

УДК 532.528

ПОСТРОЕНИЕ АППРОКСИМАЦИОННОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КАВИТАЦИОННОГО ОБТЕКАНИЯ ДИСКА

Л. Г. Гузевский

Сибирский университет потребительской кооперации, 630087 Новосибирск
E-mail: guzevsky@mail.ru

Развит подход к аналитическому исследованию стационарного осесимметричного кавитационного обтекания тел потенциальным потоком идеальной несжимаемой жидкости. Построено приближенное аналитическое решение задачи Рябушинского для кавитатора в форме диска. Показано, что результаты расчета всех интегральных и локальных характеристик течения по предложенным аппроксимационным формулам в широком диапазоне значений числа кавитации незначительно отличаются от результатов численного решения задачи в точной нелинейной постановке.

Ключевые слова: идеальная жидкость, кавитационные течения, диск, аппроксимационные формулы.

Существенные трудности, возникающие при аналитическом и численном исследовании решений осесимметричных задач со свободными поверхностями, обусловлены прежде всего тем, что часть границы области течения неизвестна и определяется в процессе решения. В то же время задачу кавитационного обтекания тел при малых значениях числа кавитации, которым соответствуют каверны большого удлинения, можно отнести к числу некорректных задач. При незначительном изменении краевого условия постоянства величины скорости вдоль искомой границы каверны ее параметры существенно меняются. Например, при числах кавитации $\sigma = 0,02; 0,04$ длины каверн за диском различаются более чем в два раза, в то время как различие соответствующих величин скоростей вдоль границ каверн не превышает 1 %. Некорректность данной задачи обуславливает особые требования к точности выполнения краевого условия на искомой границе каверны.

Использование предложенного в работах автора [1–3] эффективного алгоритма численного решения плоских и осесимметричных задач кавитационного обтекания тел позволяет получить решение задачи с контролируемой точностью в широком диапазоне значений числа кавитации, включающем его малые значения.

Анализ результатов численных решений осесимметричной задачи кавитационного обтекания различных тел позволил обнаружить чрезвычайно интересное неизвестное ранее свойство кавитационных течений. Если осесимметричному течению в меридиональной плоскости поставить в соответствие плоское течение, так чтобы совпали длины каверн L_k и максимальные величины ΔR_k , на которые координаты границ каверн превышают координаты точек отрыва (см. рисунок), то различие форм этих каверн будет незначительным [4, 5]. В этом случае эквивалентное число кавитации в плоской задаче определяется из условия задания параметра

$$\delta = L_k / (2 \Delta R_k).$$

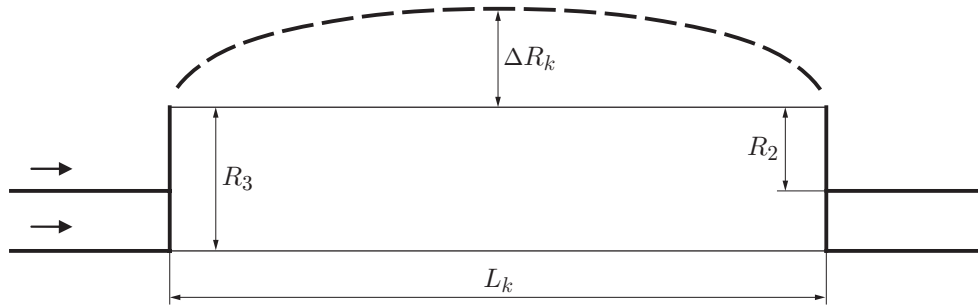


Схема соответствия кавитационных течений за вертикальной пластиной длиной $R = R_2$ и диском радиусом $R = R_3$

Таким образом, использование предложенного в [4, 5] принципа соответствия плоских и осесимметричных кавитационных течений позволяет получить в аналитическом виде приближенное решение задачи о форме осесимметричной каверны, выраженное через соответствующее точное решение плоской задачи.

Рассмотрим осесимметричную задачу кавитационного обтекания диска по схеме Рябушинского. Основной характеристикой кавитационного течения является число кавитации

$$\sigma = \frac{2(P_\infty - P_0)}{\rho V_\infty^2} = \frac{V_0^2}{V_\infty^2} - 1$$

(P_∞ , V_∞ , P_0 , V_0 — величины давления и скорости в невозмущенном потоке и вдоль границы каверны соответственно; ρ — плотность жидкости). Искомыми характеристиками являются распределение скорости вдоль кавитатора, а следовательно, и его коэффициент сопротивления, форма образующей каверны, вдоль которой предполагается выполненным условие постоянства величины давления $P = P_0$, а значит, и величины скорости $V = V_0$.

Задача нахождения интегральных характеристик кавитационного обтекания, являющихся функциями числа кавитации, имеет важное прикладное значение.

Приближенная формула для максимального радиуса R_k осесимметричной каверны за кавитатором произвольной формы с радиусом R в плоскости схода каверны имеет следующий вид:

$$\frac{R_k}{R} = \sqrt{\frac{C_x(\sigma)}{k(\sigma)\sigma}}. \quad (1)$$

Коэффициент сопротивления диска определим приближенной формулой

$$C_x(\sigma) = 0,8272(1 + \sigma)(1 + 0,035\sigma - 0,0035\sigma^2), \quad (2)$$

различие результатов расчетов по которой с результатами расчетов [1–3] не превышает 0,08 % в диапазоне $0 \leq \sigma \leq 3$.

Входящую в формулу (1) функцию $k(\sigma)$, практически не зависящую от формы кавитатора, аппроксимируем следующим образом:

$$k(\sigma) = 0,000\,077\,2\nu^4(\sigma) - 0,001\,510\,3\nu^3(\sigma) + 0,009\,355\nu^2(\sigma) - 0,009\nu(\sigma) + 0,891\,11. \quad (3)$$

Здесь $\nu(\sigma) = \ln(1/\sigma)$.

В диапазоне малых значений числа кавитации $0,001 \leq \sigma \leq 0,1$ формула для удлинения каверны за диском, аппроксимирующая результаты численных расчетов задачи в точной постановке, построена с учетом асимптотического поведения решения при $\sigma \rightarrow 0$:

$$\lambda = 1,075\sqrt{\nu(\sigma)/\sigma} + 0,0654\nu(\sigma) + 1,465\sigma - 0,4612. \quad (4)$$

Таблица 1

Относительные погрешности формул (1)–(5)

σ_3	$C_x, \%$	$k, \%$	$L_k/(2R), \%$	$R_k/R, \%$	$\lambda, \%$
0,001	-0,020	0,0003	-0,001	-0,01	0,130
0,005	0,040	-0,04	-0,004	0,04	0,070
0,010	0,020	-0,02	0,009	0,02	-0,002
0,050	-0,010	0,06	0,004	-0,002	-0,060
0,100	-0,050	0,02	-0,001	-0,04	0,070
0,200	-0,080	-0,08	0,001	-0,10	0,004
0,300	-0,090	-0,12	0,060	-0,10	-0,090
0,400	-0,080	-0,13	0,060	-0,08	0,030
0,500	-0,070	-0,12	0,030	-0,05	-0,050
1,000	0,003	0,01	-0,080	0,03	-0,020
1,500	0,020	0,09	0,006	0,02	-0,020
2,000	0,010	0,07	0,100	-0,01	-0,001
2,500	0,002	-0,02	0,040	-0,001	-0,010
3,000	0,030	-0,16	-0,260	0,03	0,010

Результаты вычисления удлинения каверны по данной формуле практически совпадают с результатами численного решения задачи. Например, при $\sigma = 0,001; 0,005; 0,010$ относительные погрешности равны $-0,000\ 60, -0,006\ 00$ и $0,000\ 03\ \%$ соответственно.

В диапазоне $0,001 \leq \sigma \leq 0,01$ относительные погрешности результатов вычислений по асимптотическим формулам для удлинения каверны Гарабедяна [6], Якимова [7] и Серебрякова [8]

$$\lambda^2 = \frac{\nu(\sigma)}{\sigma}, \quad \lambda^2 = \frac{\nu(\sigma) + \ln \nu(\sigma)}{\sigma}, \quad \lambda^2 = \frac{\nu(\sigma) + \ln \nu(\sigma) - 1}{\sigma}$$

составляют $6,4 \div 7,0; 5 \div 8$ и $0,9 \div 1,2\ \%$ соответственно.

При $0,001 \leq \sigma < 0,1$ длина каверны находится с использованием аппроксимационных формул (1)–(4).

Для определения длины каверны в диапазоне $0,1 \leq \sigma \leq 3,0$ предлагается аппроксимационная формула

$$\frac{L_k}{2R} = \frac{\sqrt{C_x}}{\sigma} (-0,0117\nu^3(\sigma) + 0,040\ 77\nu^2(\sigma) + 0,3579\nu(\sigma) + 0,7637). \quad (5)$$

Различия результатов вычислений по предложенным аппроксимационным формулам (1)–(5) и результатов численного решения задачи Рябушинского для диска представлены в табл. 1.

Рассмотрим задачу о форме образующей каверны за диском. Параметрические уравнения границы каверны за вертикальной пластиной (в системе координат с началом в ее точке схода), полученные из точного решения плоской задачи, имеют вид

$$\bar{x}(s) \equiv \frac{x(s)}{\Delta R_k} = (1 - c^2) \int_0^s \frac{\sin^2(s/2)}{(1 + 2c \cos s + c^2)^{3/2}} ds, \quad c = \frac{1}{1 + \sigma_2},$$

$$\bar{y}(s) \equiv \frac{y(s)}{\Delta R_k} = \frac{1 - c^2}{2c} \left(\frac{1}{\sqrt{1 + 2c \cos s + c^2}} - \frac{1}{1 + c} \right), \quad 0 \leq s \leq \pi. \quad (6)$$

Согласно принципу соответствия плоских и осесимметричных течений [4, 5] форма образующей каверны Рябушинского за диском описывается уравнениями (6), в которых

эквивалентное число кавитации для плоской задачи $\sigma = \sigma_2$ является корнем уравнения

$$\delta - (1 - c^2) \int_0^{\pi} \frac{\sin^2(s/2)}{(1 + 2c \cos s + c^2)^{3/2}} ds = 0, \quad (7)$$

следующего из условия равенства величин δ для плоского и осесимметричного течений.

При изменении параметра δ в диапазоне $6 \leq \delta \leq 200$ решение уравнения (7) с погрешностью менее 0,02 % можно представить в аналитическом виде:

$$\sigma_2 = \frac{2,0008\delta^2 + 0,784\delta - 0,508}{\delta^2(\delta - \pi/2)}.$$

Минимальное значение $\delta_{\min} = \pi/2$ соответствует предельному течению при $\sigma = \sigma_2 = \infty$ ($c = 0$), когда пластина имеет бесконечную длину. Это решение является предельным и в случае осесимметричного течения при $\sigma = \sigma_3 = \infty$. При этом профили плоской и осесимметричных образующих каверн совпадают и согласно (6) при $c \rightarrow 0$ описываются следующими уравнениями:

$$\frac{x(s)}{\Delta R_k} = \frac{s - \sin s}{2}, \quad \frac{y(s)}{\Delta R_k} = \frac{1 - \cos s}{2}, \quad 0 \leq s \leq \pi.$$

С уменьшением числа кавитации различие профилей плоских и осесимметричных каверн, полученных на основе принципа соответствия, возрастает. Например, если при $\sigma_3 = 1$ погрешность незначительна (не превышает 0,02 %), то при $\sigma_3 = 0,01$ максимальная погрешность составляет уже приблизительно 3 %. Эту погрешность можно существенно уменьшить, используя базу данных численных расчетов.

Пусть зависимость $x = x(s)$, как и выше, задается формулой (6). Зависимость $y = y(s)$ для формы образующей осесимметричной каверны будем искать в виде

$$\bar{y}_3(s) \equiv \frac{y_3(s)}{\Delta R_k} = \bar{y}_2(s) [\bar{y}_2(s) + (1 - \bar{y}_2(s))(A(\sigma)\bar{y}_2(s) + B(\sigma))].$$

Входящие в это выражение функции $A(\sigma)$ и $B(\sigma)$ определяются путем аппроксимации методом наименьших квадратов результатов численных расчетов осесимметричной задачи в точной нелинейной постановке. Отметим, что случай $A(\sigma) = 0$, $B(\sigma) = 1$ удовлетворяет принципу соответствия. Аппроксимирующие зависимости имеют вид

$$A(\sigma) = -0,0024\nu^2(\sigma) + 0,0034\nu(\sigma) - 0,0007,$$

$$B(\sigma) = 0,0015\nu^2(\sigma) + 0,008\nu(\sigma) + 0,9987.$$

При использовании такого подхода для нахождения формы образующей осесимметричной каверны получаются результаты, близкие к точным результатам. Например, при $\sigma_3 = 0,01$ погрешность аппроксимации профиля осесимметричной каверны профилем (6) плоской каверны, составлявшая согласно принципу соответствия 3 %, уменьшилась в 30 раз.

Построим приближенное решение задачи о форме осесимметричной каверны за диском, которое имеет более простой вид даже по сравнению с соответствующим аналитическим решением плоской задачи Рябушинского.

Уравнение формы образующей каверны за диском представляется в следующем параметрическом виде:

$$\frac{2x(s)}{L_k} = s - \frac{\sin s\pi}{\pi}, \quad \frac{y(s)}{\Delta R_k} = s^2(3 - 2s - (1 - s)^2(a_0 + a_1s + a_2s^2)), \quad 0 \leq s \leq 1. \quad (8)$$

Коэффициенты аппроксимации определены методом наименьших квадратов на основе результатов численного решения задачи в точной постановке:

$$\begin{aligned} a_0 &= 0,0162\nu^3(\sigma) - 0,2087\nu^2(\sigma) + 0,0841\nu(\sigma) + 0,3949, \\ a_1 &= -0,0116\nu^3(\sigma) + 0,4085\nu^2(\sigma) - 0,8481\nu(\sigma) - 0,9243, \\ a_2 &= -0,0055\nu^3(\sigma) - 0,2098\nu^2(\sigma) + 0,7206\nu(\sigma) - 0,0865. \end{aligned}$$

В диапазоне $0,01 \leq \sigma \leq 0,5$ максимальное различие результатов вычислений по данным формулам и результатов численного решения задачи в точной нелинейной постановке [4, 5] не превышает 0,06 %. Представление решения в виде (8) соответствует поведению точного решения в точке отрыва ($s = 0$) — обращению в бесконечность кривизны образующей каверны.

Построим решение задачи о форме каверны на начальном ее участке при $\sigma = 0$. В этом случае в диапазоне $0 \leq \bar{x} \leq 2$ ($\bar{x} = x/R$) форма начального участка каверны описывается уравнением

$$\bar{y}(x) \equiv y(x)/R = 0,0194(x/R)^2 - 0,1069(x/R)^{4/3} + 0,7637(x/R)^{2/3},$$

коэффициенты которого получены на основе аппроксимации результатов численного решения. Структура данной формулы соответствует поведению точного решения в окрестности точки отрыва, и максимальная погрешность расчетов с использованием данной формулы не превышает 0,04 %.

Использование базы численных данных позволяет получить приближенные формулы для объема каверны и присоединенной массы диска.

Аппроксимационную формулу для объема Q каверны Рябушинского за диском представим в следующем виде:

$$\bar{Q} = \frac{Q}{\pi R^2 L_k} = \frac{C_x}{3\sigma(0,3306 - 0,0424\nu(\sigma) - 0,0035\nu^2(\sigma))}. \quad (9)$$

С использованием точной зависимости П. Гарабедяна [6]

$$\frac{M}{Q} = \sigma - \frac{C_x}{3\bar{Q}},$$

связывающей коэффициент сопротивления C_x , число кавитации σ , объем каверны Q и присоединенную массу M для кавитаторов в форме конуса, из аппроксимационной формулы (9) для объема каверны за диском можно получить приближенную формулу для коэффициента присоединенной массы диска $\lambda_1 = M/Q$ в виде

$$\lambda_1 = \sigma(0,0035\nu^2(\sigma) - 0,0424\nu(\sigma) + 0,6694).$$

Найдем приближенное решение задачи о распределении скорости $V = V(y)$ вдоль прямолинейной образующей кавитатора в случаях плоского ($\varepsilon = 0$) и осесимметричного ($\varepsilon = 1$) течений Рябушинского.

Из известного точного решения задачи кавитационного обтекания вертикальной пластины по схеме Кирхгофа ($\sigma_2 = 0$) получим распределение скорости $\bar{V} = V/V_0$ вдоль пластины как функцию переменной $\bar{y} = y/R$ в следующем параметрическом виде:

$$\bar{y}(u) = \frac{4}{4 + \pi} \left(\arctg u + \frac{u(3 + u^2)}{(1 + u^2)^2} \right), \quad \bar{V}_0(u) = u, \quad 0 \leq u \leq 1. \quad (10)$$

Ниже будем использовать только безразмерные величины, опуская в обозначениях черту над ними.

На основе решения (10) построим явную приближенную зависимость скорости от вертикальной координаты

$$V_0(y) = u[1 - (1 - u)f(u)]. \quad (11)$$

Здесь

$$u = 1 - \sqrt{1 - y}, \quad f(u) = 0,7666u^4 - 0,752u^3 + 0,3215u^2 + 0,4357u + 0,1123.$$

Для произвольного числа кавитации функцию $V = V(y)$ представим в следующем виде:

$$V(y) = \sqrt{1 + \sigma} V_0(y)[1 + (1 - V_0(y))G(\varepsilon, \sigma)]. \quad (12)$$

Входящую в данное представление функцию $G(\varepsilon, \sigma)$ выразим через число кавитации. Подставляя представление (12) для функции $V(y)$ в выражение для коэффициента сопротивления

$$C_x(\varepsilon, \sigma) = 1 + \sigma - (1 + \varepsilon) \int_0^1 V^2(y)y^\varepsilon dy,$$

получаем квадратное уравнение относительно искомой функции $G(\varepsilon, \sigma)$

$$J_3(\varepsilon)G^2(\varepsilon, \sigma) + 2J_2(\varepsilon)G(\varepsilon, \sigma) + H(\varepsilon, \sigma) = 0, \quad (13)$$

где

$$H(\varepsilon, \sigma) = \frac{C_x(\varepsilon, \sigma) - 1 - \sigma}{(1 + \varepsilon)(1 + \sigma)} + J_1(\varepsilon), \quad J_1(\varepsilon) = \int_0^1 V_0^2(y)y^\varepsilon dy,$$

$$J_2(\varepsilon) = \int_0^1 V_0^2(y)(1 - V_0(y))y^\varepsilon dy, \quad J_3(\varepsilon) = \int_0^1 V_0^2(y)(1 - V_0^2(y))y^\varepsilon dy.$$

С учетом выражения (11) для функции $V_0(y)$ в результате вычисления соответствующих интегралов находим

$$\begin{aligned} J_1(0) = 0,1202, \quad J_1(1) = 0,097\,35, \quad J_2(0) = 0,056\,51, \quad J_2(1) = 0,041\,83, \\ J_3(0) = 0,031\,23, \quad J_3(1) = 0,021\,26. \end{aligned}$$

Из соотношения (13) следует представление искомой функции

$$G(\varepsilon, \sigma) = (-J_2(\varepsilon) + \sqrt{J_2^2(\varepsilon) - H(\varepsilon, \sigma)J_3(\varepsilon)})/J_3(\varepsilon).$$

Коэффициент сопротивления $C_x(\varepsilon, \sigma)$, входящий в выражение для функции $H(\varepsilon, \sigma)$, определяется по аппроксимационным формулам. В диапазоне $0 \leq \sigma_2 \leq 3$ в случае вертикальной пластины ($\varepsilon = 0$) предлагается аппроксимационная формула

$$C_x(0, \sigma) \equiv C_x(\sigma_2) = \frac{2\pi}{4 + \pi} [1 + \sigma_2(1 + 0,0178\sigma_2 - 0,0017\sigma_2^2)],$$

максимальная относительная погрешность результатов вычислений по которой не превышает 0,02 %. В случае диска ($\varepsilon = 1$) коэффициент сопротивления $C_x(1, \sigma) \equiv C_x(\sigma_3)$ вычисляется по формуле (2).

Таблица 2

Распределение скорости вдоль кавитатора

y	Пластина ($\sigma_2 = 0,01$)		Диск ($\sigma_3 = 0,01$)		Пластина ($\sigma_2 = 0,3$)		Диск ($\sigma_3 = 0,3$)	
	V_{ex}	V_{app}	V_{num}	V_{app}	V_{ex}	V_{app}	V_{num}	V_{app}
0,7393	0,402	0,402	0,369	0,369	0,453	0,453	0,406	0,404
0,9584	0,703	0,703	0,673	0,674	0,796	0,796	0,752	0,753
0,9967	0,905	0,905	0,894	0,892	1,025	1,025	1,006	1,007
1,0000	1,005	1,005	1,005	1,005	1,140	1,140	1,140	1,140

Сравнение результатов вычислений распределения скорости вдоль образующих кавитатора в форме вертикальной пластины и диска по предложенному методу с результатами численных расчетов (табл. 2) показывает, что предложенный приближенный метод является достаточно точным.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Гузевский Л. Г.** Численный анализ кавитационных течений. Новосибирск, 1979. (Препр. / АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т теплофизики; № 40-79).
2. **Guzevsky L. G.** Calculation of axially symmetric cavity flows // Russ. J. Engng Thermophys. 1992. V. 2, N 3. P. 193–212.
3. **Гузевский Л. Г.** Метод граничных интегральных уравнений решения плоской и осесимметричной задач Рябушинского // Вычисл. технологии. 2006. Т. 11. С. 68–81. (Спецвыпуск).
4. **Гузевский Л. Г.** Аппроксимационные зависимости для осесимметричных каверн за конусами // Гидродинамические течения и волновые процессы: Сб. науч. тр. Новосибирск: Ин-т теплофизики СО АН СССР, 1983. С. 82–91.
5. **Гузевский Л. Г., Заварзин Д. С.** Соответствие между плоскими и осесимметричными кавитационными течениями // Докл. СО АН высш. шк. 2000. № 1. С. 10–17.
6. **Gilbarg D.** Jets and cavities // Handbuch Physik. Berlin: Springer-Verlag, 1960. Bd 9. S. 311–445.
7. **Якимов Ю. Л.** Об интеграле энергии при движении с малыми числами кавитации и предельных формах каверн // Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа. 1983. № 3. С. 67–70.
8. **Serebryakov V.** Asymptotic approach for problems of axisymmetric supercavitation based on the slender body approximation // Proc. of the 3rd Intern. symp. on cavitation, Grenoble (France), Apr. 1998. Grenoble: S. n., 1998. V. 1. P. 61–70.

Поступила в редакцию 15/VI 2010 г.