

УДК 532.529

ОТРАЖЕНИЕ УДАРНЫХ ВОЛН ОТ ЖЕСТКОЙ ГРАНИЦЫ В СМЕСИ КОНДЕНСИРОВАННЫХ МАТЕРИАЛОВ.

1. РАВНОВЕСНОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ

А. А. Жилин, А. В. Федоров

Институт теоретической и прикладной механики СО РАН, 630090 Новосибирск

Изучен процесс отражения ударных волн (УВ) от жесткой стенки в двухкомпонентной смеси конденсированных материалов в рамках механики гетерогенных сред. Аналитически определены скорость отраженной УВ и значения параметров за ее фронтом как функции скорости падающей волны и начальных параметров смеси. Показано, что в смесях с небольшим содержанием легкого компонента и при малых скоростях падающих УВ скорость отраженной УВ по модулю может превышать скорость падающей. Продемонстрирован немонотонный характер зависимости давления в конечном равновесном состоянии за падающей УВ от начальной объемной концентрации частиц. Дана оценка на скорость падающей УВ, когда аналогичный эффект имеет место и за отраженной УВ. Установлено, что для слабых УВ зависимость коэффициента усиления отраженной УВ от начальной объемной концентрации легкого компонента является немонотонной с локальным максимумом. Отмечено, что с ростом скорости падающей УВ эффект компактирования смеси (роста концентрации тяжелого компонента) за отраженной УВ становится намного менее выраженным, чем в проходящей УВ.

Проблема распространения и отражения ударных волн (УВ) от жесткой стенки в многокомпонентных смесях представляет большой теоретический и практический интерес и не является полностью изученной. В [1] рассмотрены задачи о структуре УВ в смеси двух конденсированных материалов в односкоростном приближении с различными давлениями компонентов смеси, а также в смеси с учетом разности скоростей и давлений фаз при бесконечно большом времени релаксации объемной концентрации тяжелого компонента смеси τ_{m_2} и конечном времени релаксации скоростей. Показано, что полученные дисперсионные и замороженные УВ-структуры характеризуются монотонно убывающими скоростями фаз с головными и/или внутренними скачками уплотнения. В [2] численно и аналитически исследована задача об отражении ударной волны от жесткой границы в смеси двух сжимаемых сред при условии $\tau_{m_2} \rightarrow \infty$. Тем самым исследование проводилось в рамках модели механики гетерогенных сред с различными скоростями и давлениями компонентов, причем $m_2 \equiv \text{const}$ (m_2 — объемная концентрация). По результатам расчетов выявлено, что при отражении УВ в такой смеси от жесткой стенки ее тип сохраняется. Следует заметить, что в [2] не учитывался процесс выравнивания давлений компонентов смеси за фронтом УВ, т. е. конечность времени релаксации τ_{m_2} .

В [3, 4] исследована математическая модель в более общем случае конечного времени релаксации τ_{m_2} и без ограничивающих требований на изучаемые материалы компонентов смеси. В рамках предложенного подхода показано существование УВ различных структур: полностью дисперсионные, замороженно-дисперсионные, дисперсионно-замороженные и замороженные УВ двухволновой конфигурации как с монотонно убывающим профилем, так и с немонотонным профилем скорости. В [5] изучен процесс установления полученных в [3, 4] стационарных волновых структур в гетерогенной смеси. Также показана их устой-

чивость к конечным и инфинитезимальным возмущениям, что позволило решить задачу об иницировании УВ из начальных данных ступенчатого вида.

Настоящая работа посвящена исследованию процесса отражения УВ различных типов, полученных в [3, 4], от жесткой стенки. Эта задача рассматривалась ранее в механике гетерогенных сред в случае равенства давлений компонентов смеси. Так, в [6] изучены течения, получаемые при взаимодействии УВ с твердой стенкой в газопылевой смеси в двухскоростном и двухтемпературном приближении. В равновесном приближении доказано, что существует три типа перехода падающих УВ (замороженной и дисперсионной структуры) к отраженным в зависимости от величины перепада давления на падающей УВ: 1) как падающая, так и отраженная УВ являются замороженными; 2) падающая замороженная УВ отражается полностью дисперсионной; 3) падающая и отраженная УВ характеризуются полностью дисперсионной структурой. Рассмотренная модель адекватно описывает газозвеси и не учитывает разницы давлений фаз, кроме того, предполагается, что изменением объемной доли частиц можно пренебречь. Ниже, в отличие от [2], задача об отражении УВ изучается в рамках модели, учитывающей релаксацию давлений фаз.

Физико-математическая постановка задачи. Рассматривается смесь двух конденсированных материалов, состоящая из непрерывно занимающего весь объем легкого компонента и дискретно распределенного в нем тяжелого. По покоящейся смеси с начальными равновесными параметрами справа налево распространяется УВ. За ее фронтом после зоны релаксации параметры смеси соответствуют конечному равновесному состоянию по скоростям и давлениям компонентов. Слева расположена жесткая стенка ($x = 0$), отражаясь от которой, УВ формирует новое равновесное состояние в среде за ее фронтом. Задача заключается в определении параметров компонентов смеси в области $x \geq 0, t \geq 0$.

Уравнения, описывающие течение смеси в безразмерных переменных, имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \frac{\partial \rho_1 u_1}{\partial x} &= \hat{u}, & \frac{\partial \rho_2}{\partial t} + \frac{\partial \rho_2 u_2}{\partial x} &= \hat{u}, & \frac{\partial \rho_1 u_1}{\partial t} + \frac{\partial \rho_1 u_1^2}{\partial x} - m_1 \frac{\partial P_1}{\partial x} &+ F_S, \\ \frac{\partial \rho_2 u_2}{\partial t} + \frac{\partial \rho_2 u_2^2}{\partial x} &= -m_2 \frac{\partial P_2}{\partial x} - (P_2 - P_1) \frac{\partial m_2}{\partial x} - F_S, & \frac{\partial m_2}{\partial t} + u_2 \frac{\partial m_2}{\partial x} &= R, & (1) \\ m_1 &= 1 - m_2, & P_1 &= \rho_1 / m_1 - 1, & P_2 &= a^2 (\rho_2 / m_2 - \bar{\rho}), \end{aligned}$$

где ρ_i, u_i, P_i и m_i — средняя плотность, скорость, давление и объемная концентрация i -го компонента смеси; $F_S = m_1 \rho_2 (u_2 - u_1) / \tau_S$ — сила Стокса; $\tau_S = 2\bar{\rho} / (9\mu_1)$ — время релаксации скоростей под действием сил Стокса; $R = m_1 m_2 (P_2 - P_1) / \tau_{m_2}$ — функция, описывающая процесс переноса твердой фазы; $\tau_{m_2} = 2\mu_2$ — время релаксации объемной концентрации тяжелого компонента смеси; μ_i — коэффициент динамической вязкости i -го компонента; $a = a_2 / a_1$; $\bar{\rho} = \rho_{22,0} / \rho_{11,0}$; $\rho_i = m_i \rho_{ii}$; ρ_{ii} — истинная плотность i -го компонента; a_i и $\rho_{ii,0}$ — скорость звука и истинная плотность материала i -го компонента смеси. Обезразмеривание скоростей проводилось по отношению к a_1 , плотностей — к $\rho_{11,0}$, давления — к $a_1^2 \rho_{11,0}$, пространственной координаты x — к радиусу твердых частиц r , времени t — к $t_0 = r / a_1$.

В смеси определены равновесная C_e и равновесно-замороженная C_{ef} скорости звука:

$$C_e^2 = \frac{\xi_1}{m_1} \frac{m_1 C - \rho \xi_1}{m_1^2 C - \rho \xi_1}, \quad C_{ef}^2 = \xi_1 + a^2 \xi_2,$$

где $C = 1 - a^2 \bar{\rho}$; $\xi_i = \rho_i / \rho$.

Начально-краевые условия для (1) представим в следующем виде:

$$\varphi = \varphi_0(x), \quad x \geq 0, \quad t = 0; \quad u_1 = u_2 = 0, \quad x = 0, \quad t \geq 0. \quad (2)$$

Здесь вектор решения $\varphi_0(x)$ описывает стационарную УВ какого-либо типа структур, найденных в [3, 4]. Таким образом, задача об отражении УВ от жесткой стенки свелась к решению начально-краевой задачи (1), (2).

Расчет параметров отраженной УВ в равновесном приближении. Начальное равновесное состояние характеризуется параметрами $\rho_i = \rho_{i0}$, $u_i = 0$, $P_i = 0$ перед фронтом падающей УВ. За ее фронтом параметры смеси принимают конечные равновесные значения $\rho_i = \rho_{ik}$, $u_i = u_k$, $P_i = P_k$. Равновесное состояние за фронтом отраженной УВ описывается параметрами $\rho_i = \rho_{ir}$, $u_i = u_r = 0$ и $P_i = P_r$. Из законов сохранения массы и импульса для падающей и отраженной УВ имеем

$$\begin{aligned} -\rho_0 D &= \rho_k(u_k - D), & \rho_0 D^2 &= P_k + \rho_k(u_k - D)^2, \\ -\rho_r D_r &= \rho_k(u_k - D_r), & P_r + \rho_r D_r^2 &= P_k + \rho_k(u_k - D_r)^2, \end{aligned} \quad (3)$$

где D и D_r — скорость падающей и отраженной УВ соответственно.

После преобразований для определения D_r получаем кубическое уравнение

$$\begin{aligned} D_r^3 u_k^2 \rho_k^2 - u_k \rho_k (2 - C + 2u_k \rho_k D - C_{ef}^2 \rho_k) D_r^2 - [C - 1 + \rho_k (C_{ef}^2 - C\xi_1) - \\ - u_k \rho_k D (2 - C) - u_k^2 \rho_k^2 (D^2 - C_{if}^2) + C_{if}^2 u_k \rho_k^2 D] D_r + \rho_k u_k (C_{if}^2 - C\xi_1 + u_k \rho_k D C_{if}^2) = 0, \end{aligned}$$

которое имеет тривиальное решение $D_r = D$, соответствующее скорости падающей УВ. Оставшееся квадратное уравнение

$$D_r^2 u_k^2 \rho_k^2 - D_r u_k \rho_k (2 - C + u_k \rho_k D - C_{if}^2 \rho_k) - C + 1 - \rho_k (C_{if}^2 - C\xi_1) - u_k^2 \rho_k^2 C_{if}^2 = 0$$

имеет два корня $D_r^\pm = [2 - C + u_k \rho_k D - C_{if}^2 \rho_k \pm \sqrt{\mathcal{D}}] / (2u_k \rho_k)$. Подкоренное выражение $\mathcal{D} = (C - u_k \rho_k D + C_{if}^2 \rho_k)^2 + 4\rho_k (u_k^2 \rho_k C_{if}^2 - C\xi_1 + u_k D)$ всегда положительно, так как $C < 0$, а $u_k D > 0$. Следовательно, могут существовать два действительных значения скорости отраженной УВ. Физический смысл имеет нижняя ветвь, на которой $D_r^- > 0$ (соответствующая знаку «-», так как $u_k < 0$). На верхней ветви решения D_r^+ отрицательны. Далее знак «-» в D_r^- опустим, $D_r = D_r^-$. На рис. 1 показан характер поведения скорости отраженной УВ (штриховая линия D_r), относительных скоростей фаз за фронтом падающей УВ (штрихпунктирная линия $u_k - D$) и перед отраженной УВ (жирная сплошная линия $|u_k - D_r|$), равновесных скоростей звука (тонкие сплошные линии C_{e0} , C_{ek} , C_{er} в начальном и конечном равновесном состоянии как за падающей, так и за отраженной УВ) в зависимости от m_{10} (скорость падающей УВ $D = -1,5$).

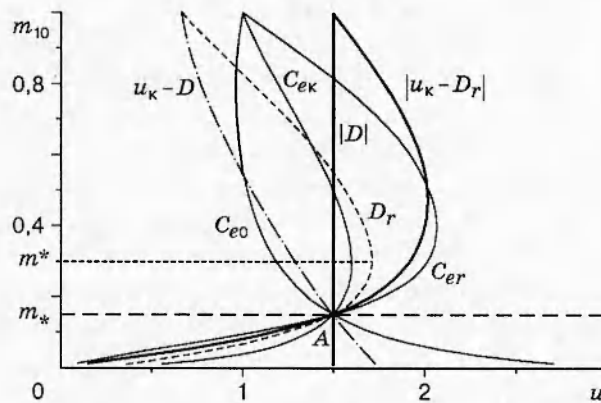


Рис. 1

Равновесные параметры смеси за падающей и отраженной УВ

m_{10}	u_k	m_{1k}	P_k	D_r	m_{1r}	P_r	$ u_k - D_r $	k
$D = -1,5$								
0,15	-0,001	0,1495	0,0043	1,503	0,1490	0,0086	1,504	2,003
0,20	-0,076	0,167	0,263	1,636	0,140	0,578	1,711	2,201
0,30	-0,213	0,207	0,688	1,714	0,145	1,719	1,927	2,497
0,40	-0,338	0,257	1,008	1,671	0,165	2,750	2,009	2,728
0,50	-0,452	0,320	1,236	1,566	0,200	3,615	2,018	2,924
0,60	-0,555	0,400	1,382	1,421	0,251	4,272	1,976	3,091
0,70	-0,648	0,502	1,4524	1,247	0,329	4,681	1,895	3,223
0,80	-0,728	0,634	1,4520	1,053	0,453	4,801	1,781	3,306
0,85	-0,762	0,712	1,426	0,952	0,542	4,740	1,714	3,324
0,90	-0,792	0,800	1,384	0,852	0,657	4,597	1,644	3,322
0,95	-0,816	0,896	1,325	0,755	0,807	4,370	1,571	3,298
$D = -2,5$								
0,05	-0,166	0,026	1,067	2,681	0,017	2,369	2,847	2,220
0,10	-0,375	0,035	2,332	2,622	0,020	5,622	2,997	2,411
0,20	-0,685	0,055	3,974	2,446	0,030	10,828	3,131	2,725
0,30	-0,928	0,080	5,002	2,271	0,042	15,186	3,200	3,036
0,40	-1,138	0,110	5,659	2,095	0,056	19,084	3,232	3,372
0,50	-1,326	0,151	6,048	1,909	0,076	22,700	3,234	3,754
0,60	-1,499	0,208	6,222	1,704	0,104	26,135	3,203	4,201
0,70	-1,662	0,290	6,213	1,470	0,146	29,449	3,132	4,740
0,80	-1,817	0,416	6,042	1,191	0,220	32,655	3,008	5,405
0,90	-1,964	0,624	5,719	0,846	0,380	35,662	2,809	6,236

На рис. 1 видна область неустойчивого течения (расположенная ниже точки сборки A характерных скоростей течения), в которой не выполняются условия теоремы Цемплена. В области выше этой точки как для падающей, так и для отраженной УВ выполняются условия теоремы Цемплена, т. е. $|D| > C_{e0}$, $|u_k - D| < C_{ek}$ и $|u_k - D_r| > C_{ek}$, $|D_r| < C_{er}$ для всех $m_{10} > m_*$. Координата точки сборки A при $D = -1,5$ по оси ординат соответствует величине $m_{10} = 0,15$; при $D = -2,5$ имеем $m_{10} = 0,02$.

По рис. 1 можно также проследить эффект немонотонного поведения скорости отраженных УВ в зависимости от соотношения объемных концентраций компонентов смеси. Вначале при $m_{10} > m_*$ с ростом доли легкой фазы наблюдается возрастание скорости отраженной УВ. Максимальное значение скорости отраженной УВ $D_{r,max} = 1,714$ для $D = -1,5$ достигается при $m^* = 0,30$, а, например, для $D = -2,5$ $D_{r,max} = 2,681$ при $m^* = 0,05$. При $m_{10} > m^*$ скорость отраженной УВ уменьшается с ростом m_{10} . Численные значения скорости отраженной УВ D_r для различных скоростей падающей УВ D в зависимости от начальной объемной концентрации легкого компонента смеси представлены в таблице для $D = -1,5$ и $D = -2,5$. Там же приведены равновесные параметры смеси u_k , m_{1k} , P_k и m_{1r} , P_r за падающей и отраженной УВ соответственно. Заметим, что при $D = -3,3$ область неустойчивого течения отсутствует, так как линия равновесной скорости звука C_e , которая разделяет области устойчивого и неустойчивого течений, для диапазона скоростей падающих УВ $|D| > a$ находится за пределами рассматриваемого интервала значений объемных концентраций $m_{10} \in [0, 1]$. Кроме того, в данном диапазоне скоростей и объемных концентраций не наблюдается эффект немонотонного поведения скорости отраженных УВ в зависимости от m_{10} .

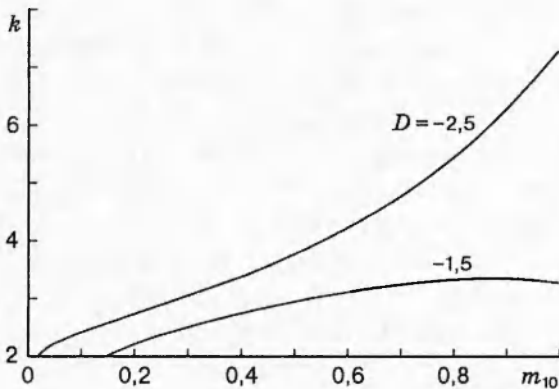


Рис. 2

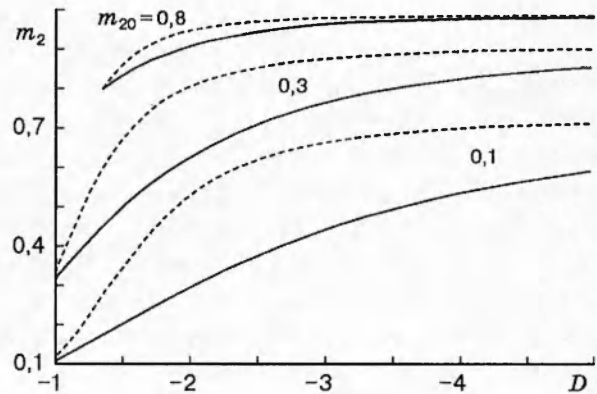


Рис. 3

Отметим, что давление за фронтом отраженной УВ P_k с ростом m_{10} проявляет не-монотонный характер. Природа возникающего максимума в P_k объясняется с помощью уравнения состояния для смеси в равновесном состоянии за фронтом падающей УВ

$$P_k = \frac{\rho_{1k}}{m_{1k}} - 1 = \frac{m_{10}D}{m_{1k}(D - u_k)} - 1. \tag{4}$$

Некоторые числовые значения m_{1k} и u_k в зависимости от m_{10} представлены в таблице. Нелинейная зависимость P_k от m_{10} является условием возникновения максимума давления P_k^{\max} в конечном равновесном состоянии за фронтом падающей УВ. С увеличением скорости падающей УВ местоположение P_k^{\max} смещается в диапазон малых значений m_{10} ($m_{10} = 0,75$ при $D = -1,5$, $m_{10} = 0,64$ при $D = -2,5$, $m_{10} = 0,50$ при $D = -3,3$) и принимает соответственно значения $P_k^{\max} = 1,461; 6,239; 12,654$.

Равновесное давление за фронтом отраженной УВ P_r с увеличением m_{10} возрастает, достигая максимального значения $P_r^{\max} = 4,803$ при $m_{10} = 0,79$ для $D = -1,5$, и убывает на оставшемся интервале m_{10} . Причина возникновения немонотонности функции $P_r = P_r(m_{10})$ та же, что и для рассмотренного выше случая $P_k = P_k(m_{10})$. С увеличением скорости падающей УВ максимум в P_r смещается в сторону больших m_{10} , а при $D = -2,5$ выходит за пределы рассматриваемого диапазона значений объемных концентраций компонентов смеси.

Из таблицы и рис. 2 следует, что коэффициент усиления отраженной УВ $k = (P_r - P_0)/(P_k - P_0)$ с увеличением m_{10} характеризуется немонотонным поведением с локальным максимумом k^{\max} , который для $D = -1,5$ достигается при $m_{10} = 0,87$. Отметим, что максимум является следствием немонотонности давлений в конечных равновесных состояниях как за падающей, так и за отраженной УВ. Увеличение скорости падающей волны приводит к смещению точки максимума коэффициента усиления в сторону более высоких объемных концентраций. Предельная ситуация по k^{\max} достигается при некотором D и $m_{10} \sim 1$, после чего дальнейшее увеличение D , например до $D = -2,5$ (см. таблицу и рис. 2), приводит к тому, что k является монотонной функцией на всем интервале значений m_{10} от 0 до 1.

В приложениях нередко важна оценка степени компактирования двухкомпонентной смеси под действием УВ. Для этого определена объемная концентрация тяжелого компонента смеси за падающей УВ m_{2k} (сплошные кривые на рис. 3) и отраженной УВ m_{2r} (штриховые кривые) в зависимости от скорости падающей УВ D для различных m_{20} . На рис. 3 видно, что с увеличением скорости падающей УВ объемная концентрация тяжело-

го компонента резко возрастает ниже по потоку как за падающей, так и за отраженной УВ, т. е. в обоих случаях происходит вытеснение легкого материала и компактирование тяжелого. Заметим, что существует два состояния, когда $m_{2к} = m_{2г}$. Первая точка равновесия расположена на линии равновесной скорости звука C_e (точка А на рис. 1), когда УВ распространяется со скоростью звука. Второе равновесное состояние по объемным концентрациям за падающей и отраженной УВ, как видно на рис. 3, достигается асимптотически при $D \rightarrow -\infty$. Так, вторая точка равновесия m_2^* имеет значения $m_2^* = 0,990$ при $m_{20} = 0,8$, $m_2^* = 0,911$ при $m_{20} = 0,3$, $m_2^* = 0,726$ при $m_{20} = 0,1$. Наибольшее различие объемных концентраций компонентов за падающей и отраженной УВ достигается в области, прилегающей к первой точке равновесия (например, для $m_{20} = 0,8; 0,3; 0,1$ при $D = -1,792; -1,744; -2,336$ соответственно).

Таким образом, получены аналитические асимптотические оценки параметров отраженной УВ в смеси двух конденсированных материалов, показавшие, что в зависимости от доли первого (второго) компонента скорость отраженной УВ по модулю может превышать или не превышать скорость падающей.

ЛИТЕРАТУРА

1. Федоров А. В. Структура ударной волны в смеси двух твердых тел (гидродинамическое приближение) // Моделирование в механике. 1991. Т. 5, № 4. С. 135–158.
2. Федоров А. В., Федорова Н. Н. Структура, распространение и отражение ударных волн в смеси твердых тел (гидродинамическое приближение) // ПМТФ. 1992. № 4. С. 10–18.
3. Жилин А. А., Федоров А. В., Фомин В. М. Бегущая волна в двухскоростной смеси сжимаемых сред с различными давлениями // Докл. РАН. 1996. Т. 350, № 2. С. 201–205.
4. Жилин А. А., Федоров А. В. Структура ударной волны в двухскоростной смеси сжимаемых сред с различными давлениями // ПМТФ. 1998. Т. 39, № 2. С. 10–19.
5. Жилин А. А., Федоров А. В. Распространение ударных волн в двухфазной смеси с различными давлениями компонентов // ПМТФ. 1999. Т. 40, № 1. С. 55–63.
6. Miura H., Saito T., Glass I. I. Shock-wave reflection from a rigid wall in a dusty gas // Proc. Roy. Soc. London. 1986. V. A 404. P. 55–67.

Поступила в редакцию 22/XII 1997 г.