. 3. Функция $R(a)$ на решении (12):
1 — для уравнений (6); *2, 3* — для уравнений (13) (*2* — $h = 1$, $b = 1/2$; *3* — $h = 1$, $b = 3/2$)

верхней границе канала при $a \to \infty$. Профиль скорости, полученный по формуле (12) при $b = 1$, $h = 1$ и различных значениях параметра a, показан на рис. 2.

Функция $U(y)$ удовлетворяет условию монотонности и имеет одну точку перегиба $y_s = h/2$, причем $U'''(y_s) < 0$. Следовательно, для исследования устойчивости применим критерий Розенблюта — Симона. При этом неравенство (5) имеет вид

$$R \equiv \Psi^{\pm}(U_s) = \frac{h}{a}\Big(2 - a\,\mathrm{th}\,\frac{a}{2}\Big)\,\mathrm{th}\,\frac{a}{2} > 0.$$

Согласно критерию Розенблюта — Симона течение устойчиво, если и только если $R(a) > 0$. График функции $R(a)$ при $h = 1$ показан на рис. 3 (кривая *1*). При значении параметра $a = a_* \approx 2{,}4$ (a_* — корень уравнения $a\,\mathrm{th}\,(a/2) = 2$) происходит потеря устойчивости течения и (в соответствии с доказанными выше утверждениями) изменяется тип системы уравнений движения. В данном случае параметры $b \neq 0$ и $h > 0$ не оказывают влияния на устойчивость течения и тип системы уравнений. Рассматриваемое течение (12), стремящееся при $a \to \infty$ к течению с контактным разрывом, устойчиво при $a < a_*$ и неустойчиво при $a > a_*$. На этом решении при том же значении параметра a_* уравнения движения (6) теряют свойство гиперболичности.

3. Сдвиговые течения со свободной границей. Плоскопараллельные движения идеальной жидкости в поле силы тяжести над ровным дном $y = 0$ со свободной границей $y = h(t, x)$ в длинноволновом приближении описываются системой уравнений [8]

$$u_t + uu_x + vu_y + gh_x = 0, \qquad v = -\int\limits_0^y u'_x\,dy', \qquad h_t + \Big(\int\limits_0^h u\,dy\Big)_x = 0. \tag{13}$$

В [3, 4] показано, что для течений с монотонным по глубине профилем скорости условия (9) с характеристической функцией

$$\hat\chi(z) = 1 - g\int\limits_0^1 \frac{H\,d\lambda}{(u - z)^2}$$

являются необходимыми и достаточными для гиперболичности уравнений (13), записанных в полулагранжевых переменных. Поскольку классические критерии устойчивости получены для уравнений движения жидкости под крышкой, проводить их сравнение с условиями гиперболичности уравнений вихревой мелкой воды (13) некорректно. Ограничимся проверкой условий гиперболичности уравнений (13) на классе сдвиговых течений $u = U(y)$, $v = 0$, $h = \mathrm{const}$ с профилем скорости (12). Далее полагаем $g = 1$, что не ограничивает общности задачи.

Условия гиперболичности целесообразно проверять с использованием комплексных функций $\hat{\Psi}^{\pm}(U) = -(U-U_0)(U-U_1)\hat{\chi}^{\pm}(U)$, не имеющих особенностей в граничных точках. Поскольку $\operatorname{Im}\hat{\Psi}^{\pm} = \operatorname{Im}\Psi^{\pm}$, как и в рассмотренном выше случае, приращение аргумента функций $\hat{\Psi}^{\pm}(U)$ зависит от знака величины $\hat{\Psi}^{\pm}(U_s)$. В данном случае

$$R \equiv \hat{\Psi}^{\pm}(U_s) = \frac{1}{a}\Big(2h + a(b^2 - h)\,\mathrm{th}\,\frac{a}{2}\Big)\,\mathrm{th}\,\frac{a}{2}. \tag{14}$$

Графики функции $R(a)$ при $h = 1$, $b = 1/2$ и $h = 1$, $b = 3/2$ показаны на рис. 3 (кривые *2, 3* соответственно). Уравнения движения (13) являются гиперболическими на рассматриваемом решении при выполнении неравенства $R(a) > 0$.

В зависимости от знака выражения (14) возможны два случая: 1) если $b^2 < h$, то с увеличением параметра a тип системы меняется, что соответствует рассмотренному выше случаю течения под крышкой; 2) если $b^2 > h$, то система является гиперболической при всех значениях a.

Рассматриваемое решение с профилем скорости (12) при $a \to \infty$ описывает движение двух слоев однородной жидкости толщиной $h/2$, имеющих противоположно направленные скорости b и $-b$. Поэтому для объяснения гиперболичности уравнений движения (13) на решении (12) в случае $b^2 > h$ используем модель двухслойной стратифицированной мелкой воды для потенциальных течений. Предложенная в [9] геометрическая интерпретация свойства гиперболичности уравнений двухслойной мелкой воды, допускающая обобщение на случай сдвиговых течений [10], состоит в следующем. Если на плоскости переменных (p, q) прямая

$$q = p\sqrt{h_1/h_2} + (u_2 - u_1)/\sqrt{h_2} \tag{15}$$

пересекает кривую

$$(p^2 - 1)(q^2 - 1) = \gamma \tag{16}$$

в четырех точках, то на данном решении уравнения двухслойной мелкой воды являются гиперболическими. Здесь u_i — скорость жидкости в слоях; h_i — толщина i-го слоя жидкости; $\gamma = \rho_2/\rho_1$ — отношение плотностей ($0 < \gamma < 1$). Так как кривая, описываемая уравнением (16), состоит из кривых типа гипербол с асимптотами $p = \pm 1$, $q = \pm 1$ и замкнутой линии, форма которой близка к окружности радиусом $\sqrt{1-\gamma}$ с центром в начале координат, то при достаточно малых (физически реализуемый случай) или больших (физически не реализуемый случай) значениях величины $|u_2 - u_1|/\sqrt{h_2}$ имеется четыре точки пересечения.

В исследуемом случае сдвигового течения однородной жидкости ($\gamma = 1$) с профилем скорости (12), стремящегося при $a \to \infty$ к двухслойному течению, прямая, описываемая уравнением (15), в данном случае имеющим вид $q = p + 2b/\sqrt{h/2}$, касается ветви кривой, описываемой уравнением (16), в точке $(-\sqrt{2}, \sqrt{2}\,)$ при выполнении равенства $h = b^2$. Это согласуется с результатами проведенного выше анализа гиперболичности системы (13) на профиле скорости, полученном по формуле (12). Таким образом, при $b^2 < h$ имеется две точки пересечения кривых (область эллиптичности уравнений двухслойной мелкой воды), а при $b^2 > h$ — четыре точки (область гиперболичности). Однако последний случай соответствует диапазону параметров, в котором модель двухслойной мелкой воды неприменима даже при наличии стратификации.

Заключение. Корректное сравнение классических критериев устойчивости сдвиговых течений жидкости и условий гиперболичности нелинейных интегродифференциальных уравнений длинноволнового приближения (6) возможно лишь на решениях вида (2). Установлено, что в классе гладких и монотонных профилей скорости $U(y)$, имеющих не более одной точки перегиба, для устойчивости течения в линейном приближении необходимо и достаточно выполнения условий гиперболичности уравнений движения. На примере параметрического семейства (12) решений длинноволновых уравнений (6) показано, что увеличение сдвига скорости приводит к потере свойства гиперболичности и развитию неустойчивости Кельвина — Гельмгольца. В случае течений со свободной границей увеличение сдвига скорости (и возникновение контактного разрыва) может не привести к потере гиперболичности уравнений движения (13). Анализ устойчивости решений уравнений двухслойной стратифицированной жидкости позволяет объяснить этот эффект и свидетельствует о неприменимости модели (13) в данном диапазоне параметров.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Дикий Л. А.** Гидродинамическая устойчивость и динамика атмосферы. М.: Гидрометеоиздат. Моск. отд-ние, 1976.
2. **Дразин Ф.** Введение в теорию гидродинамической устойчивости. М.: Физматлит, 2005.
3. **Ляпидевский В. Ю.** Математические модели распространения длинных волн в неоднородной жидкости / В. Ю. Ляпидевский, В. М. Тешуков. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2000.
4. **Тешуков В. М.** О гиперболичности уравнений длинных волн // Докл. АН СССР. 1985. Т. 284, вып. 3. С. 555–559.
5. **Чесноков А. А.** Вихревые движения жидкости в узком канале // ПМТФ. 1998. Т. 39, № 4. С. 38–49.
6. **Захаров В. Е.** Уравнения Бенни и квазиклассическое приближение в методе обратной задачи // Функцион. анализ и его прил. 1980. Т. 14, вып. 2. С. 15–24.
7. **Чесноков А. А.** О взаимодействии сдвиговых потоков идеальной несжимаемой жидкости в канале // ПМТФ. 2006. Т. 47, № 6. С. 34–47.
8. **Benney D. J.** Some properties of long nonlinear waves // Stud. Appl. Math. 1973. V. 52. P. 45–50.
9. **Овсянников Л. В.** Модели двухслойной “мелкой воды” // ПМТФ. 1979. № 2. С. 3–14.
10. **Чесноков А. А.** О распространении длинноволновых возмущений в двухслойной завихренной жидкости со свободной границей // ПМТФ. 2004. Т. 45, № 2. С. 99–110.

Поступила в редакцию 15/VI 2011 г.